

Capítulo 3. Introducción a la teoría de conjuntos



José Martín Barajas Guerrero¹

Blanca Verónica Alvarado de la Torre²

DOI: <https://doi.org/10.52501/cc.440.03>

Resumen

La teoría de conjuntos constituye uno de los fundamentos esenciales de las matemáticas, ya que permite comprender y estructurar la mayoría de los objetos matemáticos. Un conjunto se define como una colección de elementos bien definidos y diferenciables, que pueden representarse mediante distintas notaciones: por extensión (listando elementos), por comprensión (mediante propiedades) o mediante intervalos en el caso de números reales. Conceptos básicos como la pertenencia (\in) y la contención (\subseteq) permiten establecer relaciones entre elementos y conjuntos, así como entre conjuntos mismos, facilitando su organización y análisis. Estas relaciones suelen representarse visualmente mediante diagramas de Venn.

Las operaciones fundamentales con conjuntos incluyen la unión, que agrupa los elementos de dos conjuntos; la intersección, que identifica los elementos comunes; la diferencia, que señala los elementos que pertenecen a un conjunto, pero no a otro; el complemento, que considera los elementos fuera de un conjunto dentro de un universo; y la diferencia simétrica, que reúne los elementos exclusivos de cada conjunto. Estas operaciones pueden extenderse a múltiples conjuntos y son clave para el análisis matemático.

Asimismo, la teoría de conjuntos se apoya en diversas propiedades que facilitan la manipulación y simplificación de expresiones, como las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva, de identidad, de complemento e idempotencia. Estas reglas garantizan consistencia en los resultados y permiten un manejo más eficiente de los conjuntos. En conjunto,

¹ Maestro en Ciencias en Ingeniería Administrativa. Jefe de Laboratorio de Cómputo en Tecnológico Nacional de México. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2443-9590> ; correo electrónico: martin.barajas@zacatecas.tecnm.mx

² Maestra en Informática Admirativa. Docente en Tecnológico Nacional de México.

este marco teórico es indispensable para el desarrollo del pensamiento lógico y la formalización matemática.

Palabras clave: *conjuntos, propiedades de conjuntos, operaciones de conjuntos.*

Fundamentos de la teoría de conjuntos

Intuitivamente, un **conjunto** se refiere a una colección o agrupación de elementos que tienen alguna característica común y puede representarse de varias maneras, como en forma de lista o por propiedad (Lewin, 2011).

Formalmente, un **conjunto** se define como una colección de objetos bien definidos y diferenciables entre sí, que se conocen como los *elementos* o *miembros* del conjunto. Un ejemplo es el conjunto de los números enteros pares entre el cero y diez. Casi todos los objetos matemáticos son, ante todo, conjuntos. Por consiguiente, la teoría de los conjuntos es la base sobre la cual se construyen las matemáticas. La notación y representación de conjuntos se realiza de las siguientes maneras:

- a) **Uso de llaves $\{\}$.** Los conjuntos se representan generalmente usando llaves. Por ejemplo, un conjunto de números naturales menores que 5 puede escribirse como $\{1,2,3,4\}$.
- b) **Notación de conjuntos con propiedades.** Esta notación describe los elementos de un conjunto en términos de una propiedad que comparten. Se escribe como $\{x \mid \text{propiedad de } x\}$. Por ejemplo, el conjunto de números pares positivos menores que 10 se puede escribir como $\{x \mid x \text{ es par y } 0 < x < 10\}$.
- c) **Notación de intervalos.** Se usa principalmente para representar subconjuntos de números reales. Los intervalos tienen diferentes notaciones según si incluyen o no los extremos:
 - Intervalo cerrado: $[a,b]$, incluye los extremos a y b .
 - Intervalo abierto: (a,b) , no incluye los extremos.
 - Intervalo semiabierto o semicerrado: $[a,b)$ o $(a,b]$, incluye solo uno de los extremos (Lipschutz, 1991).

Pertenencia

La pertenencia se refiere a la relación entre un elemento y un conjunto. Cuando un elemento pertenece a un conjunto, decimos que es un **miembro** de ese conjunto y usamos el símbolo \in (Cantor, 2006).

Ejemplo:

Si tenemos el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$, podemos decir que:

$2 \in A$ (porque 2 es un elemento de A).

$5 \notin A$ (porque 5 no es un elemento de A).

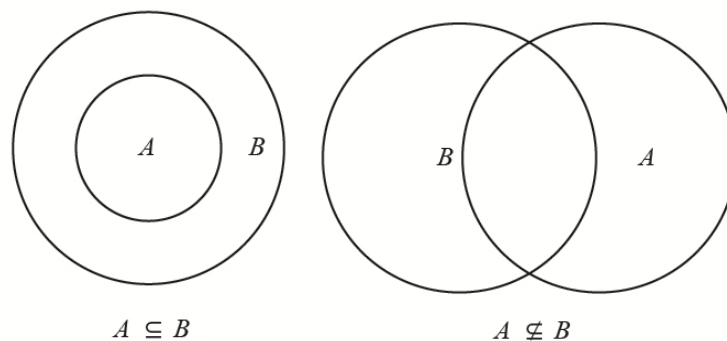
Contención

La contención se refiere a la relación entre conjuntos, específicamente cuando todos los elementos de un conjunto están dentro de otro conjunto. En este caso, decimos que uno es un subconjunto del otro y usamos el símbolo \subseteq .

Si un conjunto B es un subconjunto de A, significa que todos los elementos de B también están en A. Esto se expresa como $B \subseteq A$.

Ejemplo: si todos los elementos de A son también elementos de B, esto es si cuando $x \in A$, entonces $x \in B$, decimos que A es un subconjunto de B o que A está contenido en B y se escribe $A \subseteq B$. Si A no es un subconjunto de B, se escribe $A \not\subseteq B$ (véase la figura 1).

Figura 1. Contención



Fuente: elaboración propia.

Los diagramas, como la figura 1, se usan para mostrar las relaciones entre los conjuntos y se llaman diagramas de Venn en honor del lógico británico John Venn.

Ejemplo:

Si $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{2,4,5\}$, $C = \{1,2,3,4,5\}$

entonces $B \subseteq A$, $B \subseteq C$, $C \subseteq A$.

Sin embargo $A \not\subseteq B$, $A \not\subseteq C$, $C \not\subseteq B$

Operaciones básicas con conjuntos

Las operaciones básicas con conjuntos son herramientas fundamentales en teoría de conjuntos. Las operaciones principales son la unión, intersección, diferencia y complemento (Smith, 2000).

Unión (U)

La unión de dos conjuntos A y B se define como el conjunto que tiene todos los elementos que pertenecen a A o B y se indica como $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Observe que $x \in A \cup B$ si $x \in A$ o $x \in B$ o x pertenece a ambos.

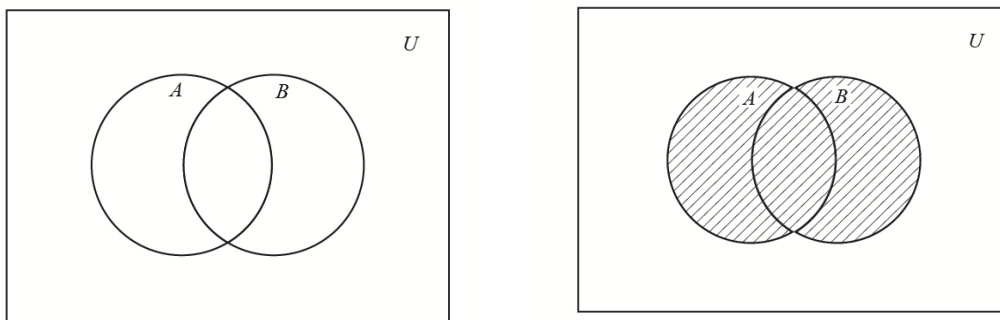
Ejemplo:

Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{3,4,5\}$, entonces:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$$

Se puede ilustrar la unión de dos conjuntos con un diagrama de Venn de la siguiente manera: si A y B son los conjuntos dados en la figura 2(a), entonces $A \cup B$ es el conjunto de puntos en la región sombreada, como lo indica la figura 2(b).

Figura 2a y 2b. Unión de dos conjuntos A y B



Fuente: elaboración propia.

Intersección (\cap)

La intersección de dos conjuntos A y B se define como el conjunto que contiene todos los elementos que están en ambos conjuntos, se denota como $A \cap B$ (Smith, 2000).

Por lo tanto, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$

Ejemplo:

Si $A = \{a,b,c,e,f\}$, $B = \{b,e,f,r,s\}$ y $C = \{a,t,u,v\}$

Encuentre $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$

Entonces: los elementos b , e y f son los únicos que pertenecen a A y B , por lo cual

$A \cap B = \{b, e, f\}$

De igual manera,

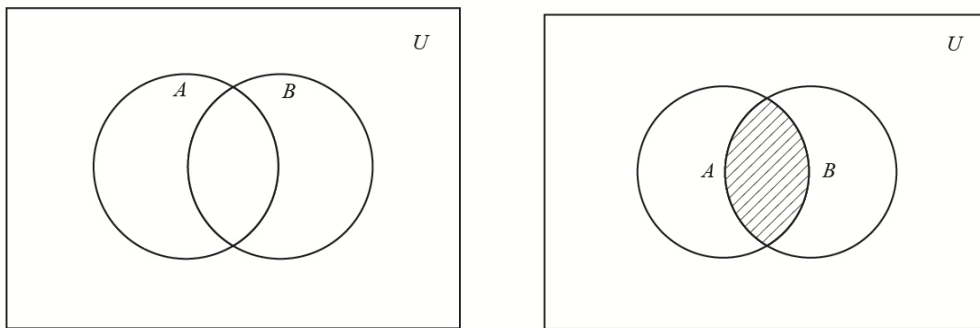
$A \cap C = \{a\}$

No existen elementos que pertenezcan tanto a A como a B , por lo que

$B \cap C$

$= \emptyset$

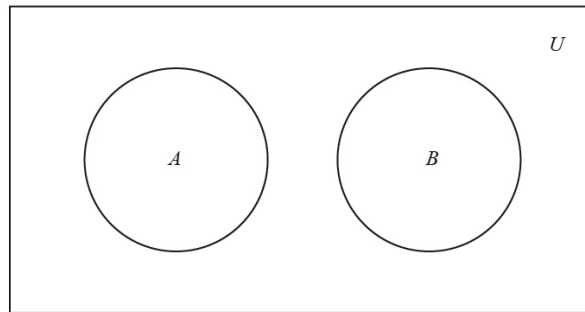
Figura 3a y 3b. Intersección de dos conjuntos A y B



Fuente: elaboración propia.

Es posible ilustrar la intersección de dos conjuntos por el diagrama de Venn. Si A y B son los conjuntos dados en la figura 3(a), entonces $A \cap B$ es la región sombreada de la figura 3(b). La figura 4 ilustra un diagrama de Venn con dos conjuntos ajenos (disjuntos) (Smith, 2000).

Figura 4. Diagrama de Venn con dos conjuntos ajenos (disjuntos)



Fuente: elaboración propia.

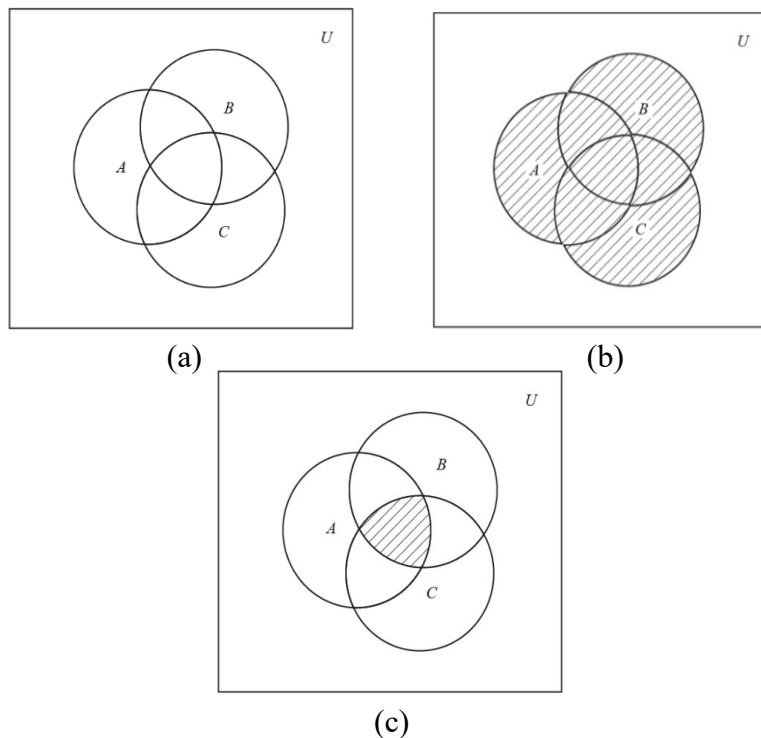
Las operaciones de unión e intersección pueden generalizarse para tres o más conjuntos. Así pues,

$$A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B \text{ o } x \in C\}$$

$$A \cap B \cap C = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B \text{ y } x \in C\}$$

La región sombreada en la figura 5(b) es la unión de los conjuntos A, B y C mostrada en la figura 5(a) y la región sombreada en la figura 5(c) es la intersección de los conjuntos A, B y C (Smith, 2000).

Figura 5. Unión e intersección para tres conjuntos



Fuente: elaboración propia.

Ejemplo:

Sea $A = \{1,2,3,4,5,7\}$, $B = \{1,3,8,9\}$, $C = \{1,3,6,8\}$

Entonces $A \cap B \cap C$ es el conjunto de elementos que pertenecen a A , B y C . Por tanto,

$A \cap B \cap C = \{1,3\}$.

Diferencia (– o \setminus)

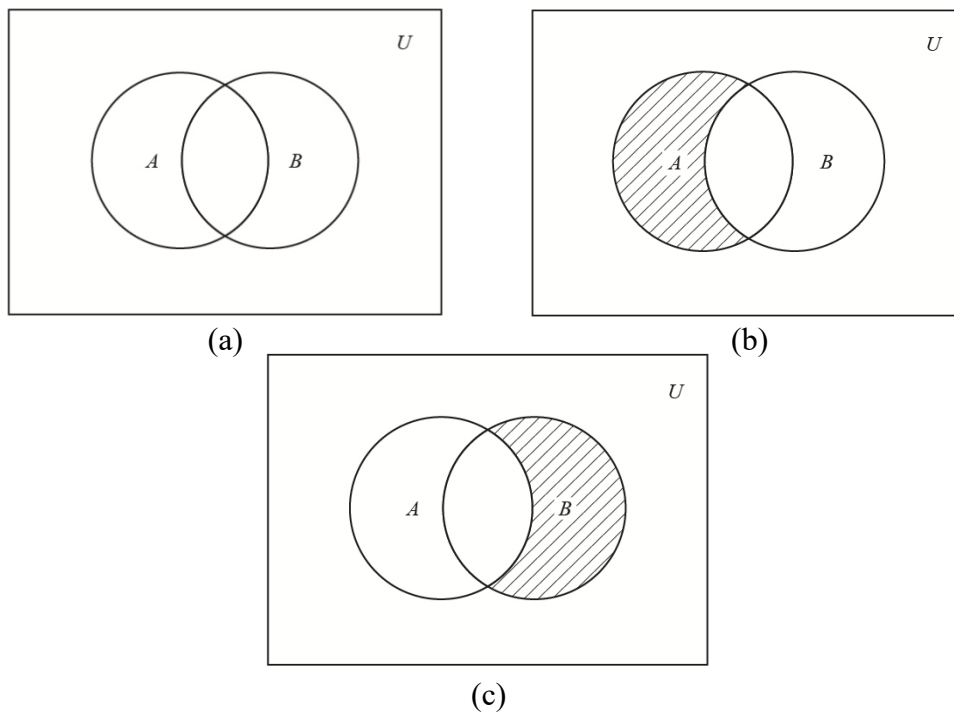
Si A y B son conjuntos, se define el complemento de B con respecto a A como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A pero no a B y se indica $A - B$ (Smith, 2000).

Por lo tanto

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Si A y B son los conjuntos en la figura 6(a), entonces $A - B$ y $B - A$ son los conjuntos de puntos en las regiones sombreadas de la figura 6(b) y (c), respectivamente.

Figura 6. Diferencia



Fuente: elaboración propia.

Ejemplo:

Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{3,4,5\}$, entonces:

$A - B = \{1,2\}$ y $B - A = \{4,5\}$

Complemento (A' o A^c)

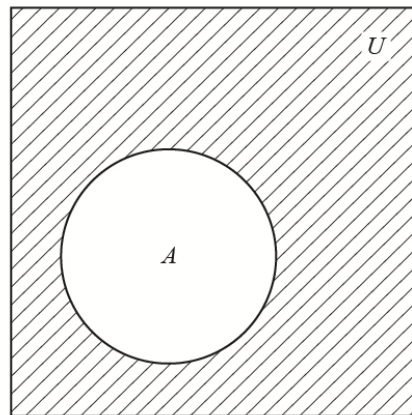
El complemento de un conjunto A es el conjunto de todos los elementos que no están en A , pero sí están en un conjunto universal U (el conjunto que contiene todos los elementos de interés en ese contexto) (Smith, 2000). Se denota como A' o A^c .

Por lo tanto

$$A^c = \{ x \mid x \notin A \}$$

Si A es el conjunto en la figura 7, su complemento es la región sombreada.

Figura 7. *Complemento de un conjunto A*



Fuente: elaboración propia.

Ejemplo:

Si el conjunto universal $U = \{1,2,3,4,5\}$ y $A = \{1,2,3\}$, entonces:

$$A^c = U - A = \{4,5\}$$

Diferencia simétrica

Si A y B son dos conjuntos, su diferencia simétrica se define como el conjunto de todos los elementos que pertenezcan a A o B , pero no a ambos, y se indica por $A \oplus B$ (Bruckner, 2008).

Por lo tanto, $A \oplus B = \{ x \mid (x \in A \text{ y } x \notin B) \text{ o } (x \in B \text{ y } x \notin A) \}$

Ejemplo:

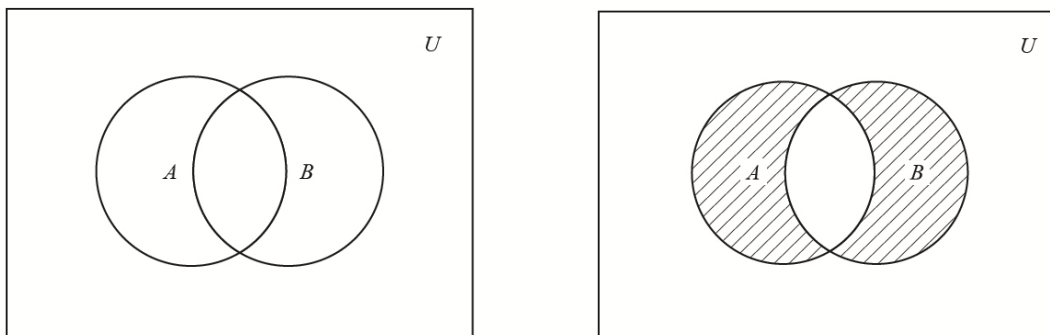
$$A = \{a,b,c,d\} \text{ y } B = \{a,c,e,f,g\}$$

Entonces

$$A \oplus B = \{b,d,e,f,g\}$$

Si A y B son como se indican en la figura 8(a), su diferencia simétrica es la región sombreada en la figura 8(b). Es fácil ver que $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$.

Figura 8a y 8b. Diferencias simétricas



Fuente: elaboración propia.

Propiedades de los conjuntos

Las propiedades de los conjuntos se refieren a reglas que se aplican en las operaciones de unión, intersección y complemento. Estas propiedades facilitan el trabajo con conjuntos en matemáticas y ayudan a simplificar expresiones (Villanueva, 2015). A continuación, describo las propiedades más importantes con ejemplos.

Teorema 1. *Las operaciones con conjuntos antes definidas satisfacen las siguientes propiedades.*

Propiedad conmutativa

Esta propiedad indica que el orden en la unión e intersección de conjuntos no afecta el resultado.

$$\text{Unión: } A \cup B = B \cup A$$

$$\text{Intersección: } A \cap B = B \cap A$$

Ejemplo:

Si $A = \{1,2\}$ y $B = \{2,3\}$, entonces:

$$A \cup B = \{1,2,3\} = B \cup A$$

$$A \cap B = \{2\} = B \cap A$$

Propiedad asociativa

Esta propiedad indica que al unir o intersectar varios conjuntos, el resultado no depende de cómo se agrupen.

$$\text{Unión: } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$\text{Intersección: } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Ejemplo:

Si $A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$, y $C = \{2,3\}$, entonces:

$$(A \cup B) \cup C = \{1,2,3\} = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = \emptyset = A \cap (B \cap C)$$

Propiedad distributiva

Esta propiedad indica cómo se distribuyen las operaciones de unión e intersección entre sí.

$$\text{Unión sobre intersección: } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\text{Intersección sobre unión: } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Ejemplo:

Si $A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$, y $C = \{2,3\}$, entonces:

$$A \cup (B \cap C) = \{1\} \cup \{2\} = \{1,2\} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Propiedad de identidad

Unir un conjunto con el conjunto vacío o intersectarlo con el conjunto universal no cambia el conjunto original.

$$\text{Unión: } A \cup \emptyset = A$$

$$\text{Intersección: } U \cap A = A \text{ (donde } U \text{ es el conjunto universal)}$$

Ejemplo:

Si $A = \{1,2\}$, entonces:

$$A \cup \emptyset = \{1,2\}$$

$$A \cap U = \{1,2\} \text{ (si } U \text{ es el conjunto universal)}$$

Propiedad de complemento

Estas propiedades describen la relación entre un conjunto y su complemento.

$$\text{Ley de complemento: } A \cup A^c = U$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$\text{Ley de doble complemento: } (A^c)^c = A$$

Ejemplo:

Si $A = \{1,2\}$ y $U = \{1,2,3\}$, entonces:

$$A^c = \{3\}$$

$$A \cup A^c = \{1,2,3\}$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

Leyes de idempotencia

Unir o intersectar un conjunto consigo mismo no cambia el conjunto.

$$\text{Unión: } A \cup A = A$$

$$\text{Intersección: } A \cap A = A$$

Ejemplo:

Si $A = \{1,2\}$, entonces:

$$A \cup A = \{1,2\},$$

$$A \cap A = \{1,2\}$$

Leyes de Morgan

Las leyes de Morgan expresan cómo se relacionan la unión e intersección con el complemento.

$$\text{Primera ley: } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$\text{Segunda ley: } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Ejemplo:

Si $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ y $U = \{1,2,3,4\}$, entonces:

$$A \cup B = \{1,2,3\}$$

$$(A \cup B)^c = \{4\}$$

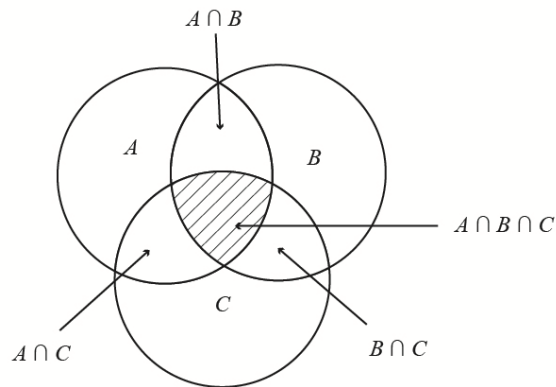
$$A^c = \{3,4\}, B^c = \{1,4\}$$

$$A^c \cap B^c = \{4\}$$

Teorema 2. Si A y B son conjuntos finitos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (Seymour y Lipson, 2007).

Esta situación para tres conjuntos es más complicada, como se muestra en la figura 9. Ahora se expondrá el principio de adición para tres conjuntos.

Figura 9. Intersección de tres conjuntos



Fuente: elaboración propia.

Teorema 3. Sean A , B y C conjuntos finitos . Entonces $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Ejemplo:

Una compañía de computación necesita contratar a 25 programadores para tareas de programación de sistemas y 40 programadores para la programación de computación, de estos empleados, se espera que 10 realicen tareas de dos tipos. ¿Cuántos programadores deberá contratar?

Donde

A = Programadores de sistema

B = Programadores de aplicación

Entonces $|A| = 25$, $|B| = 40$, y $|A \cap B| = 10$. Así pues, el número que debemos emplear es $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 40 - 10 = 55$.

Relaciones entre conjuntos

Una relación entre dos conjuntos es una correspondencia entre los elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto. Se puede representar como un conjunto de pares ordenados (a,b) , donde el primer elemento pertenece al conjunto A y el segundo elemento pertenece al conjunto B (Arroyo, 2018).

Suponga que R es una relación de A a B. Entonces R es un conjunto de pares ordenados donde el primer elemento proviene de A y el segundo proviene de B. Es decir, para cada par $a \in A$ y $b \in B$ es verdadera exactamente una de las siguientes proposiciones:

i) $(a, b) \in R$; entonces se dice “a está relacionado con b”, lo que se escribe como aRb .

ii) $(a, b) \notin R$; entonces se dice “a no está relacionado con b”, lo que se escribe como $a \not R b$. Si R es una relación del conjunto A en sí mismo; es decir, si R es un subconjunto de $A^2 = A \times A$, entonces se dice que R es una relación sobre A.

El dominio de una relación R es el conjunto de todos los primeros elementos de los pares ordenados que pertenecen a R, y el rango es el conjunto de los segundos elementos.

Relación binaria

Describe una relación entre los elementos de dos conjuntos. Formalmente, una relación binaria entre dos conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

Por ejemplo, si tenemos los conjuntos $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b\}$, una relación entre A y B podría ser el conjunto de pares $\{(1,a),(2,b)\}$.

Sean A y B conjuntos. Una relación binaria, o simplemente una relación de A a B, es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ (Seymour y Lipson, 2007). Por ejemplo, si tenemos los conjuntos $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b\}$, una relación entre A y B podría ser el conjunto de pares $\{(1,a),(2,b)\}$.

Formalmente, una relación R en A es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$, es decir: $R \subseteq A \times A$.

Propiedades de las relaciones binarias

Dependiendo de las propiedades que cumpla R, puede clasificarse de diversas maneras:

- Reflexiva: $\forall a \in A, (a,a) \in R$.
- Simétrica: $\forall a,b \in A, (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$.

- Antisimétrica: $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$.
- Transitiva: $\forall a, b, c \in A, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

En el caso especial donde $A = B$ se dice que R es una relación en A .

Relaciones reflexivas

Una relación R sobre un conjunto es reflexiva si aRa para toda $a \in A$; es decir, si $(a, a) \in R$ para toda $a \in A$. Por tanto, R no es reflexiva si existe $a \in A$ tal que $(a, a) \notin R$.

Ejemplo 1:

Considere las cinco relaciones siguientes sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$R1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$$

$$R2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

$$R3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$$

$$R4 = \emptyset, \text{ la relación vacía}$$

$$R5 = A \times A, \text{ la relación universal}$$

Determine cuáles de las relaciones son reflexivas.

Puesto que A contiene los cuatro elementos 1, 2, 3 y 4, una relación sobre A es reflexiva si contiene los cuatro pares $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$ y $(4, 4)$. Así, solo $R2$ y la $R5 = A \times A$ son reflexivas. Observe que $R1, R3$ y $R4$ no son reflexivas porque, por ejemplo, $(2, 2)$ no pertenece a ninguna de ellas (Quesada, 2021).

Relaciones simétricas y antisimétricas

Una relación R sobre un conjunto A es simétrica si siempre que aRb entonces bRa ; es decir, siempre que $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R$. Por tanto, R no es simétrica si existen $a, b \in A$, tales que $(a, b) \in R$ pero $(b, a) \notin R$.

Ejemplo:

a) Determine cuáles de las relaciones son simétricas del ejemplo 1:

$R1$ no es simétrica porque $(1, 2) \in R1$ pero $(2, 1) \notin R1$.

$R3$ no es simétrica porque $(1, 3) \in R3$ pero $(3, 1) \notin R3$.

Las otras relaciones son simétricas.

Observación: las propiedades de ser simétrica y ser antisimétrica no son negaciones entre sí. Por ejemplo, la relación $R = \{(1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$ no es simétrica ni antisimétrica.

Por otra parte, la relación $R^c = \{(1, 1), (2, 2)\}$ es tanto simétrica como antisimétrica (Quesada, 2021).

Relaciones transitivas

Una relación R sobre un conjunto A es transitiva si siempre que aRb y bRc entonces aRc ; es decir, siempre que $(a, b), (b, c) \in R$ entonces $(a, c) \in R$ (Quesada, 2021). Por tanto, R no es transitiva si existe $a, b, c \in R$ tal que $(a, b), (b, c) \in R$ pero $(a, c) \notin R$.

Ejemplo:

a) Determine cuáles de las relaciones en el ejemplo 1 son transitivas.

La relación R_3 no es transitiva porque $(2, 1), (1, 3) \in R_3$ pero $(2, 3) \notin R_3$. Todas las otras relaciones son transitivas.

Cardinalidad de conjuntos

La cardinalidad de un conjunto se refiere a la cantidad de elementos que contiene (Weisstein, 1996). Es una forma de medir el *tamaño* del conjunto, sin importar cuáles son los elementos, sino cuántos hay.

La cardinalidad de un conjunto A se representa como $|A|$ y describe el número de elementos en el conjunto.

Ejemplos:

Si $A = \{1, 2, 3\}$, entonces la cardinalidad de A es $|A|=3$, porque hay tres elementos en el conjunto.

Si $B = \{a, e, i, o, u\}$, entonces $|B|=5$, ya que contiene cinco elementos.

Un conjunto vacío, \emptyset o $\{\}$, tiene una cardinalidad de $|\emptyset|=0$ porque no contiene elementos.

La comparación de cardinalidades permite determinar si dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos (Weisstein, 1996). Algunas posibles comparaciones son las siguientes:

Igualdad de cardinalidad: dos conjuntos A y B tienen la misma cardinalidad si el número de elementos en cada uno es igual. Esto se escribe como $|A|=|B|$.

Ejemplo:

$C = \{1, 2\}$ y $D = \{a, b\}$ tienen la misma cardinalidad porque $|C| = |D| = 2$.

Cardinalidad de un conjunto mayor que otro: Si un conjunto A tiene más elementos que otro conjunto B, entonces decimos que $|A| > |B|$.

Ejemplo:

Si $E = \{1,2,3,4,5\}$ y $F = \{x,y\}$, entonces $|E| > |F|$ porque $|E| = 5$ y $|F| = 2$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos: hay conjuntos infinitos, como el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ o el conjunto de los números reales \mathbb{R} . Aunque ambos conjuntos son infinitos, no todos los infinitos son iguales en tamaño.

Infinitos contables: los conjuntos como los números naturales \mathbb{N} tienen una cardinalidad infinita contable, es decir, se pueden enumerar (cada elemento se puede asociar con un número natural).

Infinitos no contables: el conjunto de los números reales \mathbb{R} , por otro lado, tiene una cardinalidad mayor, ya que no se puede enumerar de la misma manera; es un infinito no contable.

Ejemplos:

Si $G = \{1,3,5\}$ y $H = \{a,b,c\}$, entonces $|G| = |H| = 3$.

Si $L = \{\text{perro, gato}\}$ y $J = \{\text{manzana}\}$, entonces $|L| > |J|$ porque $|L| = 2$ y $|J| = 1$.

Conjuntos especiales

Conjunto vacío

(\emptyset): representa un conjunto sin elementos, denotado como \emptyset . Es el único conjunto que no contiene ningún elemento (Bruckner, 2008).

Conjunto universal

(U): es el conjunto que contiene todos los elementos posibles en un contexto específico. Dependiendo del problema o dominio, U representa el *todo* en el universo de discurso definido (Christensen, 2001).

Propiedades del conjunto vacío y el conjunto universal

1.- Unión con el conjunto vacío:

$A \cup \emptyset = A$: la unión de cualquier conjunto A con el conjunto vacío es A.

Ejemplo:

Si $A = \{1,2,3\}$, entonces $A \cup \emptyset = \{1,2,3\}$.

2.- Intersección con el conjunto vacío:

$A \cap \emptyset = \emptyset$: la intersección de cualquier conjunto A con el conjunto vacío es \emptyset .

Ejemplo:

Si $A = \{1,2,3\}$, entonces $A \cap \emptyset = \emptyset$.

3.- Unión con el conjunto universal:

$A \cup U = U$: la unión de cualquier conjunto A con el conjunto universal es U .

Ejemplo:

Si $U = \{1,2,3,4,5\}$ y $A = \{1,2,3\}$, entonces $A \cup U = \{1,2,3,4,5\} = U$.

4.- Intersección con el conjunto universal:

$A \cap U = A$: la intersección de cualquier conjunto A con el conjunto universal A .

Ejemplo:

Si $A = \{1,2,3\}$ y $U = \{1,2,3,4,5\}$, entonces $A \cap U = \{1,2,3\} = A$.

5.- Complemento del conjunto vacío:

$\emptyset^c = U$: el complemento del conjunto vacío es el conjunto universal, ya que todos los elementos posibles están fuera del conjunto vacío.

Ejemplo:

Si el conjunto universal es $U = \{1,2,3,4,5\}$, entonces el complemento de \emptyset es $U = \{1,2,3,4,5\}$.

6.- Complemento del conjunto universal:

$U^c = \emptyset$: el complemento del conjunto universal es el conjunto vacío, ya que no existen elementos fuera del conjunto universal.

Ejemplo:

Si $U = \{1,2,3,4,5\}$, entonces el complemento de U es $\emptyset = \{\}$.

La relación con otros conjuntos es con las leyes de Morgan, las cuales nos muestran cómo se relacionan el conjunto vacío y el conjunto universal al trabajar con complementos (Arroyo, 2018).

Ejemplos de leyes de Morgan**Primera ley de Morgan:** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Ejemplo:

Si $U = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,2\}$, y $B = \{2,3,4\}$, entonces:

$$A \cup B = \{1,2,3,4\}$$

$$(A \cup B)^c = \{5,6\}$$

$$A^c = \{3,4,5,6\}, B^c = \{1,5,6\}$$

$$A^c \cap B^c = \{5,6\}, \text{ que coincide con } (A \cup B)^c.$$

Segunda ley de Morgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Ejemplo:

Con los mismos conjuntos A y B del ejemplo anterior:

$$A \cap B = \{2\}$$

$$(A \cap B)^c = \{1,3,4,5,6\}$$

$$A^c = \{3,4,5,6\}, B^c = \{1,5,6\}$$

$$A^c \cup B^c = \{1,3,4,5,6\}, \text{ que coincide con } (A \cap B)^c.$$

Las propiedades y relaciones ayudan a simplificar operaciones y establecer relaciones de inclusión entre conjuntos.

Conjuntos iguales y desigualdad de conjuntos**Conjuntos iguales**

Dos conjuntos A y B son iguales si contienen exactamente los mismos elementos. Esto se representa como $A = B$. Para que dos conjuntos sean iguales, cada elemento de A debe estar en B, y cada elemento de B debe estar en A. No importa el orden de los elementos ni cómo estén escritos, siempre que el contenido sea idéntico (Coto, s.f.).

Ejemplo:

Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{3,2,1\}$, entonces $A = B$, ya que ambos contienen los mismos elementos.

Desigualdad de conjuntos

Dos conjuntos son desiguales cuando no contienen exactamente los mismos elementos, es decir, al menos uno de los conjuntos tiene un elemento que no está en el otro. Esto se representa como $A \neq B$ (Coto, s.f.).

Ejemplo:

Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,2,4\}$, entonces $A \neq B$, ya que B contiene el elemento 4, que no está en A, y A contiene el elemento 3, que no está en B.

Igualdad por extensión e igualdad por intensión

Existen dos formas de definir y comparar conjuntos para determinar si son iguales: igualdad por extensión e igualdad por intensión.

Igualdad por extensión

En la igualdad por extensión, se enumeran explícitamente todos los elementos del conjunto. Si dos conjuntos tienen listados exactamente los mismos elementos, son iguales por extensión (Restrepo, 2003).

Ejemplo:

Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,2,3\}$, entonces $A = B$ por extensión, porque ambos conjuntos contienen exactamente los mismos elementos listados.

Igualdad por intensión

En la igualdad por intensión, se describe a los conjuntos mediante una propiedad o condición que define a todos sus elementos, sin listarlos individualmente. Dos conjuntos son iguales por intensión si cumplen la misma condición.

Ejemplo:

Si $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$ y $B = \{1,2,3\}$, entonces $A = B$ por intensión, ya que ambos conjuntos se definen por la misma condición (los números naturales menores que 4).

Conjuntos especiales

Los conjuntos especiales son conjuntos que tienen propiedades o características específicas que los hacen únicos o interesantes en el contexto de las matemáticas (Arroyo, 2018). A continuación veremos algunos ejemplos de conjuntos especiales comunes.

Conjuntos finitos

Un conjunto es finito si tiene un número específico y limitado de elementos.

Ejemplo:

$\{1,2,3,4\}$ es un conjunto finito porque contiene solo cuatro elementos.

Otros ejemplos de conjuntos finitos incluyen el conjunto de los días de la semana, los meses del año, o los números naturales del 1 al 10.

Conjuntos infinitos

Un conjunto es infinito si tiene un número ilimitado de elementos, es decir, no tiene un final.

Ejemplo:

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$ es infinito porque no hay un último número en la secuencia.

Distinción entre conjunto infinito numerable y no numerable

Conjuntos infinitos numerables (o contables):

Son aquellos conjuntos infinitos cuyos elementos se pueden poner en correspondencia uno a uno con los números naturales. Esto significa que, aunque el conjunto es infinito, sus elementos pueden enumerarse (Stillwell, 2010).

Ejemplo:

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$.

El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$.

El conjunto de los números racionales \mathbb{Q} (todos los números que pueden expresarse como una fracción de dos enteros).

Conjuntos infinitos no numerables (o no contables)

Son aquellos conjuntos infinitos cuyos elementos no pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los números naturales. Esto implica que tienen *más* elementos que un conjunto numerable, en un sentido técnico (Stillwell, 2010).

Ejemplo:

El conjunto de los números reales \mathbb{R} , que incluye todos los números racionales e irracionales en la recta numérica.

Un subconjunto notable de los reales es el conjunto de los números irracionales (números que no pueden expresarse como una fracción, como $\sqrt{2}$, π , e).

Conjuntos numerables y no numerables

Conjuntos numerables

Un conjunto es numerable (o contable) si sus elementos se pueden enumerar o poner en correspondencia uno a uno con los números naturales. Es decir, si podemos asignar un número natural único a cada elemento del conjunto, el conjunto es numerable (Stillwell, 2010).

Características:

- Puede ser finito o infinito.
- En el caso de los conjuntos infinitos, los numerables tienen el mismo tamaño que el conjunto de los números naturales, en términos de *cantidad* de elementos.

Ejemplos:

Números naturales (\mathbb{N}): el conjunto de los números naturales es numerable.
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Números enteros (\mathbb{Z}): incluye números positivos, negativos y el cero.
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Es numerable porque se puede organizar en una secuencia que corresponde con los números naturales (por ejemplo, ordenando: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$).

Números racionales (\mathbb{Q}): incluye todos los números que se pueden expresar como fracciones de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

Aunque pueda parecer que hay más números racionales que naturales, es posible enumerarlos de manera que correspondan a los números naturales. Por lo tanto, \mathbb{Q} es numerable.

Conjuntos no numerables

Un conjunto es no numerable (o no contable) si no es posible contar sus elementos ni ponerlos en correspondencia uno a uno con los números naturales. Esto significa que el conjunto tiene *más* elementos que cualquier conjunto numerable.

Características:

- Siempre es infinito.
- Los elementos de un conjunto no numerable no pueden organizarse de manera que cada elemento corresponda a un número natural.

Ejemplos:

Números reales (\mathbb{R}): incluye todos los números en la recta numérica, tanto racionales como irracionales. Existen muchos más números reales que naturales o racionales, y no se pueden enumerar todos en una lista que se corresponda con los números naturales.

Ejemplos de números reales incluyen: $\sqrt{2}$, π , e , así como números racionales como $\frac{1}{2}$.

Números irracionales: estos son los números que no pueden expresarse como fracciones, como $\sqrt{2}$, π , e , y son un subconjunto de los números reales. Los números irracionales son no numerables, ya que no se pueden poner en correspondencia con los números naturales.

Tabla 1. *Conjuntos y su numerabilidad*

Conjunto	Símbolo	Numerable/No Numerable	Ejemplos
Números naturales	\mathbb{N}	Numerable	$\{1,2,3,\dots\}$
Números enteros	\mathbb{Z}	Numerable	$\{\dots,-1,0,1,\dots\}$
Números racionales	\mathbb{Q}	Numerable	$\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 5\}$
Números reales	\mathbb{R}	No numerable	$\{\sqrt{2}, \pi, e\}$
Números irracionales	-	No numerable	$\{\sqrt{3}, \pi\}$

Fuente: elaboración propia con datos de Stilwell (2010).

Conjuntos potencia

Los conjuntos potencia (o conjuntos de partes) son un concepto fundamental en la teoría de conjuntos. Dado un conjunto A , el conjunto potencia de A , denotado como $P(A)$, es el conjunto de todos los subconjuntos posibles de A , incluyendo el conjunto vacío y el propio conjunto A .

Definición formal

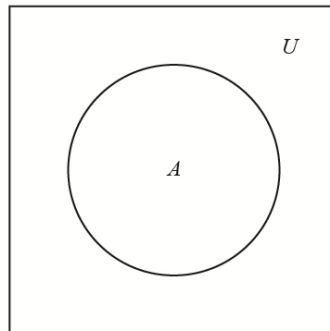
Si A es un conjunto, entonces su conjunto potencia $P(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A . Matemáticamente: $P(A) = \{X : X \subseteq A\}$.

Ejemplo:

Sea $A = \{1,2,3\}$ entonces $P(A)$ se compone de los siguientes subconjuntos de:

$$A = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3\} = A$$

Figura 10. Conjunto A



Fuente: elaboración propia.

Propiedades

- 1.- Cantidad de elementos: si un conjunto A tiene n elementos, su conjunto potencia $P(A)$ tendrá 2^n elementos.
- 2.- Incluye el conjunto vacío: siempre incluye el conjunto vacío (\emptyset) y el propio conjunto A como parte de sus subconjuntos.

Ejemplo

Supongamos que $A = \{1,2\}$. Los subconjuntos posibles de A son:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$$

Por lo tanto, el conjunto potencia $P(A)$ es: $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Ejemplo:

Sea $A = [\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7, 8\}]$.

a) Enumere los elementos de A . El conjunto tiene tres elementos, los conjuntos $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5\}$ y $\{6, 7, 8\}$.

b) Encuentre $n(A)$. $n(A) = 3$.

Aplicaciones de la teoría de conjuntos

En álgebra, los conjuntos desempeñan un rol fundamental como base estructural para definir y entender los conceptos algebraicos. Aquí tienes algunos aspectos clave del rol de los conjuntos en álgebra.

Definición de estructuras algebraicas

Los conjuntos son el marco en el que se construyen las estructuras algebraicas, como grupos, anillos, cuerpos y espacios vectoriales. Estas estructuras son conjuntos equipados con operaciones (como suma o multiplicación) que cumplen ciertas propiedades (Lang, 1976).

Por ejemplo:

Un grupo es un conjunto G con una operación binaria que satisface propiedades como asociatividad, existencia de un elemento neutro y existencia de inversos.

Un cuerpo es un conjunto con dos operaciones (suma y multiplicación) que cumplen reglas adicionales, como la existencia de inversos para la multiplicación (excepto el cero).

Relaciones y funciones

En álgebra, los conjuntos permiten definir relaciones y funciones entre sus elementos, lo que es crucial para establecer conceptos como homomorfismos, isomorfismos y automorfismos. Estas nociones son esenciales para estudiar cómo se comportan y relacionan las estructuras algebraicas entre sí (Artin, 2011).

Propiedades de operaciones

Los conjuntos permiten estudiar las propiedades de las operaciones definidas en ellos, como cerradura, conmutatividad, asociatividad y distributividad. Estas propiedades son fundamentales para caracterizar las operaciones algebraicas y las estructuras asociadas (El Proyecto NROC, s.f.).

Base para álgebra booleana y lógica

El álgebra booleana, que es una rama del álgebra usada en lógica matemática y computación, está profundamente ligada a la teoría de conjuntos. Operaciones como unión, intersección y complemento tienen paralelismos con operaciones lógicas como el “OR”, “AND” y “NOT” (González, s.f.).

La teoría de conjuntos tiene una relación estrecha con la lógica matemática, particularmente en el tratamiento de proposiciones y operaciones lógicas.

Cada proposición lógica puede representarse con un conjunto de condiciones que se cumplen o no.

Por ejemplo, la proposición: “Los números mayores que 3”.

Conjunto asociado: $A = \{x \in \mathbb{N} : x > 3\}$.

Construcción de polinomios y espacios vectoriales

En álgebra, los conjuntos se utilizan para definir elementos como polinomios o vectores (Camino, 2003).

Por ejemplo:

Los polinomios se consideran elementos de un conjunto con operaciones de suma y multiplicación.

Los espacios vectoriales están formados por un conjunto de vectores, que satisfacen axiomas sobre operaciones de suma y multiplicación escalar.

Conjuntos finitos e infinitos

El estudio de conjuntos finitos e infinitos permite explorar propiedades como cardinalidad y bases algebraicas. Esto es esencial, por ejemplo, en la teoría de matrices y determinantes o al analizar si un espacio vectorial tiene dimensión finita o infinita (Fontes, 2020).

Relación entre conjuntos y lógica matemática

Conjuntos como base de la lógica

Los conjuntos permiten representar proposiciones y relaciones lógicas.

Por ejemplo:

Conjuntos universales y subconjuntos: un conjunto universal U puede representar todas las posibilidades, mientras que un subconjunto representa los elementos que cumplen ciertas condiciones lógicas (Arroyo, 2018).

Operaciones entre conjuntos: operaciones como la unión, la intersección y el complemento tienen su equivalente en lógica:

Unión ($A \cup B$) \rightarrow Disyunción (OR): representa el conjunto de elementos que están en A , B o ambos.

Intersección ($A \cap B$) \rightarrow Conjunción (AND): representa el conjunto de elementos que están simultáneamente en A y B .

Complemento (A^c) \rightarrow Negación (NOT): representa los elementos que no están en A .

Relaciones lógicas mediante conjuntos

Los conjuntos ayudan a visualizar conceptos fundamentales de la lógica:

Implicación lógica: si A es subconjunto de B , esto puede interpretarse como $A \Rightarrow B$ (si x pertenece a A , entonces x pertenece a B).

Equivalencia lógica: si $A = B$, entonces ambas proposiciones o conjuntos tienen los mismos elementos, lo cual equivale a una bicondicional ($A \Leftrightarrow B$).

Diagramas de Venn

Los diagramas de Venn son una herramienta gráfica basada en la teoría de conjuntos para representar proposiciones lógicas y sus intersecciones (Arroyo, 2018). Estos diagramas son útiles para:

- Identificar relaciones entre varias proposiciones.
- Representar visualmente la validez de argumentos lógicos.

Conjuntos como interpretación semántica de la lógica

En la lógica matemática, los conjuntos se utilizan para interpretar proposiciones en términos de verdad:

Un conjunto de elementos puede representar todas las interpretaciones para las cuales una proposición es verdadera.

Los modelos lógicos, fundamentales en lógica de primer orden, se construyen usando conjuntos que satisfacen ciertas propiedades (Arroyo, 2018).

Lógica en la teoría de conjuntos

La teoría de conjuntos está formalizada con herramientas de la lógica matemática.

Por ejemplo:

Axiomas de la teoría de conjuntos: Sistemas como los axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF) con el axioma de elección (ZFC) usan lógica para definir las propiedades de los conjuntos (Arroyo, 2018).

Cuantificadores: en lógica, los cuantificadores universales (\forall) y existenciales (\exists) se usan para describir propiedades de conjuntos:

Ejemplo:

$\forall x \in A, P(x)$ significa que $P(x)$ es verdadera para todos los elementos del conjunto A .

$\exists x \in A, P(x)$ significa que existe al menos un elemento en A para el cual $P(x)$ es verdadera.

Aplicaciones prácticas

La combinación de conjuntos y lógica es esencial para:

Sistemas de computación: conjuntos y lógica forman la base del álgebra booleana y los circuitos lógicos digitales.

Demostraciones matemáticas: las proposiciones y argumentos se representan mediante conjuntos y sus relaciones lógicas.

Teoría de modelos: los conjuntos se usan para interpretar estructuras lógicas complejas, como números, grafos o espacios.

Paradojas y limitaciones de la teoría de conjuntos: introducción a las paradojas

La paradoja de Russell

La paradoja de Russell fue formulada por el matemático y filósofo Bertrand Russell en 1901 y es una de las paradojas más conocidas en la teoría de conjuntos (Arroyo, 2018). Se plantea de la siguiente manera:

Supongamos que existe un conjunto R que contiene todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos.

Nos preguntamos: ¿ R se contiene a sí mismo?

Si $R \in R$ (es decir, R se contiene a sí mismo), entonces, por definición, R no debería contenerse a sí mismo.

Si $R \notin R$ (es decir, R no se contiene a sí mismo), entonces, por definición, debería contenerse a sí mismo.

Esto lleva a una contradicción lógica, lo que muestra que la teoría de conjuntos ingenua (que permite definir cualquier conjunto) tiene inconsistencias.

Impacto de la paradoja de Russell

La paradoja de Russell expone que la teoría de conjuntos ingenua no es un sistema consistente para formalizar las matemáticas. Esto motivó a los matemáticos a desarrollar teorías de conjuntos más rigurosas.

Teoría axiomática de conjuntos (ZF/ZFC)

Se introdujo la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), que incluye un conjunto de axiomas para evitar paradojas.

El axioma de separación, por ejemplo, limita la posibilidad de definir conjuntos arbitrarios como RRR en la paradoja de Russell.

Teoría de tipos

Propuesta por Russell como una solución, esta teoría organiza los conjuntos en *tipos* jerárquicos para evitar que un conjunto pueda referirse a sí mismo.

La paradoja de Russell y otras similares llevaron al desarrollo de sistemas más rigurosos para las matemáticas, como la teoría axiomática de conjuntos y la lógica formal. Esto muestra cómo es que las paradojas, aunque inicialmente son problemáticas, han impulsado avances significativos en la comprensión y formalización de las matemáticas (Lipschutz, 1991).

Referencias

- Arroyo, J. R. (2018). *Lógica y teoría de conjuntos*. Universidad de Costa Rica.
- Artin, M. (2011). *Álgebra* (2.^a ed.). Pearson.
- Bruckner, A. (2008). *Análisis real elemental*. Prentice-Hall.
- Camino, R. L. (2003). *Espacios vectoriales*. Universidad de Granada.
- Cantor, G. (2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*. Editorial Crítica.
- Castañeda Campos, C. (s.f.). *Funciones reales de variable real*. Universidad Nacional de Huancavelica.
- Coto, M. N. (s.f.). *Números reales y sucesiones: introducción a la teoría matemática*. Instituto de Matemáticas; Universidad Nacional Autónoma de México.
- Christensen, H. (2001). *Estadística paso a paso*. Trillas.
- El Proyecto NROC. (s.f.). *Matemáticas de desarrollo*.
- Facultad Regional San Francisco. (s.f.). *Funciones*. Universidad Tecnológica Nacional.
- Fontes, F. G. (2020). *Conjuntos finitos y conjuntos infinitos*.
- González Carlomán, A. (s.f.). *Reticulo completo de Boole, lógica matemática, teoría de conjuntos*. Asturias.
- Lang, S. (1976). *Álgebra lineal*. Fondo Educativo Interamericano.
- Lewin, R. (2011). *La teoría de conjuntos y los fundamentos de la matemática*. J. C. Sáez, ed.
- Lipschutz, S. (1991). *Teoría de conjuntos y temas afines*. McGraw-Hill.
- Quesada, E. V. (2021). *Matemática discreta con apoyo de software*. Alpha Editorial.
- Restrepo, G. (2003). *Fundamentos de las matemáticas*. Universidad del Valle.
- Seymour, L., y Lipson, M. (2007). *Matemáticas discretas*. Mc Graw Hill.
- Smith, S. A. (2000). *Álgebra de conjuntos*. Pearson Educación.
- Stillwell, J. C. (2010). *Caminos al infinito: las matemáticas de la verdad y la prueba*. CRC Press.
- Villanueva, E. (2015). *Teoría de conjuntos: introducción axiomática*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Weisstein, E. W. (1996). *The book of numbers*. Springer-Verlag.

