17. Modelos estadísticos y cálculo de suma de cuadrados con dos metodologías en experimentos monofactoriales balanceados, sin y con submuestreo

DOI: https://doi.org/10.52501/cc.299.17

Andrés González Huerta*§
Delfina de Jesús Pérez López**
Jesús Hernández Ávila***
J. Ramón Pascual Franco Martínez****
Martín Rubí Arriaga*****
Artemio Balbuena Melgarejo******

Resumen

Estudiantes, profesores, investigadores, divulgadores en ciencia y tecnología, así como extensionistas, entre otros usuarios, frecuentemente enfrentan el dilema de elegir un modelo estadístico para generar un análisis de varianza y una comparación de medias de tratamientos en un ensayo y, en consecuencia, para aplicar un paquete estadístico. En este estudio se homologan los correspondientes a los diseños experimentales balanceados completamente al azar, bloques completos al azar y cuadro latino, empleando dos metodologías para calcular sumas de cuadrados, sin y con submuestreo dentro de las unidades experimentales. Las fórmulas que se presentan en este estudio fueron construidas utilizando un método abreviado que ha sido

§ Autor para correspondencia: agonzalezh@uaemex.mx
* Doctor en Ciencias Agropecuarias y Recursos Naturales. Facultad de Ciencias Agrícolas, Universidad Autónoma del Estado de México. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6055-7597
** Doctora en Ciencias Agropecuarias y Recursos Naturales. Profesora de tiempo completo de la Universidad Autónoma del Estado de México. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1621-5690
*** Doctor en Gobierno y Administración Pública. Profesor de tiempo completo en la Facultad de Ciencias Agrícolas de la Universidad Autónoma del Estado de México. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4544-9250
**** Doctor en Ciencias Agropecuarias y Recursos Naturales por la Universidad Autónoma del Estado de México. ORCID: https://orcid.org/0009-0002-2139-6203
***** Doctor en Ciencias Agropecuarias y Recursos Naturales por la Universidad Autónoma del Estado de México. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7547-5017
****** Maestro en Fitomejoramiento por la Universidad Autónoma del Estado de México.

presentado y analizado en otras publicaciones por el autor para correspondencia, de tal forma que es más fácil definir las formas cuadráticas o matriciales a partir de la metodología de mínimos cuadrados. Las formas cuadráticas o matriciales también son de gran utilidad para generar análisis bivariados como correlación y regresión lineal simple y múltiple o análisis multivariados, entre otros. Para mostrar dichos procedimientos se utilizan datos del rendimiento de grano por planta registrados en cuatro cultivares de maíz sembrados en 2010 y aleatorizados en el área experimental en un diseño en cuadro latino. Con relación a las formas cuadráticas o matriciales podría utilizarse una calculadora de matrices que se encuentra disponible gratuitamente en la internet.

Palabras clave: *diseños completamente al azar, bloques completos al azar y cuadro latino, formas cuadráticas o matriciales.*

Introducción

El cálculo de sumas de cuadrados (SC) en un análisis de varianza (Anava) es importante como un prerrequisito para la obtención de los cuadrados medios, que es una extensión de la clásica fórmula de la varianza cuando se consideran más factores de clasificación en los modelos estadísticos (González et al., 2008; González et al., 2010); éstos son utilizados para realizar pruebas de hipótesis con una distribución de F, sin o con la aplicación de software, como InfoStat e InfoGen (Balzarini et al., 2008; Rienzo et al., 2008; Balzarini et al., 2016). La relación entre los modelos estadísticos y las esperanzas matemáticas de los cuadrados medios es muy estrecha y éstos contribuyen a la estimación de los efectos o varianzas que son estimables cuando se usan variantes fijas, aleatorias o mixtas. Los cuadrados medios son varianzas promedio en las diferentes fuentes de variación que son de interés para los usuarios en una Anava (Sahagún, 1991; Freund y Wilson, 1993, Sahagún, 1998; Restrepo 2007a y 2007b).

La variabilidad total relacionada con cualquier característica cuantitativa de interés para el usuario es dividida en cada uno de los componentes del modelo estadístico (Martínez, 1988; Sistema para Análisis Estadístico

[SAS, por sus siglas en inglés], 1988; Sahagún, 1991 y 1998). Los programas de mejoramiento genético, producción de semillas, generación, validación, aplicación y transferencia de tecnología a campos de productores, entre otras modalidades que se emplean en la agronomía, dependen de la precisión con la que se estimen dichos efectos o varianzas (González et al., 2019; Jasso et al., 2022; Pérez et al., 2022; González et al., 2023).

En el diseño y análisis de un experimento balanceado o de una serie de ensayos de este tipo, las SC también se pueden calcular utilizando formas cuadráticas o expresiones matriciales, sin y con submuestreo dentro de las unidades experimentales, como lo mostraron Gomez y Gomez (1984), Martínez (1988), Zamudio y Alvarado (1996), y González et al. (2023), entre otros. La precisión con la que se controle la variabilidad aleatoria presente dentro y entre las unidades experimentales que reciben el mismo o diferentes tratamientos es fundamental para disminuir los errores muestrales y experimentales (Martínez, 1988; Piepho et al., 2003; Hansen et al., 2006).

En experimentos monofactoriales balanceados con submuestreo, Zamudio y Alvarado (1996) desarrollaron la teoría matricial para la generación de un Anava para los tres diseños experimentales previamente mencionados, así como una serie de códigos para analizarlos con el Sistema para Análisis Estadístico (SAS); Gomez y Gomez (1984) y Freund y Wilson (1993) mostraron los procedimientos algebraicos para obtener un Anava en un diseño de bloques completos al azar; Martínez (1988) analizó los efectos entre tratamientos que son medibles con un diseño completamente al azar; Hansen et al. (2003) mostraron otro enfoque para el análisis estadístico de este tipo de experimentos y González et al. (2023) describieron la metodología de mínimos cuadrados para analizarlos, individualmente o en una sola corrida, cada uno o los tres diseños experimentales de referencia y, adicionalmente, presentaron las expresiones matriciales para obtener las *SC* en un diseño en cuadro Latino. Con datos de floración masculina registrada en maíz (*Zea mays* L.), ellos aplicaron InfoStat para validar los cálculos manuales, los cuales también se pueden generar con InfoGen y SAS, entre otros paquetes estadísticos.

En el contexto anterior, el objetivo principal del presente estudio fue homologar los modelos estadísticos correspondientes a los tres diseños experimentales con las metodologías de mínimos cuadrados y formas cuadráticas o matriciales para calcular SC, sin y con submuestreo, como un prerrequisito para aplicar software y para extender los análisis al caso de experimentos factoriales con *n* variables cuantitativas registrando *s* observaciones dentro de cada unidad experimental, como lo han sugerido Sánchez (1988) y Zamudio y Alvarado (1996), entre otros investigadores, como etapa previa para la aplicación de metodologías multivariadas, como análisis de componentes principales y dendogramas o clúster.

Materiales y Métodos

Material genético

En este estudio fueron considerados los datos de la producción de grano (variable x, g planta^{-1}) que se muestran en la tabla 17.1, registrados en cuatro cultivares de maíz, en cuatro repeticiones por cultivar. Estos son parte de un ensayo conducido en 2010 en un terreno de la Facultad de Ciencias Agrícolas de la Universidad Autónoma del Estado de México, localizado en El Cerrillo Piedras Blancas, Municipio de Toluca, Estado de México, México. Los materiales son: Cóndor (T1), Ixtlahuaca (T2), Cacahuacintle (T3), y Palomero Toluqueño (T4). González et al. (2023) usaron datos de este ensayo correspondientes a floración masculina, para mostrar una parte del procedimiento que es considerado en el presente estudio.

Diseños experimentales considerados

La asignación de los tratamientos a las unidades experimentales, en un ensayo monofactorial, se hizo considerando un diseño en cuadro Latino (*DCL*); el análisis de los datos se puede realizar con éste o con los diseños completamente al azar (*DCA*) y bloques completos al azar (*DBCA*), con y sin submuestreo dentro de las unidades experimentales. El objetivo principal en el año 2010 fue estimar la eficiencia de estos tres diseños experimentales, pero los datos no fueron publicados.

Tabla 17.1. *Datos de rendimiento de grano por planta (g) registrados en cuatro variedades de maíz evaluadas en 2010 en El Cerrillo Piedras Blancas, Estado de México*

Hileras (i)	***Muestra (l)***	***Columnas (j)***				***Subtotal***
		1	***2***	***3***	***4***	
	1	140	210	86	160	
1	2	152 (3)	190 (1)	92 (4)	180 (2)	
	3	138	201	100	172	
Subtotal		430	601	278	512	1821
Media		143.33	200.33	92.66	170.66	606.98
	1	192	156	186	96	
2	2	200 (2)	162 (3)	203 (1)	104 (4)	
	3	189	149	210	100	
Subtotal		581	467	599	300	1947
Media		193.66	155.66	199.66	100	648.98
	1	83	170	160	203	
3	2	96 (4)	161 (2)	150 (3)	216 (1)	
	3	90	153	171	228	
Subtotal		269	484	481	647	1881
Media		89.66	161.33	160.33	215.66	626.98
	1	204	96	165	186	
4	2	230 (1)	81 (4)	179 (2)	171 (3)	
	3	216	109	153	160	
Subtotal		650	286	497	517	1950
Media		216.66	95.33	165.66	172.33	649.98
Total		1930	1838	1855	1976	7599
Media		643.31	612.65	618.31	658.65	2532.92

Nota: Los tratamientos se indican entre paréntesis: T1 = Cóndor = 832.31; T2 = Ixtlahuaca = 691.31; T3 = Cacahuacintle = 631.65; T4 = Palomero = 377.65.

Fuente: Elaboración propia y obtenida de los datos de la investigación.

Tamaño de las unidades experimentales y de las submuestras

Cada unidad experimental (UE) constó de tres surcos de 6.0 m de longitud, con separación entre hileras de 0.80 m; el área de cada UE fue de 14.4 m^2, pero fueron eliminados 0.50 en ambos extremos de cada unidad experimental y sólo se utilizó el surco central para el registro de datos. Para facilitar los cálculos manuales se utilizará un tamaño muestral dentro de cada UE de sólo tres datos ($s = 3$).

Metodologías usadas

En este estudio son consideradas las técnicas de mínimos cuadrados y formas cuadráticas; para homologar ambas se presentan sus expresiones matriciales para cada uno de los tres diseños experimentales, sin y con submuestreo dentro de las unidades experimentales. La simbología es similar a la que presentaron González et al. (2023) cuando analizaron el número de días transcurridos desde la siembra hasta la dehiscencia de polen en variedades de maíz.

Simbología empleada

Cada una de las variables de clasificación que se muestran en los tres diseños experimentales, sin y con submuestreo, serán identificadas con los subíndices i, j, k, l; estos tendrán correspondencia directa con hileras (H), columnas (C), tratamientos (T) y submuestras (S), cuyos niveles serán h, c, t y s, respectivamente. La variable respuesta X, representará la producción de grano por planta, medida en gramos. Las formas cuadráticas o matriciales se expresarán de la misma manera como lo hicieron González et al. (2023); en estas Y' es la matriz transpuesta de Y, la cual contiene todos los datos o un subconjunto de ellos, dependiendo de la fuente de variación (FV) que sea calculada, capturados siempre en el mismo orden: 1 hasta ht; 1 hasta h; 1 hasta c; 1 hasta t; 1 hasta s. Además, J es una matriz de 1's (unos), cuyas dimensiones también dependen de si se aplica o no submuestreo; sin submuestreo, como $ht = 16$ datos (cuando se usan medias aritméticas por UE), sus dimensiones son 16 hileras y 16 columnas (16×16), pero con submuestreo, como $hts = 48$, ésta está conformada por 48 hileras y 48 columnas (48×48). Por ejemplo, para diferenciar la simbología anterior de la que se muestra en el resto del manuscrito, $Y'_{i\cdot}$ o $Y'_{\cdot k}$ serán las matrices transpuestas de $Y_{i\cdot}$ o $Y_{\cdot k}$, construidas con los totales de hileras y tratamientos, respectivamente, siempre en el orden de H_1, H_2, H_3,…, H_h y T_1, T_2, T_3,…, T_t.

Software recomendable

Para verificar las sumas de cuadrados que serán presentados en la sección de Resultados podría utilizarse la versión 2016 del paquete estadístico InfoGen (http://www.info-gen.com.ar), liberado en su versión comercial y estudiantil por la Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, a través de su Facultad de Ciencias Agropecuarias. Las salidas también se pueden obtener con InfoStat (https://www.Infostat.com.ar) y SAS (https://www.sas.com), entre otros softwares. Se sugiere consultar a González et al. (2023) para sugerencias acerca de cómo elaborar bases de datos y como generar un análisis de varianza y una comparación de medias de tratamientos aplicando la prueba de Tukey en los tres diseños experimentales de referencia, con y sin submuestreo dentro de las unidades experimentales, cuando se aplican estos tres paquetes estadísticos. En Zamudio y Alvarado (1996) se pueden consultar los códigos para SAS aplicando otros enfoques al mismo propósito.

Modelos estadísticos

La construcción de los modelos que a continuación se presentan se hizo con base en las guías descritas en Sahagún (1998), Piepho et al. (2003) y Restrepo (2007a, y 2007b), entre otros. La característica idéntica que comparten todos es que la interacción entre repeticiones y tratamientos determina el error experimental o el residual del modelo cuando no se aplica submuestreo. Con submuestreo, se define que el error conjunto está formado por el error muestral y el experimental. Adicionalmente, se asume que en un diseño en cuadro latino no existe interacción entre las hileras, las columnas y los tratamientos.

(a) Sin submuestreo

Para un *DCA*: $x_{ik} = \mu + \tau_k + \varepsilon_{ik}$

Para un *DBCA*: $X_{ik} = \mu + H_i + \tau_k + \varepsilon_{ik}$
Para un *DCL*: $X_{ijk} = \mu + H_i + C_j + \tau_k + \varepsilon_{ijk}$

(b) Con submuestreo
Para un *DCA*: $X_{ikl} = \mu + \tau_k + \beta_{kl} + \varepsilon_{ikl}$
Para un *DBCA*: $X_{ikl} = \mu + H_i + \tau_k + \beta_{kl} + \varepsilon_{ikl}$
Para un *DCL*: $X_{ijkl} = \mu + H_i + C_j + \tau_k + \beta_{kl} + \varepsilon_{ijkl}$

Donde: X es la variable respuesta; μ es la media general; H_i es el efecto asociado a la i-ésima hilera; C_j es la contribución de la j-ésima columna; τ_k es el efecto originado por el k-ésimo tratamiento; β_{kl} es el error muestral; ε_{ikl} es el residual del modelo o error experimental.

En Zamudio y Alvarado (1996) se describen también los modelos anteriores, excepto para el *DCL*.

Resultados

Análisis sin muestreo

En éste solamente serán considerados los 16 datos que se muestran como medias aritméticas en la tabla 17.1. En un diseño en cuadro latino el número de hileras (h), columnas (c), y tratamientos (t) es igual. Así, $h = c = t$. Cuando se consideren los diseños de Bloques Completos al Azar y Completamente al Azar se asumirá que $h = r$, donde r es el número de repeticiones en cada tratamiento, pero también existe la opción de $c = r$. Así: en el denominador de las fórmulas que serán presentadas a continuación podría utilizarse indistintamente $ht = ct = rt = t^2$, o bien, $hts = cts = rts = t^2s$, para sin y con submuestreo.

DCA

$$\textbf{SC Total} = \sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t} Y_{ik}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t} Y_{ik})^2}{ht}$$

Donde:

$\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t} Y_{ik}$ = 143.33 + 200.33 + 92.66 +, … ,+ 172.33 = 2532.92

SC Total = $(143.33^2 + 200.33^2 + 92.66^2 +, \dots, + 172.33^2) - \frac{(2532.92)^2}{4(4)}$

= 429436.1138 – 400980.2329 = 28455.881

SC Total = Y'Y − $\left(\frac{1}{ht}\right)$Y'JY

$$= [143.33\ 200.33\ 92.66\ \dots\ 172.33]\begin{bmatrix}143.33\\200.33\\92.66\\\dots\\172.33\end{bmatrix} - \left(\frac{1}{16}\right)[143.33\ 200.33\ 92.66\ \dots\ 172.33]$$

$$\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}143.33\\200.33\\92.66\\\dots\\172.33\end{bmatrix} = 429436.1138 - 400980.2331 = 28455.8807$$

SC T = $\frac{\sum_{k=1}^{t} Y_{.k}^2}{h} - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t} Y_{ik})^2}{ht}$

$$= \frac{(832.31^2 + 691.31^2 + 631.65^2 + 377.65^2)}{4} - \frac{(2532.92)^2}{4(4)} = 428062.6743 - 400980.2329 = 27082.44$$

SC T = $\left(\frac{1}{h}\right) Y_{.k}' Y_{.k} - \left(\frac{1}{ht}\right)$Y'JY

$$= \left(\frac{1}{4}\right)[832.31\ 691.31\ 631.65\ 377.65]\begin{bmatrix}832.31\\691.31\\631.65\\377.65\end{bmatrix} - \left(\frac{1}{16}\right)[143.33\ 200.33\ 92.66\ \dots$$

$$172.33]\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}143.33\\200.33\\92.66\\\dots\\172.33\end{bmatrix} = 428062.6743 - 400980.2329 = 27082.44$$

SC Error = SC Total – SC T = 28455.881 – 27082.44 = 1373.441

Para verificación:

SC Error = $\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t} Y_{ik}^2 - \frac{\sum_{k=1}^{t} Y_{.k}^2}{h}$ = 429436.1138 − 428062.6743 = 1373.4395

$$\textbf{SC Error} = Y'Y - \left(\frac{1}{h}\right) Y_{.k}' Y_{.k} = [143.33\ 200.33\ 92.66\ \dots\ 172.33]\begin{bmatrix}143.33\\200.33\\92.66\\\dots\\172.33\end{bmatrix} -$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)[832.31\ 691.31\ 631.65\ 377.65]\begin{bmatrix}832.31\\691.31\\631.65\\377.65\end{bmatrix} = 429436.1138 - 428062.6743 = 1373.4395$$

DBCA

SC Total = $\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t} Y_{ik}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t} Y_{ik})^2}{ht}$

SC Total = $(143.33^2 + 200.33^2 + 92.66^2 +, \ldots, +172.33^2) - \frac{(2532.92)^2}{4(4)}$

= 429436.1138 – 400980.2329 = 28455.881

SC Total = Y'Y – $\left(\frac{1}{ht}\right)$Y'JY

$$= [143.33\ 200.33\ 92.66\ \ldots\ 172.33]\begin{bmatrix}143.33\\200.33\\92.66\\\ldots\\172.33\end{bmatrix} - \left(\frac{1}{16}\right)[143.33\ 200.33\ 92.66\ \ldots$$

$$172.33]\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}143.33\\200.33\\92.66\\\ldots\\172.33\end{bmatrix} = 429436.1138 - 400980.2331 = 28455.8807$$

SC H = $\frac{\sum_{i=1}^{h} Y_{i.}^2}{t} - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t} Y_{ik})^2}{ht}$

= $\frac{(606.98^2+648.98^2+626.98^2+649.98^2)}{4} - \frac{(2532.92)^2}{4(4)}$ = 401294.4204 – 400980.2329 = 314.1875

SC H = $\left(\frac{1}{t}\right) Y_{i.}'Y_{i.} - \left(\frac{1}{ht}\right)$Y'JY

$$= \left(\frac{1}{4}\right)[606.98\ 648.98\ 626.98\ 650.00]\begin{bmatrix}606.98\\648.98\\626.98\\650.00\end{bmatrix} - \left(\frac{1}{16}\right)[143.33\ 200.33\ 92.66\ \ldots$$

$$172.33]\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}143.33\\200.33\\92.66\\\ldots\\172.33\end{bmatrix} = 401294.4204 - 400980.2329 = 314.1875$$

SC T = $\frac{\sum_{k=1}^{t} Y_{.k}^2}{h} - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t} Y_{ik})^2}{ht} = \frac{(832.31^2+691.31^2+631.65^2+377.65^2)}{4} - \frac{(2532.92)^2}{4(4)}$

= 428062.6743 – 400980.2329 = 27082.44

SC T = $\left(\frac{1}{h}\right) Y'_{.k} Y_{.k} - \left(\frac{1}{ht}\right)$Y'JY

$= \left(\frac{1}{4}\right) [832.33\ 691.33\ 631.66\ 377.66] \begin{bmatrix} 832.33 \\ 691.33 \\ 631.66 \\ 377.66 \end{bmatrix} - (\frac{1}{16})[143.33\ 200.33\ 92.66 \ldots$

$172.33] \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 143.33 \\ 200.33 \\ 92.66 \\ \ldots \\ 172.33 \end{bmatrix} = 428062.6743 - 400980.2329 = 27082.44$

SC Error = SC Total – SC H – SC T = 28455.881 – 314.1875 – 27082.4414 = 1059.2521

Para verificación:

SC Error = $\sum_{i=1}^{h} \sum_{k=1}^{t} Y_{ik}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{h} Y_{i.}^2}{t} - \frac{\sum_{k=1}^{t} Y_{.k}^2}{h} + \frac{(\sum_{i=1}^{h} \sum_{k=1}^{t} Y_{ik})^2}{ht}$

= 429436.1138 – 401294.4204 – 428062.6743 + 400980.2329 = 1059.252

SC Error = Y'Y – $\left(\frac{1}{t}\right) Y'_{i.} Y_{i.} - \left(\frac{1}{h}\right) Y'_{.k} Y_{.k} + \left(\frac{1}{ht}\right)$Y'JY

= 429436.1138 - 401294.4204 - 428062.6743 + 400980.2329 = 1059.252

DCL

En esta y en la modalidad de submuestreo, en el denominador de las fórmulas para calcular las *SC*, *h* o *c*, pero no ambos, será considerado nulo.

SC Total = $\sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{t} Y_{ijk}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{c} \sum_{k=1}^{t} Y_{ijk})^2}{ht}$

SC Total = $(143.33^2 + 200.33^2 + 92.66^2 +, \ldots, +172.33^2) - \frac{(2532.92)^2}{4(4)}$

= 429436.1138 – 400980.2329 = 28455.881

SC Total = Y'Y- $\left(\frac{1}{ht}\right)$Y'JY

$= [143.33\ 200.33\ 92.66 \ldots 172.33] \begin{bmatrix} 143.33 \\ 200.33 \\ 92.66 \\ \ldots \\ 172.33 \end{bmatrix} - (\frac{1}{16})[143.33\ 200.33\ 92.66 \ldots$

$$172.33]\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}143.33\\200.33\\92.66\\ \dots\\172.33\end{bmatrix} = 429436.1138 - 400980.2331 = 28455.8807$$

$$\textbf{SC H} = \frac{\sum_{i=1}^{h} Y_{i..}^2}{t} - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{t} Y_{ijk})^2}{ht}$$

$$= \frac{(606.98^2+648.98^2+626.98^2+649.98^2)}{4} - \frac{(2532.92)^2}{4(4)} = 401294.4204 - 400980.2329 = 314.1875$$

$$\textbf{SC H} = \left(\frac{1}{t}\right) Y_{i..}' Y_{i..} - \left(\frac{1}{ht}\right) \mathrm{Y'JY}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)[606.98\ 648.98\ 626.98\ 650.00]\begin{bmatrix}606.98\\648.98\\626.98\\650.00\end{bmatrix} - \left(\frac{1}{16}\right)[143.33\ 200.33\ 92.66\ \dots$$

$$172.33]\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}143.33\\200.33\\92.66\\ \dots\\172.33\end{bmatrix} = 401294.4204 - 400980.2329 = 314.1875$$

$$\textbf{SC C} = \frac{\sum_{j=1}^{c} Y_{.j.}^2}{t} - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{t} Y_{ijk})^2}{ht}$$

$$\frac{(643.31^2+612.65^2+618.31^2+658.65^2)}{4} - \frac{(2532.92)^2}{4(4)} = 401328.7143 - 400980.2329 = 348.4814$$

$$\textbf{SC C} = \left(\frac{1}{t}\right) Y_{.j.}' Y_{.j.} - \left(\frac{1}{ht}\right) \mathrm{Y'JY}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)[643.31\ 612.65\ 618.31\ 658.65]\begin{bmatrix}643.31\\612.65\\618.31\\658.65\end{bmatrix} - \left(\frac{1}{16}\right)[143.33\ 200.33\ 92.66\ \dots$$

$$172.33]\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}143.33\\200.33\\92.66\\ \dots\\172.33\end{bmatrix} = 401328.7143 - 400980.2329 = 348.4814$$

$$\textbf{SC T} = \frac{\sum_{k=1}^{t} Y_{..k}^2}{h} - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{t} Y_{ijk})^2}{ht}$$

$$= \frac{(832.31^2+691.31^2+631.65^2+377.65^2)}{4} - \frac{(2532.92)^2}{4(4)} = 428062.6743 - 400980.2329 = 27082.44$$

$$\textbf{SC T} = \left(\frac{1}{h}\right) Y_{..k}' Y_{..k} - \left(\frac{1}{ht}\right) \mathrm{Y'JY}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)[832.31\ 691.31\ 631.65\ 377.65]\begin{bmatrix}832.31\\691.31\\631.65\\377.65\end{bmatrix} - \left(\frac{1}{16}\right)[143.33\ 200.33\ 92.66\ \dots$$

$$172.33]\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}143.33\\200.33\\92.66\\ \dots\\172.33\end{bmatrix} = 428062.6743 - 400980.2329 = 27082.44$$

SC Error = SC Total – SC H – SC C – SC T = 28455.881-314.1875 – 348.4814 – 27082.4414 = 710.7706

Para verificación:

SC Error = $\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{t} Y_{ijk}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{h} Y_{i..}^2}{t} - \frac{\sum_{j=1}^{c} Y_{.j.}^2}{t} - \frac{\sum_{k=1}^{t} Y_{..k}^2}{h} + 2\,FC$

= 429436.1138 – 401294.4204 – 401328.7143 – 428062.6743 + 2(400980.2329) = 710.7706

Para verificación:

SC Error = Y'Y – $\left(\frac{1}{t}\right) Y_{i..}' Y_{i..} - \left(\frac{1}{t}\right) Y_{.j.}' Y_{.j.} - \left(\frac{1}{h}\right) Y_{..k}' Y_{..k}$ + $\left(\frac{2}{ht}\right)$Y'JY

= 429436.1138 – 401294.4204 - 401328.7143 – 428062.6743 + 2(400980.2329) = 710.7706

Análisis con submuestreo

DCA

Nota: la suma de los *hts* datos que son considerados en la tabla 17.1 es:

$\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} Y_{ikl}$ = **140 + 152 + 138 +,…,+ 160 = 7599**

SC Total = $\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} Y_{ikl}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} Y_{ikl})^2}{hts}$

= $(140^2 + 152^2 + 138^2 +, \dots, + 160^2) - \frac{(140 + 152 + 138 +,\dots,+ 160)^2}{4(4)(3)}$ = 1291663 – 1203016.688 = 88646.3125

SC Total = Y'Y – $\left(\frac{1}{hts}\right)$Y'JY

$$= [140\ 152\ 138\ \dots\ 160]\begin{bmatrix}140\\152\\138\\\dots\\160\end{bmatrix} - \left(\frac{1}{48}\right)[140\ 152\ 138\ \dots\ 160]\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}140\\152\\138\\\dots\\160\end{bmatrix}$$

= 1291663 – 1203016.668 = 88646.3125

SC T = $\frac{\sum_{k=1}^{t} Y_{.k.}^2}{hs} - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} Y_{ikl})^2}{hts} = \frac{(2497^2+2074^2+1895^2+1133^2)}{4(3)} - \frac{(7599)^2}{4(4)(3)}$ = 1284266.533 – 1203016.688 = 81249.895

SC T = $\left(\frac{1}{hs}\right) Y_{.k.}' Y_{.k.} - \left(\frac{1}{hts}\right)$Y'JY

$= [140\ 152\ 138\ \dots\ 160]\begin{bmatrix} 140 \\ 152 \\ 138 \\ \dots \\ 160 \end{bmatrix} - (\frac{1}{48})[140\ 152\ 138\ \dots\ 160]\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 140 \\ 152 \\ 138 \\ \dots \\ 160 \end{bmatrix}$

$= 1291663 - 1203016.668 = 88646.3125$

SC T $= \frac{\sum_{k=1}^{t} Y_{.k.}^2}{hs} - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} Y_{ikl})^2}{hts} = \frac{(2497^2+2074^2+1895^2+1133^2)}{4(3)} - \frac{(7599)^2}{4(4)(3)} = 1284266.533$

$- 1203016.688 = 81249.895$

SC T $= \left(\frac{1}{hs}\right) Y'_{.k.}Y_{.k.} - \left(\frac{1}{hts}\right)Y'JY$

$= \left(\frac{1}{4(3)}\right)[2497\ 2074\ 1895\ 1133]\begin{bmatrix} 2497 \\ 2074 \\ 1895 \\ 1133 \end{bmatrix} - (\frac{1}{48})[140\ 152\ 138\ \dots\ 160]\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 140 \\ 152 \\ 138 \\ \dots \\ 160 \end{bmatrix}$

$= 1284266.583 - 1203016.688 = 81249.895$

SC Error Conjunto (EC) = SC Total – SC T = 88646.3125 – 81249.895 = 7396.4171

SC EC $= Y'Y - \left(\frac{1}{hs}\right) Y'_{.k.}Y_{.k.}$

$= [140\ 152\ 138\ \dots\ 160]\begin{bmatrix} 140 \\ 152 \\ 138 \\ \dots \\ 160 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{4(3)}\right)[2497\ 2074\ 1895\ 1133]\begin{bmatrix} 2497 \\ 2074 \\ 1895 \\ 1133 \end{bmatrix} = 1291663$

$- 1284266.583 = 7396.417$

González et al. (2023) definieron la *SC EC* como:

$SC\ EC = SC\ EM + SC\ EE$

Donde: *SC EM* es la suma de cuadrados del error muestral y *SC EE* es la suma de cuadrados del error experimental. Adicionalmente, para calcular la *SC EM* debe elaborarse la tabla 17.2.

Tabla 17.2. *Valores para calcular SC EM o SC H*T*

Hileras (i)	***Tratamientos (k)***				***Suma***
	T1	***T2***	***T3***	***T4***	
1	601	512	430	278	1 821
2	599	581	467	300	1 947
3	647	484	481	269	1 881
4	650	497	517	286	1 950
Suma	2 497	2 074	1 895	1 133	7 599

Fuente: elaboración propia y obtenida de los datos de la investigación.

$$\textbf{SC EM} = \sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} Y_{ikl}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t} Y_{ik.}^2}{s}$$

$$= (140^2 + 152^2 + 138^2 +, \ldots, +160^2) - \frac{(601^2+512^2+430^2 +,\ldots,+286^2)}{3}$$

$$= 1291663\text{-}1288387 = 3276$$

$$\textbf{SC EM} = \text{Y'Y} - \left(\frac{1}{s}\right) Y'_{ik.}Y_{ik.} = [140\ 152\ 138\ \ldots\ 160]\begin{bmatrix}140\\152\\138\\\ldots\\160\end{bmatrix}$$

$$-\left(\frac{1}{3}\right)[601\ 512\ 430\ \ldots\ 286]\begin{bmatrix}601\\512\\430\\\ldots\\286\end{bmatrix} = 1291663 - 1288387 = 3276$$

Así: **SC EE** = SC EC – SC EM = 7396.4171 – 3276.0 = 4120.417

$$\textbf{SC EE} = \left(\frac{1}{s}\right) Y'_{ik.}Y_{ik.} - \left(\frac{1}{hs}\right) Y'_{.k.}Y_{.k.} = 1288387 - 1284266.583 = 4120.417$$

DBCA

Para homologar la simbología en este diseño, repeticiones (r) será equivalente a hileras (h).

$$\textbf{SC Total} = \sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} Y_{ikl}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} Y_{ikl})^2}{hts}$$

$$= (140^2 + 152^2 + 138^2 +, \ldots, +160^2) - \frac{(140+152+138+,\ldots,160)^2}{4(4)(3)} = 1291663 - 1203016.688$$

$$= 88646.3125$$

$$\textbf{SC Total} = \text{Y'Y} - \left(\frac{1}{hts}\right)\text{Y'JY}$$

$$= [140\ 152\ 138\ \ldots\ 160]\begin{bmatrix}140\\152\\138\\\ldots\\160\end{bmatrix} - \left(\frac{1}{48}\right)[140\ 152\ 138\ \ldots\ 160]\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}140\\152\\138\\\ldots\\160\end{bmatrix} = 1291663$$

$$- 1203016.668 = 88646.3125$$

$$\textbf{SC H} = \frac{\sum_{i=1}^{h} Y_{i..}^2}{ts} - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} Y_{ikl})^2}{hts}$$

$$= \frac{(1821^2+1947^2+1881^2+1950^2)}{4(3)} - \frac{(7599)^2}{4(4)(3)} = 1203959.25 - 1203016.688 = 942.562$$

$$\textbf{SC H} = \left(\frac{1}{ts}\right) Y'_{i..}Y_{i..} - \left(\frac{1}{hts}\right)\text{Y'JY}$$

$$= \left(\frac{1}{4(3)}\right)[1821\ 1947\ 1881\ 1950]\begin{bmatrix}1821\\1947\\1881\\1950\end{bmatrix} - \left(\frac{1}{48}\right)[140\ 152\ 138\ \ldots\ 160]\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}140\\152\\138\\\ldots\\160\end{bmatrix}$$

$$= 1203959.25 - 1203016.688 = 942.562$$

$$\textbf{SC T} = \frac{\sum_{k=1}^{t} Y_{.k.}^2}{hs} - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} Y_{ikl})^2}{hts}$$

$$= \frac{(2497^2+2074^2+1895^2+1133^2)}{4(3)} - \frac{(7599)^2}{4(4)(3)} = 1284266.533 - 1203016.688 = 81249.895$$

$$\textbf{SC T} = \left(\frac{1}{hs}\right)Y_{.k.}'Y_{.k.} - \left(\frac{1}{hts}\right)Y'JY$$

$$= \left(\frac{1}{4(3)}\right)[2497\ 2074\ 1895\ 1133]\begin{bmatrix}2497\\2074\\1895\\1133\end{bmatrix} - \left(\frac{1}{48}\right)[140\ 152\ 138\ \ldots\ 160]\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}140\\152\\138\\\ldots\\160\end{bmatrix}$$

$$= 1284266.583 - 1203016.688 = 81249.895$$

SC EC = SC Total – SC H – SC T = 88646.3125 – 942.562 – 81249.895 = 6453.855

$$\textbf{SC EC} = Y'Y - \left(\frac{1}{ts}\right)Y_{i..}'Y_{i..} - \left(\frac{1}{hs}\right)Y_{.k.}'Y_{.k.} + \left(\frac{1}{hts}\right)Y'JY = [140\ 152\ 138\ \ldots\ 160]\begin{bmatrix}140\\152\\138\\\ldots\\160\end{bmatrix}$$

$$- \left(\frac{1}{4(3)}\right)[1821\ 1947\ 1881\ 1950]\begin{bmatrix}1821\\1947\\1881\\1950\end{bmatrix} - \left(\frac{1}{4(3)}\right)[2497\ 2074\ 1895\ 1133]\begin{bmatrix}2497\\2074\\1895\\1133\end{bmatrix}$$

$$+ \left(\frac{1}{48}\right)[140\ 152\ 138\ \ldots\ 160]\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}140\\152\\138\\\ldots\\160\end{bmatrix} = 1291663 - 1203959.25 - 1284266.583$$

$$+ 1203016.688 = 6453.855$$

Al considerar el *DCA* se calculó: $SC\ EM = 3\,276.0$

Por lo tanto: $SC\ EE = SC\ EC - SC\ EM = 6453.855 - 3276.0 = 3177.855$

$$\textbf{SC EE} = \left(\frac{1}{s}\right)Y_{ik.}'Y_{ik.} - \left(\frac{1}{ts}\right)Y_{i..}'Y_{i..} - \left(\frac{1}{hs}\right)Y_{.k.}'Y_{.k.} + \left(\frac{1}{hts}\right)Y'JY$$

$$= 1288387 - 1203959.25 - 1284266.583 + 1203016.688 = 3177.855$$

DCL

$$\textbf{SC Total} = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} Y_{ijkl}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} Y_{ijkl})^2}{hts}$$

$160]\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}140\\152\\138\\ \dots\\160\end{bmatrix}$

= 1291663 – 1203016.688 = 88646.3125

SC H = $\frac{\sum_{i=1}^{h} Y_{i...}^2}{ts} - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} Y_{ijkl})^2}{hts}$

$= \frac{(1821^2+1947^2+1881^2+1950^2)}{4(3)} - \frac{(7599)^2}{4(4)(3)}$ = 1203959.25 – 1203016.688 = 942.562

SC H = $\left(\frac{1}{ts}\right) Y_{i..}' Y_{i..} - \left(\frac{1}{hts}\right)$Y'JY

$= \left(\frac{1}{4(3)}\right)[1821\ 1947\ 1881\ 1950]\begin{bmatrix}1821\\1947\\1881\\1950\end{bmatrix} - (\frac{1}{48})[140\ \ 152\ 138\ \dots\ 160]\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}140\\152\\138\\ \dots\\160\end{bmatrix} =$

1203959.25 - 1203016.688 = 942.562

SC C = $\frac{\sum_{j=1}^{c} Y_{.j..}^2}{ts} - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} Y_{ijkl})^2}{hts}$

$\frac{(1930^2+1838^2+1855^2+1976^2)}{4(3)} - \frac{(7599)^2}{4(4)(3)}$ = 1204062.083-1203016.688 = 1045.395

SC C = $\left(\frac{1}{ts}\right) Y_{.j.}' Y_{.j.} - \left(\frac{1}{hts}\right)$Y'JY

$= \left(\frac{1}{4(3)}\right)[1930\ 1838\ 1855\ 1976]\begin{bmatrix}1930\\1838\\1855\\1976\end{bmatrix} - (\frac{1}{48})[140\ 152\ 138\ \dots\ 160]\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}140\\152\\138\\ \dots\\160\end{bmatrix}$

= 1204062.083-1203016.688 = 1045.395

SC T = $\frac{\sum_{k=1}^{t} Y_{..k.}^2}{hs} - \frac{(\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} Y_{ijkl})^2}{hts}$

$= \frac{(2497^2+2074^2+1895^2+1133^2)}{4(3)} - \frac{(7599)^2}{4(4)(3)}$ = 1284266.533 – 1203016.688 = 81249.895

SC T = $\left(\frac{1}{hs}\right) Y_{..k.}' Y_{..k.} - \left(\frac{1}{hts}\right)$Y'JY

$= \left(\frac{1}{4(3)}\right)[2497\ 2074\ 1895\ 1133]\begin{bmatrix}2497\\2074\\1895\\1133\end{bmatrix} - (\frac{1}{48})[140\ 152\ 138\ \dots\ 160]$

$\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}140\\152\\138\\ \dots\\160\end{bmatrix}$

= 1284266.583 – 1203016.688 = 81249.895

SC EC = SC Total – SC H – SC C – SC T = 88646.3125 – 942.562 – 1045.395 – 81249.895 = 5408.4605

SC EC = Y'Y $- \left(\frac{1}{ts}\right) Y'_{i\ldots} Y_{i\ldots}. - \left(\frac{1}{ts}\right) Y'_{.j..} Y_{.j..} - \left(\frac{1}{hs}\right) Y'_{..k.} Y_{..k.} + \left(\frac{2}{hts)}\right) Y'JY$

= 1291663 - 1203959.25 – 1204062.083 – 1284266.583 + 2(1203016.688) = 5408.46

SC EE = SC EC – SC EM = 5408.4605 – 3276.0 = 2132.46

SC EE = $\left(\frac{1}{s}\right) Y'_{i.k.} Y_{i.k.}$ - $\left(\frac{1}{ts}\right) Y'_{i\ldots} Y_{i\ldots} - \left(\frac{1}{ts}\right) Y'_{.j..} Y_{.j..} - \left(\frac{1}{hs}\right) Y'_{..k.} Y_{..k.} + (\frac{2}{hts}) Y'JY$

= 1288387 - 1203959.25 - 1204062.083 -1284266.583 + 2(1203016.688) = 2132.46

Referencias

Balzarini, M., G., González, L., Tablada, M., Casanoves, F., Di Rienzo, J. A., y Robledo, C. W. (2008). *Manual del Usuario de InfoStat*. Brujas.

Balzarini, M., G., Di Rienzo, J. A. (2016). *InfoGen*. FCA. http://www.info-Gen.com.ar

Di Rienzo, J. A., Casanoves, F., Balzarini, M. G., González, L., Tablada, M., y Robledo, C. W. (2008). *InfoStat, versión 2008*. Grupo InfoStat/FCA.

Freund, R. J., y Wilson, W. J. (1993). *Statistical Methods (*pp. 440-452). Academic Press, Inc.

Gomez, K., A., y Gomez, A. A. (1984). *Statistical Procedures for Agricultural Research*. (2ª ed.). John Wiley & Sons.

González, H., A., Vázquez, G., L., Sahagún, C., J., y Rodríguez, P., J. E. (2008). Diversidad fenotípica de variedades e híbridos de maíz en el Valle Toluca-Atlacomulco, México. *Revista Fitotecnia Mexicana, 31*(1), 67-76.

González, A., Pérez, D. J., Sahagún, J., Franco, O., Morales, E. J., Rubí, M., Gutiérrez, F., y Balbuena, A. (2010). Aplicación y comparación de métodos univariados para evaluar la estabilidad de maíces del Valle Toluca-Atlacomulco, México. *Revista Agronomía Costarricense, 34*(2), 129-143.

González, H. A., Pérez, L. D. J., Rubí, M., Gutiérrez, F., Franco, J. R. P., y Padilla, L., A. (2019). InfoStat, InfoGen y SAS para contrastes mutuamente ortogonales en experimentos en bloques completos al azar en parcelas subdivididas. *Revista Mexicana de Ciencias Agrícolas, 10*(6), 1417-1431.

González, H., A., Pérez, L. D. J., Balbuena, M. A., Franco, M. J. R., Gutiérrez, R. F., Rodríguez, G. J. A. (2023). Submuestreo balanceado en experimentos monofactoriales usando InfoStat y InfoGen: validación con SAS. *Revista Mexicana de Ciencias Agrícolas, 14*(2), 235-249.

Hansen, M. J., Beard Jr., T. D., y Hayes, D. B. (2006). Sampling and Experimental Design. Chapter 3. In: Analysis and interpretation of freshwater fisheries data (2007). Christopher S. Guy y Michel L. Brown (Eds.), *American Fisheries Society*. https://doi.org/10.47866/9781888569773

Jasso, B. G., González, H. A., Pérez, L. D. J., Franco, M. J. R. P., Rubí, A. M., y Mejía, C. J. (2022). Uso de Opstat para validar resultados en un dialélico parcial con ocho líneas de maíz evaluadas en un ambiente. *Revista Mexicana de Ciencias Agrícolas, 13*(1), 41-52.

Martínez, G. A. (1988). *Diseños Experimentales. Métodos y Elementos de Teoría*. Trillas.

Pérez, L. D., Jasso, B. G., Saavedra, G. C., Franco, M. J. R. P., Ramírez, D. J. F., y González, H. A. (2022). Uso de artificios en Opstat para analizar series de experimentos en dialélico parcial. *Revista Mexicana de Ciencias Agrícolas, 13*(2), 273-287.

Piepho, H.P., Büchse, A., Emrich. K. (2003). A Hitchhiker's Guide to mixed models for randomized experiments. J. *Agronomy & Crop Science ,189,* 310-322.

Restrepo, L. F. (2007a). Diagramas de estructuras en el análisis de varianza. *Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias 20*(2), 202-208.

Restrepo, B. L. F. (2007b). La esperanza del cuadrado medio. *Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias 20*(2),193-201.

Sahagún, C. J. (1991). Utilidad del Análisis de Varianza en el estudio de la interacción entre genotipos y ambientes. *Xilonen, 1*(1), 21-32.

Sahagún, C. J. (1998). Construcción y análisis de los modelos fijos, aleatorios y mixtos. Departamento de Fitotecnia. Programa Nacional de Investigación en Olericultura. Universidad Autónoma Chapingo. *Boletín Técnico,* (3).

Sánchez, G. J. J. (1995). El Análisis Biplot en Clasificación. *Revista Fitotecnia Mexicana 18*(2), 188-203.

Statistical Analysis System (SAS). (1998). *SAS/STAT Users Guide. Release 6.03.* SAS Institute.

Zamudio, S. F. J., Alvarado, S. A. A. (1996). *Análisis de diseños experimentales con igual número de submuestras.* División de Ciencias Forestales, Universidad Autónoma Chapingo.