

Capítulo 4. Relaciones y funciones



María Salome de la Rosa Olvera¹

Ma. Lourdes Trejo Calzada²

Rosario Vega Rodríguez³

DOI: <https://doi.org/10.52501/cc.440.04>

Resumen

Las relaciones en matemáticas se establecen entre elementos de uno o dos conjuntos, siendo una relación binaria un subconjunto del producto cartesiano. Estas relaciones poseen propiedades fundamentales, como ser reflexivas, irreflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas y transitivas, las cuales permiten analizarlas y clasificarlas. A partir de estas propiedades surgen tipos importantes, como las relaciones de equivalencia (reflexivas, simétricas y transitivas) y las relaciones de orden (parcial y total), esenciales para estructurar y comparar elementos en distintos contextos matemáticos. Por otra parte, las funciones constituyen un tipo especial de relación en la que a cada elemento del dominio le corresponde un único valor en el codominio. Se clasifican en inyectivas, suprayectivas y biyectivas, según la forma en que se relacionan ambos conjuntos. Además, existen diversos tipos de funciones, como las reales, algebraicas (polinomiales y racionales), trascendentes (trigonométricas, exponenciales y logarítmicas) y especiales (implícitas, inversas, escalonadas e hiperbólicas), cada una con aplicaciones específicas. Las funciones permiten modelar fenómenos en áreas como la física, economía, ingeniería y vida cotidiana, favoreciendo el pensamiento lógico, la abstracción y la toma de decisiones fundamentadas.

¹ Maestra en Administración. Jefa del Laboratorio de Química en Tecnológico Nacional de México. Correo electrónico: salome.ro@itz.edu.mx

² Maestra en Ciencias en Enseñanza de las Ciencias. Docente en Tecnológico Nacional de México. ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-4761-069X>

³ Maestro en Ciencias en Enseñanza de ciencias básicas con especialidad en física. Docente en Tecnológico Nacional de México.

Palabras clave: *relaciones matemáticas, propiedades de las relaciones, funciones.*

Propiedades de relaciones

Las **relaciones** en matemáticas (particularmente en álgebra y teoría de conjuntos) se establecen entre los elementos de un conjunto o entre dos conjuntos. Una **relación binaria** R sobre un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$.

Estas relaciones pueden tener diferentes **propiedades** que permiten clasificarlas y comprender su estructura.

Propiedades principales de las relaciones binarias

Reflexiva

Una relación R sobre A es reflexiva si **todo elemento se relaciona consigo mismo**.

$$\forall a \in A, (a, a) \in R$$

Ejemplo: la relación “ser igual a” en los números reales.

Irreflexiva

Una relación es irreflexiva si **ningún elemento se relaciona consigo mismo**.

$$\forall a \in A, (a, a) \notin R$$

Ejemplo: la relación “ser menor que” en los números reales.

Simétrica

Una relación es simétrica si siempre que un elemento está relacionado con otro, el segundo también lo está con el primero.

$$\forall a, b \in A, (a, b) \in R \implies (b, a) \in R$$

Ejemplo: la relación “ser hermano de”.

Antisimétrica

Una relación es antisimétrica si, cuando dos elementos se relacionan en ambos sentidos, entonces deben ser iguales.

$$\forall a, b \in A, (a, b) \in R \text{ y } (b, a) \in R \implies a = b$$

Ejemplo: la relación “ser menor o igual que” (\leq).

Asimétrica

Una relación es asimétrica si, cuando un elemento se relaciona con otro, el inverso nunca ocurre.

$$\forall a, b \in A, (a, b) \in R \implies (b, a) \notin R$$

Ejemplo: la relación “ser padre de”.

Transitiva

Una relación es transitiva si siempre que un elemento está relacionado con un segundo y el segundo lo está con un tercero, entonces el primero está relacionado con el tercero.

$$\forall a, b, c \in A, (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$$

Ejemplo: la relación “ser mayor que”.

Clasificación de relaciones según propiedades

- **Relación de equivalencia:** cumple **reflexiva, simétrica y transitiva**.
Ejemplo: “tener la misma edad”.
- **Relación de orden parcial:** cumple **reflexiva, antisimétrica y transitiva**.
Ejemplo: “ser menor o igual que”.
- **Relación de orden total:** es un orden parcial en el que todos los elementos son comparables.
Ejemplo: el orden en los números reales con \leq .

Características de las funciones

El concepto de función es uno de los pilares más importantes en la matemática, ya que permite establecer relaciones entre variables y modelar fenómenos de la vida real. De acuerdo con Zill y Wright (2011), una función puede definirse como una regla que asocia a cada elemento de un conjunto de entrada un único elemento de salida. Esta definición sencilla es la base para comprender cómo se aplican las funciones en diversos campos, desde la física y la economía hasta la informática y la biología.

Comprender las funciones no se limita a memorizar fórmulas, sino a analizar cómo se comportan y de qué manera reflejan procesos reales. Así, el estudio de funciones se convierte en una herramienta de pensamiento crítico, modelación y resolución de problemas

(Martínez, 2017). A continuación, se desarrolla un análisis de los principales tipos de funciones, sus características y sus aplicaciones prácticas.

Las funciones se denotan generalmente como $f:A\rightarrow B$, donde A es el dominio y B es el codominio, y para cada $a\in A$ existe un único $b\in B$ tal que $f(a) = b$.

Una función es un tipo especial de relación entre dos conjuntos, donde a cada elemento del conjunto de partida (o dominio) le corresponde exactamente un elemento del conjunto de llegada (o codominio); (Arroyo et al, 2018).

En términos más formales, una función f de un conjunto A a un conjunto B se define como una relación tal que para cada $a\in A$ existe un único $b\in B$ tal que $f(a) = b$. Las funciones se denotan generalmente como $f:A\rightarrow B$, donde A es el dominio y B es el codominio.

Dominio: el conjunto de todos los elementos de partida A .

Codominio: el conjunto B donde llegan los valores de la función.

Rango o imagen: el conjunto de los elementos de B que son imágenes de los elementos de A .

Ejemplo:

Si $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{a,b,c,d\}$, y sea $f = \{(1,a),(2,a),(3,d),(4,c)\}$

Entonces F es una función, ya que ningún elemento de A aparece como primer elemento de dos pares ordenados diferentes por lo que se tiene: $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = d$, $f(4) = c$.

Esta función es una correspondencia en la que a cada elemento del dominio A le corresponde uno y solo un elemento en el codominio B (Castañeda, s.f.). El codominio de f , $\text{Cod}(f) = \{a,d,c\}$. En algunas ocasiones se escribirá el codominio de la función f como $f(A)$. Obsérvese que el dominio $a\in B$ aparece como segundo elemento de dos diferentes pares ordenados en f . Esto no causa conflicto con la definición de una función. Por lo tanto, la función puede tomar el mismo valor en dos elementos diferentes de A .

Tipos de funciones

Funciones por la relación del dominio por el codominio

Las funciones pueden clasificarse según cómo se relacionan los elementos del dominio con los del codominio (Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional San Francisco, s.f). Los tres tipos principales son la inyectiva, la suprayectiva y la biyectiva.

Función inyectiva (inyección)

Una función $f:A\rightarrow B$ es inyectiva si asigna diferentes elementos del dominio a diferentes elementos del codominio. Por tanto, diferentes valores de A dan diferentes valores en B . Es decir, si $f(a1)=f(a2)$ implica que $a1=a2$.

Ejemplo:

La función $f(x) = 2x$ en el conjunto de los números reales \mathbb{R} es inyectiva, ya que diferentes valores de x dan diferentes valores de $f(x)$.

Función suprayectiva (sobreyectiva)

Una función $f:A\rightarrow B$ es suprayectiva si cada elemento del codominio tiene al menos un elemento del dominio que se le asigna. Por lo que todos los valores de B están cubiertos por valores de A . Es decir, para cada $b\in B$ existe al menos un $a\in A$ tal que $f(a) = b$.

Ejemplo:

La función $f(x) = x^2$ en el conjunto de los números reales \mathbb{R} no es suprayectiva sobre \mathbb{R} , ya que no todos los números reales son cuadrados perfectos (por ejemplo, no hay un x real tal que $x^2 = -1$). Sin embargo, si restringimos el codominio a los números reales no negativos, entonces $f(x) = x^2$ sí es suprayectiva en ese conjunto.

Función biyectiva (biyección)

Una función $f:A\rightarrow B$ es biyectiva si es a la vez inyectiva y suprayectiva. En otras palabras, cada elemento de A se asocia con un único y diferente elemento de B , y todos los elementos de B están cubiertos. Por lo que cumple las propiedades de inyectiva y suprayectiva. Las funciones biyectivas también se conocen como correspondencias uno a uno.

Ejemplo:

La función $f(x) = x+1$ en el conjunto de los números enteros \mathbb{Z} es biyectiva, ya que cada entero se asigna a otro único entero, y todos los enteros están representados en el codominio (Villanueva, 2015).

Esta clasificación se debe a la forma en que relacionan los elementos del dominio con el codominio. Una función inyectiva es aquella en la que no existen dos elementos distintos del dominio que tengan la misma imagen. En contraste, una función suprayectiva asegura que cada elemento del codominio tenga al menos un elemento en el dominio que lo relacione. Finalmente, una función biyectiva combina ambas propiedades: es inyectiva y suprayectiva

a la vez, por lo que establece una correspondencia biunívoca entre los dos conjuntos (Zill y Wright, 2011).

Estas distinciones tienen aplicaciones importantes en áreas como la informática, en donde se requiere asegurar que cada dato tenga una correspondencia única dentro de un sistema de codificación. Según López y Hernández (2020), “las funciones biyectivas son esenciales en el diseño de algoritmos criptográficos, pues garantizan que cada mensaje codificado tenga una única interpretación posible” (p. 60).

Asimismo, la comprensión de estas funciones permite entender mejores conceptos como la existencia de funciones inversas, herramienta clave en el álgebra y el cálculo.

Funciones reales de variable real

Una función real de variable real es aquella en la que tanto el dominio como el rango pertenecen al conjunto de los números reales. Esto significa que a cada valor real de la variable independiente x le corresponde un valor real de la variable dependiente y (Zill y Wright, 2011). La representación gráfica de estas funciones en el plano cartesiano facilita la comprensión de su comportamiento.

Por ejemplo, la función lineal $f(x) = mx + b$ describe relaciones proporcionales, como la velocidad constante en un movimiento rectilíneo. De igual forma, las funciones cuadráticas permiten representar trayectorias parabólicas, muy comunes en fenómenos físicos como el lanzamiento de proyectiles (Mora y Castillo, 2018).

Desde la educación, este tipo de funciones es fundamental, pues permite a los estudiantes relacionar de forma concreta los conceptos matemáticos con situaciones reales. En palabras de Perdomo (2020), “la enseñanza de las funciones reales favorece el desarrollo del pensamiento lógico y la abstracción matemática” (p. 92).

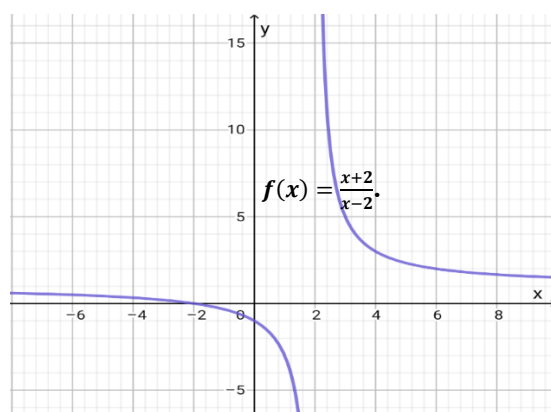
Funciones algebraicas: polinomiales y racionales

Las funciones algebraicas se dividen en **polinomiales** y **racionales**. Las primeras se definen por expresiones en las que la variable aparece elevada a potencias enteras no negativas. Así, funciones lineales, cuadráticas, cúbicas y de mayor grado son ejemplos de polinomiales. Su importancia radica en que modelan fenómenos con gran precisión, desde la trayectoria de un objeto hasta el análisis de poblaciones (Mendoza y Rodríguez, 2019).

Las funciones racionales, en cambio, se expresan como el cociente de dos polinomios. Este tipo de funciones son frecuentes en la física y la química, ya que describen relaciones de proporcionalidad inversa, como la ley de gravitación universal o la intensidad de una reacción química. De acuerdo con Cárdenas (2019), “las funciones racionales permiten estudiar procesos en los que una variable depende inversamente de otra, siendo esenciales en la economía y la administración” (p. 80).

En la educación, estas funciones representan un reto didáctico, pero también una oportunidad para fortalecer la capacidad de abstracción y análisis en los estudiantes.

Gráfica 1. *Ejemplo de una función racional*



Fuente: elaboración propia.

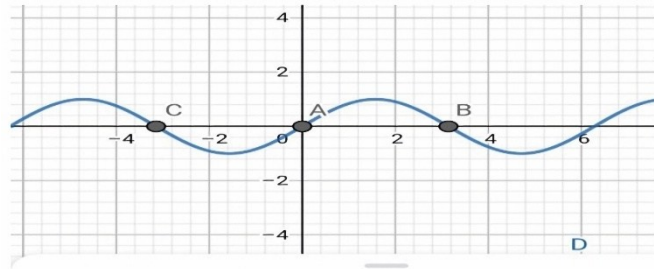
Funciones trascendentes: trigonométricas, exponenciales y logarítmicas

Más allá de las algebraicas, las **funciones trascendentes** incluyen aquellas que no pueden expresarse como polinomios. Dentro de este grupo se encuentran las trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

Funciones trigonométricas

Son esenciales en la geometría, la física y la ingeniería. Permiten describir fenómenos periódicos como las ondas sonoras o la propagación de la luz (Salas y Pineda, 2021). La función seno, por ejemplo, modela el movimiento armónico simple.

Gráfica 2. Función seno



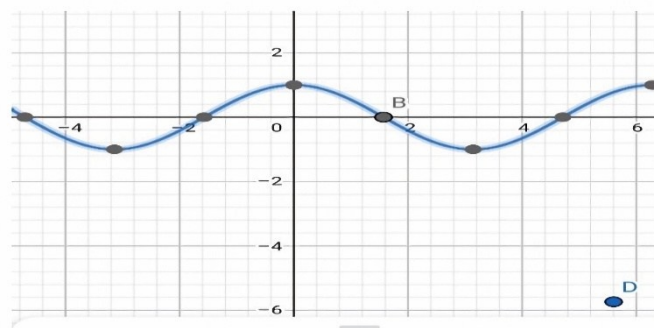
- $f : y = \text{sen}(x)$

- A = Interseca (f, Eje x, (0, 0))
→ (0, 0)

- B = Interseca (f, Eje x, (3.1415926535899, 0))
→ (f, Eje x, (3.1415926535899, 0))

Fuente: elaboración propia.

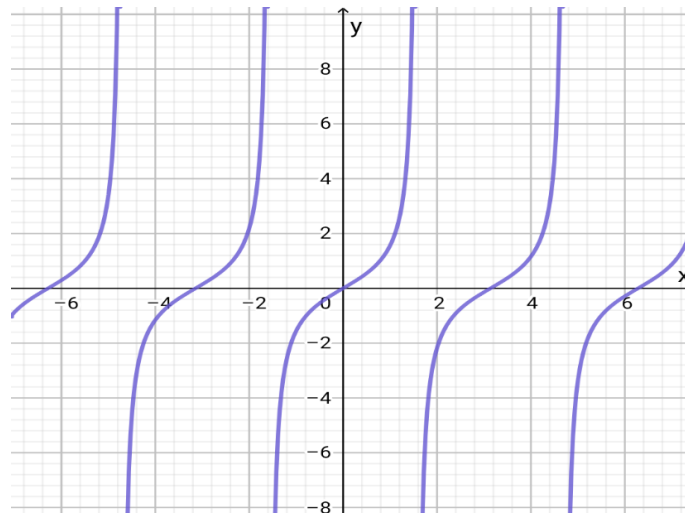
Gráfica 3. Función coseno



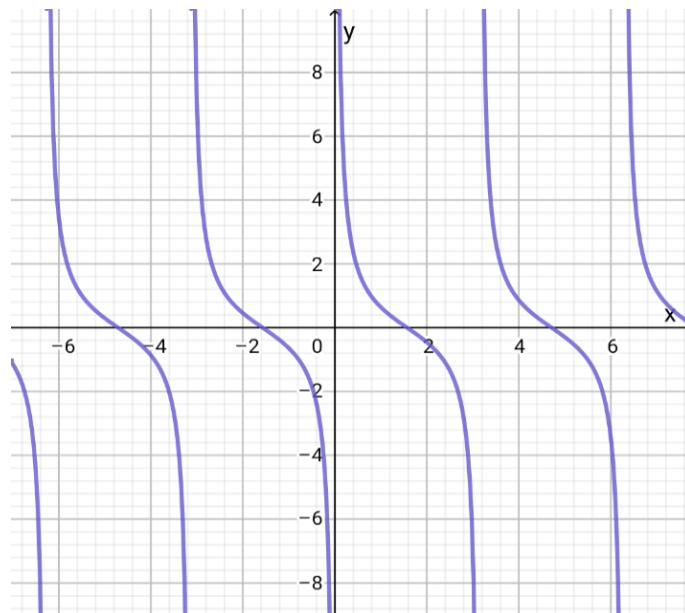
- B = Interseca (f, Eje x, (3.1415926535899, 0))
→ (1.5707963267949, 0)

- C = Interseca (f, Eje x, (-607690684.128837, 0))
→ (-607690684.128837, 0)

Fuente: elaboración propia.

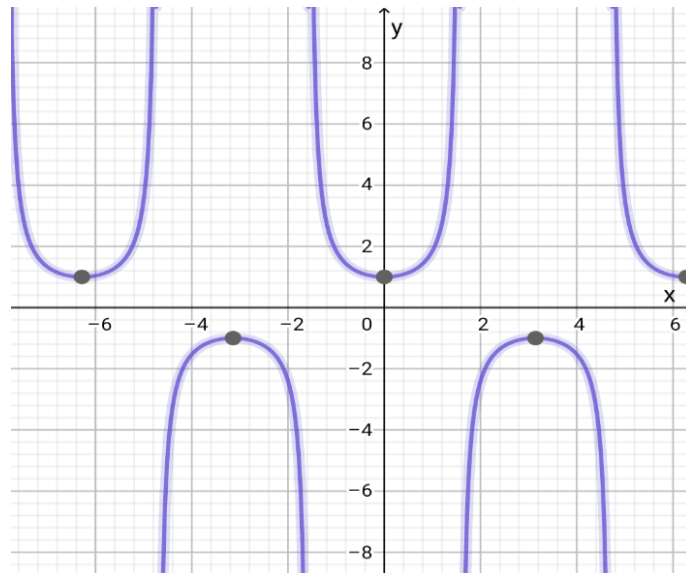
Gráfica 4. *Función tangente*

Fuente: elaboración propia.

Figura 5. *Cotangente*

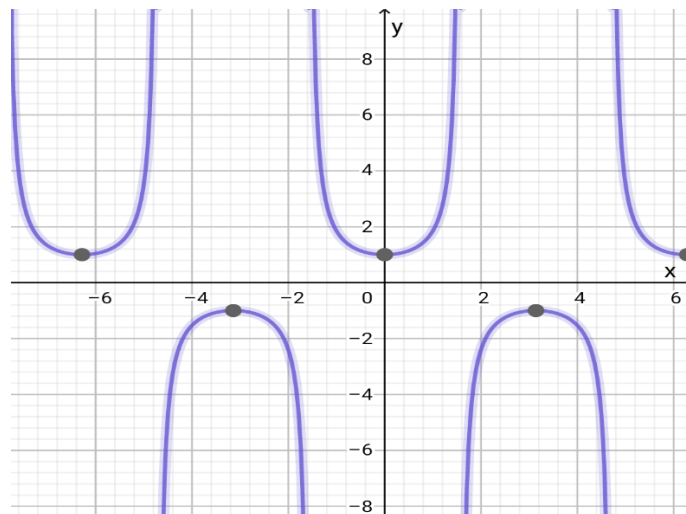
Fuente: elaboración propia.

Gráfica 6. Secante



Fuente: elaboración propia.

Gráfica 7. Cosecante

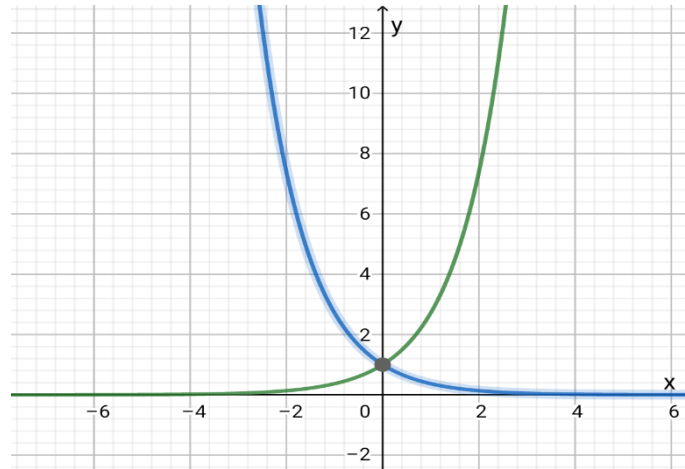


Fuente: elaboración propia.

Funciones exponenciales

Describen fenómenos de crecimiento o decrecimiento acelerado, como la expansión de una población, el interés compuesto en finanzas o la desintegración radiactiva (Martínez, 2017).

Gráfica 8. *Función exponencial*

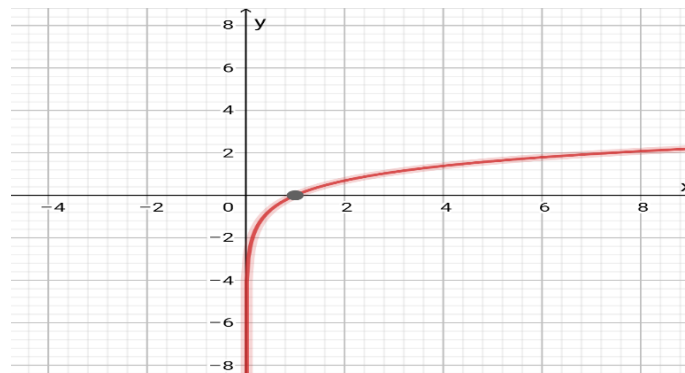


Nota: $f(x) = e^x$ está de color verde y
 $h(x) = e^{-x}$ se encuentra de color azul.
 Fuente: elaboración propia.

Funciones logarítmicas

Son la inversa de las exponenciales y se aplican en la medición de fenómenos que crecen de manera rápida, pero que necesitan ser expresados en escalas más manejables, como la magnitud de los terremotos en la escala de Richter (Mora y Castillo, 2018).

Gráfica 9. *Función logarítmica*



Fuente: elaboración propia.

En conjunto, las funciones trascendentes reflejan la riqueza de las matemáticas para interpretar fenómenos complejos y diversos.

Funciones especiales: escalonadas, implícitas, inversas e hiperbólicas

Además de las funciones clásicas, existen otras con propiedades particulares. Las **funciones escalonadas**, como la de Heaviside, representan sistemas de encendido y apagado, se utilizan ampliamente en la ingeniería eléctrica y en los sistemas de control. Por otro lado, las **funciones implícitas** permiten representar relaciones en las que no es posible despejar una variable de manera directa, como en el caso de las circunferencias o elipses.

Las **funciones implícitas** son aquellas en las que la relación entre las variables **no aparece despejada de manera explícita**, es decir, la variable dependiente y no está aislada en un lado de la ecuación como ocurre con las funciones explícitas.

En lugar de eso, la relación se presenta mediante una **ecuación que involucra a los dos variables** al mismo tiempo.

Ejemplo de función explícita:

Una función explícita tiene la forma: $y = f(x) \Rightarrow y = 2x + 3$

Aquí la variable dependiente y está aislada, y para cada valor de x se obtiene directamente un valor de y .

Ejemplo de función implícita:

Una relación como: $x^2 + y^2 = 25$

representa una circunferencia de radio 5.

- Aquí no aparece despejado y .
- Para obtener y en función de x , tendríamos que manipular la ecuación:

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Esto muestra que la relación original define a y de forma implícita.

Usos de las funciones implícitas:

- En **geometría**, describen curvas como circunferencias, elipses o hipérbolas.
- En **cálculo**, se estudian para derivar expresiones cuando no es posible o no conviene despejar y . De ahí surge la **derivación implícita**.

- En **modelación matemática**, muchas veces los fenómenos no se expresan con una sola variable aislada, sino en relaciones más complejas que requieren esta forma.

Las **funciones inversas** son fundamentales, pues permiten “deshacer” el efecto de una función dada. Por ejemplo, la función logarítmica es la inversa de la exponencial. Finalmente, las **funciones hiperbólicas** tienen aplicaciones en la física relativista y en la teoría de hipérbolas, modelando comportamientos que no pueden explicarse con funciones trigonométricas (Zill y Wright, 2011).

De acuerdo con Ramírez (2021), “la diversidad de funciones matemáticas refleja la diversidad de los fenómenos que buscan modelarse, desde los más simples hasta los más complejos” (p. 50).

Conclusión

El análisis de las funciones matemáticas permite comprender que no son únicamente herramientas abstractas, sino que tienen un fuerte vínculo con la realidad. Desde la representación de trayectorias y el análisis de ondas hasta la predicción de fenómenos económicos, las funciones constituyen un lenguaje universal de las ciencias.

La importancia de este tema, como señalan Zill y Wright (2011), radica en que permite al estudiante y al investigador crear modelos matemáticos que simplifican la realidad sin perder su esencia. Por ello, su estudio es imprescindible en la educación matemática y en la formación científica de cualquier disciplina.

Aplicación de las funciones

Las funciones constituyen un concepto central en las matemáticas y tienen un amplio rango de aplicaciones en distintas disciplinas. En el ámbito de las ciencias naturales, permiten modelar fenómenos físicos como el movimiento, el crecimiento poblacional o la propagación de ondas, donde las relaciones entre variables dependen de expresiones funcionales (Mora y Castillo, 2018).

En la economía y administración, las funciones son fundamentales para representar costos, ingresos, utilidades y tendencias de mercado, lo que facilita la toma de decisiones estratégicas y la predicción de escenarios (Cárdenas, 2019).

En la ingeniería y la tecnología, se aplican en el diseño de estructuras, en la programación de sistemas automatizados y en el análisis de datos experimentales, ya que permiten establecer correspondencias entre variables de entrada y salida (López y Hernández, 2020).

En el campo de la educación, su enseñanza desarrolla competencias en resolución de problemas, abstracción y modelación matemática, habilidades necesarias para comprender fenómenos complejos en la vida cotidiana y en la ciencia (Ramírez, 2021).

Finalmente, en la vida diaria, las funciones se manifiestan en situaciones como el cálculo de intereses bancarios, el consumo de energía, la conversión de divisas o el análisis de gráficos estadísticos que orientan decisiones personales y sociales (Mora y Castillo, 2018).

Referencias

- Arroyo Hernández, J., Ramírez Jiménez, J., y Sequeira Chavarría, F. (2018). *Lógica y teoría de conjuntos*. Editorial Universidad Nacional.
- Cárdenas, J. (2019). Aplicaciones de las funciones matemáticas en economía y gestión empresarial. *Revista de Ciencias Económicas*, 37(2), 77-92.
- Castañeda Campos, C. (s.f.). *Funciones reales de variable real*. Universidad Nacional de Huancavelica.
- Facultad Regional San Francisco. (s.f.). *Funciones*. Universidad Tecnológica Nacional.
- López, G., y Hernández, F. (2020). Funciones matemáticas y su impacto en la ingeniería aplicada. *Revista Mexicana de Ingeniería y Tecnología*, 12(1), 55-70.
- Martínez, J. (2017). *Fundamentos de lógica y matemáticas*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Mendoza, F., y Rodríguez, L. (2019). Aplicaciones de la lógica matemática en la computación. *Revista Colombiana de Matemáticas Aplicadas*, 11(2), 45-58.
- Mora, A., y Castillo, P. (2018). Modelación de fenómenos naturales mediante funciones. *Revista Colombiana de Educación Matemática*, 6(2), 101-118.
- Perdomo, C. (2020). El papel de la lógica matemática en la formación del pensamiento crítico. *Revista Latinoamericana de Educación*, 14(27), 89-104.
- Ramírez, S. (2021). La enseñanza de las funciones como herramienta para el desarrollo del pensamiento matemático. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 15(29), 45-63.

-
- Salas, M., y Pineda, R. (2021). Lógica, modelación y sociedad: aplicaciones contemporáneas. *Revista Iberoamericana de Filosofía y Ciencia*, 8(1), 33-52.
- Villanueva, E. (2015). *Teoría de conjuntos: introducción axiomática*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Universidad Tecnológica Nacional. (s.f.). *Funciones* [Material didáctico]. Universidad Tecnológica Nacional. <https://sanfrancisco.utn.edu.ar/>
- Zill, D. G., y Wright, W. S. (2011). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas* (4.^a ed.). McGraw-Hill.

