Capítulo 6. Álgebra booleana

Pedro Tomas Ortiz y Ojeda[1]
Pedro Alfonso Guadalupe Ortiz Sánchez[2]
Patricia Guadalupe Sánchez Iturbe[3]

DOI: https://doi.org/10.52501/cc.440.06

Resumen

En el campo de los sistemas de control se distinguen dos categorías fundamentales: los servomecanismos y los sistemas de conmutación, cada uno con funciones específicas en el manejo de sistemas dinámicos. Los servomecanismos son dispositivos que integran un motor, sensores y un sistema de control con retroalimentación, permitiendo posicionar con precisión un actuador. Su funcionamiento se modela mediante ecuaciones diferenciales, lo que posibilita analizar y predecir su comportamiento ante distintas condiciones. Por otro lado, los sistemas de conmutación se enfocan en establecer y mantener conexiones entre dispositivos, basándose en principios de lógica formal para gestionar estados de encendido y apagado, esenciales para la comunicación y coordinación entre componentes. Estos sistemas operan con señales binarias, es decir, valores discretos representados como 0 y 1, lo que da origen a los circuitos lógicos. Este enfoque se fundamenta en el álgebra booleana, desarrollada por George Boole, quien estableció que los procesos lógicos pueden representarse matemáticamente mediante variables binarias. Posteriormente, Claude Shannon aplicó estos principios al diseño de circuitos digitales, consolidando su relevancia en la informática y la electrónica. El álgebra booleana se basa en funciones lógicas elementales como AND (Y), OR (O) y NOT (NO), que permiten modelar condiciones y decisiones. Asimismo, incluye postulados, teoremas y propiedades que facilitan la simplificación de expresiones lógicas. Herramientas como

---

[1] Doctor en Matemática Educativa. Docente en Tecnológico Nacional de México. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3796-8504 ; correo electrónico: ptoyomx@yahoo.com
[2] Doctor en Administración. Docente en el Tecnológico Nacional de México. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2466-1837
[3] Doctora en Ciencias y Biotecnología de Plantas. Docente en Tecnológico Nacional de México. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9245-3725

las tablas de verdad permiten verificar resultados al analizar todas las combinaciones posibles de variables. En conjunto, estos elementos constituyen la base del diseño y análisis de sistemas digitales y de control.

Palabras clave: *álgebra booleana, propiedades del álgebra booleana, funciones lógicas.*

Fundamentos y propiedades

En el ámbito de los sistemas de control, se identifican esencialmente dos categorías fundamentales que cumplen funciones específicas en el control de sistemas dinámicos. La primera categoría se refiere a la teoría de los servomecanismos. Un servomecanismo es un dispositivo que integra un motor, un sistema de control y un sensor de retroalimentación, cuya función es posicionar con precisión un eje o actuador. Este tipo de sistema se basa en una relación matemática descrita a través de ecuaciones diferenciales, las cuales modelan la dinámica del sistema y permiten predecir su comportamiento y respuesta ante diferentes condiciones de entrada.

La segunda categoría se enfoca en los sistemas de conmutación, cuyo propósito es establecer y mantener interconexiones efectivas entre dispositivos. A diferencia de los servomecanismos, los sistemas de conmutación dependen de las leyes de la lógica y del razonamiento lógico, que permiten gestionar los estados de conexión y desconexión entre distintos elementos del sistema, facilitando así la comunicación y coordinación entre ellos. La implementación de estos sistemas requiere un análisis estructurado de los principios de la lógica formal para asegurar la integridad y continuidad en el flujo de información y control entre los dispositivos interconectados.

En conjunto, estas dos categorías abordan aspectos complementarios en el control de sistemas, contribuyendo tanto a la precisión en la acción de control como a la eficiencia en la comunicación y coordinación entre dispositivos autónomos o interdependientes. En los sistemas de conmutación las informaciones o señales de entrada y salida varían de modo discontinuo o, al menos, así se pueden considerarse. Cada una toma dos valores distintos, entonces los dispositivos y señales se les conoce como binarios. Debido a su principio de funcionamiento los circuitos que forman parte de este sistema, reciben el nombre de circuitos lógicos pues su funcionamiento es muy similar a el raciocinio de la lógica filosófica (Barceló, 2012; Jasso y Rivlin, 2023).

Esta lógica se conoce como álgebra proposicional o álgebra booleana, en honor a George Boole (1815-1864), filósofo y matemático inglés que dio un fuerte impulso a las leyes del razonamiento lógico. Sus obras fundamentales, tituladas *Un análisis matemático de la lógica* e *Investigación de las leyes del pensamiento*, establecen que mediante leyes matemáticas los procesos lógicos del pensamiento, relacionados con la verdad o la falsedad, son expresados en proposiciones o enunciados, y pueden considerarse como variables binarias (Boole, 2023; Enciclopedia Herder, 2023).

Un siglo después, Claude E. Shannon desarrolló las bases para la teoría del diseño de circuitos digitales mediante la relación lógica numérica de los circuitos electrónicos con el álgebra booleana (Enciclopedia Herder, 2023).

Con el uso de funciones elementales y una serie de fórmulas fue posible desarrollar un álgebra en la que se aplican solamente dos valores posibles: verdad o falsedad, a las que se les llama variables binarias, y que en los procesos conmutativos tienen una importancia capital, pues un contacto puede estar abierto o cerrado, una bobina puede estar alimentada o sin tensión, o un dispositivo electrónico pueda conducir energía o no, en fin, existen una gran cantidad de elementos en dos estados posibles.

Se puede considerar que el estado de cada uno de elementos mencionados es una variable binaria en la que se puede asignar un valor de 1 a un contacto cerrado y 0 a un contacto abierto. Así la expresión del contacto si está cerrado será considerado como $A = 1$, y si está abierto entonces $A = 0$.

Para desarrollar un lenguaje básico en el álgebra booleana es necesario considerar tres funciones clásicas, llamadas funciones lógicas elementales.

La función "Y"

Esta función implica la satisfacción de dos o más condiciones para lograr un resultado final, como símbolo se pueden usar un punto, paréntesis o el signo ×, que indica producto o simplemente AB. Si consideramos las variables A y B con sus respectivos valores tenemos:

A	B	A·B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

La función "O"

Se considera que indica dos o más alternativas para lograr un mismo resultado, se representa por el signo +, que corresponde a la suma. Tomando los valores las variables A y B los valores de 0 y 1 tenemos:

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

La función "NO"

Es la llamada función complemento, se considera como la negación de los dos estados posibles. Así, para los valores de 0 y 1 tenemos:

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0

En el álgebra de Boole, la negación de una variable o función lógica recibe el nombre de **complemento** y se representa mediante una barra horizontal sobre la variable. Por ejemplo, el complemento de Ase expresa como $\bar{A}$. Esta operación lógica indica el valor opuesto de la variable original: si $A = 1$, entonces $\bar{A} = 0$; y si $A = 0$, entonces $\bar{A} = 1$.

El complemento también puede aplicarse a expresiones booleanas completas mediante las leyes de De Morgan. En términos generales, el complemento de una suma lógica $(+)$ se transforma en un producto lógico $(\cdot)$, mientras que el complemento de un producto lógico se transforma en una suma lógica. Asimismo, el complemento de 1 es 0 y el complemento de 0 es 1. Otra propiedad importante es la **ley de involución**, la cual establece que el complemento del complemento de una variable devuelve la variable original:

$$\bar{\bar{x}} = x$$

Por ejemplo, el complemento de la expresión:

$$1 \cdot A + \bar{B}C + 0$$

se obtiene aplicando las leyes de complemento y las leyes de De Morgan, dando como resultado:

$$(0 + \bar{A})(B + \bar{C}) \cdot 1$$

El álgebra de Boole constituye una herramienta fundamental en la lógica matemática y en el diseño de sistemas digitales, ya que permite representar y simplificar funciones lógicas utilizadas en circuitos electrónicos y sistemas computacionales (Riofrio y Rodríguez, 2023).

Generalizando, se considera que la presencia de algo recibe el valor de 1 y su ausencia recibe 0, así se pueden establecer los siguientes postulados del álgebra booleana (Barceló, 2012; Lifeder, 2023):

a) $1 \cdot 1 = 1$	a') $0 + 0 = 0$
b) $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$	b') $0 + 1 = 1 + 0 = 1$
c) $0 \cdot 0 = 0$	c') $1 + 1 = 1$
d) $\bar{1} = 0$	d') $\bar{0} = 1$
e) $\bar{\bar{1}} = 1$	e') $\bar{\bar{0}} = 0$

Con el uso de estos postulados se pueden desarrollar teoremas que simplifican las expresiones.

Se llama el dual de una expresión booleana al proceso de obtención del complemento, en el que no se complementan las variables y es utilizado como una herramienta matemática para ampliar ciertos teoremas y para efectuar simplificaciones. De manera que si se tiene una función que sea igual a uno, el hecho de obtener el dual de la función no implica que dicha función sea cero, como en el caso del complemento, si no que puede ser igual a uno a cero. Así, por ejemplo, el dual de $1 \cdot A + \bar{B}C + 0$ sería $(0+A)\ (\bar{B}+C) \cdot 1$

Teoremas y sus duales

1.a) $0\cdot X = 0$	1.b) $1 + X = 1$
2.a) $1\cdot X = X$	2.b) $0 + X = X$
3.a) $X\cdot X = X$	3.b) $X + X = X$
4.a) $X\cdot \bar{X} = 0$	4.b) $X + \bar{X} = 1$
5.a) $XY = YX$	5.b) $X + Y = Y + X$
6.a) $X\cdot Y\cdot Z = X\cdot(Y\cdot Z) = (X\cdot Y)\, Z$	6.b) $X + Y + Z = X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
7.a) $\overline{x\cdot y\cdot z} = \bar{X} + \bar{Y} + \cdots + \bar{Z}$	7.b) $\overline{x + y + \cdots + z} = \bar{X}\,\bar{Y}\cdot\bar{Z}$
8 $\overline{\bar{F}(X, Y, \cdots, Z,, +,)} = F(\bar{X},\bar{Y},\cdots,\bar{z}, ,+,\cdot)$	8. $F(X,Y) = X + Y$
9.a) $XY + XZ = X\,(Y + Z)$	9.b) $(X + Y)\,(X + Z) = X + YZ$
10.a) $XY+X\bar{Y} = X$	10.b) $(X + Y)(X +\bar{Y}) = X$
11.a) $X+XY = X$	11.b) $X(X + Y) = X$
12.a) $X+\bar{X}Y = X+Y$	12.b) $X\,(\bar{X} + Y) = XY$
13.a) $XY + \bar{X}Z + YZ = XY + \bar{X}Z$	3.b) $(X + Y)(\bar{X} + Z\,)(Y + Z) = (X + Y)\,(\bar{X} + Z)$
14.a) $XY + \bar{X}Z = (X + Z)\,(\bar{X} + Y)$	14b) $(X + Y)(\bar{X} + Z) = XZ + \bar{X}Y$

Para demostrar un teorema o comprobar una igualdad se deben probar todas las posibilidades de los estados de las variables, esto es lo que se llama una *tabla de verdad*, es un esquema en el cual se enlistan sistemáticamente los valores de las variables independientes y los subsecuentes valores de las variables dependientes, en donde las posibles combinaciones de un sistema binario son 2^n donde n es el número de variables independientes.

Ejemplos.

1. Realice la tabla de verdad del teorema 2a.

Solución

Puesto que se tiene una variable tenemos $2^1 = 2$ el número de renglones o filas será de dos.

X	$1\cdot X = X$
1	$1\cdot 1=1$
0	$1\cdot 0=0$

2. Use la tabla de verdad para comprobar $A + AB + A\overline{C} = A$

   Solución

   Puesto que se tiene una variable tenemos $2^3 = 8$ el número de renglones o filas será de ocho.

A	B	C	AB	$\overline{C}$	$A\overline{C}$	$A+AB+A\overline{C}$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1

3. Aplique los teoremas 7a (teorema de de Morgan) a la expresión: $\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{Z}} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{Z}$

   Sea: A = B = C = Z = 1, entonces: $\overline{\overline{1}\cdot\overline{1}\cdot\overline{1}\cdot 1} = \overline{1} + \overline{1} + \overline{1} + \overline{1}$

   $\overline{1} = 0 + 0 + 0 + 0$

   $0 = 0$

4. Simplifique: (A + B) (A + C)

   Solución:

   AA + AC + BA + BC

   Del teorema 3a: AA = A

   A + AC + BA + BC A(1 + C + B) + BC

   Del teorema 1b:

   (1 + C + B) = 1

   A (1) +BC = A + BC

Formas canónicas

Una expresión como: $(A + \bar{B} + C + D)\,(A + B + \bar{C} + D)$ está formada por dos términos y cada término contiene todas las variables, entonces se puede decir que una forma canónica es aquella que está compuesta por una suma o multiplicación de dos o más términos, los cuales contienen varias literales, en donde los términos están formados por todas las variables, complementadas o sin complementar. También la expresión: $A\bar{B}CD\bar{E} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D}E + \bar{A}B\bar{C}DE$ es canónica.

Minitérminos

Cuando se tiene una expresión canónica cualquiera y se desea expresar como una suma de productos, entonces a cada uno de los términos se le llama *minitérminos*, si una función no esta en forma canónica, al pasarla como una expresión en forma de minitérminos se aplica el teorema 10a invertido. Así, si X puede indicar una o más variables y Y solo una variable entonces:

$$X = X(Y + \bar{Y}) = XY + X\bar{Y}$$

Donde: $X = A\bar{B}C$ y $Y = D$

$$A\bar{B}C = A\bar{B}C(D + \bar{D}) = A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D}$$

Maxitérminos

Se considera *maxitérminos* a una expresión canónica que está formada por producto de sumas, es decir:

$$X = (X + Y)\,(Y + \bar{Y})$$

Donde: $X = A + \bar{B} + \bar{C}$ y $Y = D$

$$A + \bar{B} + \bar{C} = (A + \bar{B} + \bar{C} + D)\,(A + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D})$$

Simplificación de funciones booleanas

Existen básicamente los siguientes métodos básicos de simplificación:

1.- Método de simplificación algebraico, que se realiza aplicando las leyes y los teoremas del álgebra de Boole.

2.- Métodos tabulares y gráficos.

A) Mapa de Karnaugh. Es aplicable para funciones de dos a cinco variables.

B) Tablas de Quine-Mc Cluskey. Es aplicable para funciones de cinco o más variables.

Mapa de Karnaugh

Este método, conocido también como el método de mapas, matrices lógicas, es un método gráfico para simplificar y representar a las expresiones booleanas partiendo del reconocimiento usual de los implicantes o connotantes primos.

Se considera que el método requiere que las expresiones booleanas se encuentren en forma canónica, se desarrollan cuadros o casillas a cada uno de los minitérminos, es decir a cada una de las posibles combinaciones. Para el caso de una expresión de dos variables es necesario $2^2 = 4$ casillas, de manera que cada minitérmino tendrá solo un cuadro, que se ocupará un determinado lugar en el arreglo de los cuatro cuadros o casillas (González, 2016).

Ejemplo:

1. Construya el mapa que representa la siguiente función: F = A + $\bar{A}$B + $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

AB

		00	01	11	10
C	0			1	1
	1			1	1

= A

AB

		00	01	11	10
C	0	1			
	1				

= $\bar{A}$B

AB

		00	01	11	10
C	0	1			
	1				

= $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

AB

		00	01	11	10
C	0	1	1	1	1
	1		1	1	1

= A + $\bar{A}$ B + $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

2. Construya el mapa que representa la siguiente función: F = $\bar{x}\bar{y}$ + $\bar{z}$ + x$\bar{y}$z

XY

		00	01	11	10
Z	0	1	1	1	1
	1	1		1	1

3. Obtenga la forma canónica en función de minitérminos de la siguiente expresión: F = $\overline{A}\overline{B} + \overline{C}$

AB

C		00	01	11	10
	0	1			
	1	1			

$= \overline{A}\overline{B}$

C		00	01	11	10
	0	1	1	1	1
	1				

$= \overline{C}$

AB

C		00	01	11	10
	0	1	1	1	1
	1	1			

$= \overline{A}\overline{B} + \overline{C}$

De la lectura de la tabla por fila: F = 000 + 010 + 110 + 100 + 001 entonces:

F = $\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$

4. Obtenga la forma canónica por dos métodos de: F = $A + \overline{A}\overline{B}C + B\overline{C}$

Primer método

F = $A(B + \overline{B})(C + \overline{C}) + \overline{A}\overline{B}C + (A + \overline{A})\, B\overline{C}$

F = $(AB + A\overline{B})(C + \overline{C}) + \overline{A}\overline{B}C + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$

F = $ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$

Eliminando: $AB\overline{C}$

La forma canónica es F = $ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C}$

Segundo método. Usando los mapas:

AB

C	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1		1	1

De la lectura de la tabla anterior:

F = ABC + AB$\bar{C}$ + A$\bar{B}$C + $A\bar{B}\bar{C}$ + $\bar{A}\bar{B}C$ + $\bar{A}B\bar{C}$

Simplificación de funciones

Como se dijo líneas arriba, los mapas de Karnaugh se utilizan para simplificar ecuaciones booleanas.

Ejemplos

1. Simplifique la siguiente expresión: F = $\bar{A}$B + AB

   Primer método:

   F = B($\bar{A}$ + A) pero: $\bar{A}$ + A = 1

   Así: F = B

   Segundo método:

A

	0	1	0
B			
1	1	1	

Los términos de los unos adyacentes, ya sea en forma horizontal o vertical, de manera que sea constante o común a los dos valores contiguos, será el resultado de la reducción: F = B, término de la variable que permanece constante.

2. A partir del mapa, halla la función que le corresponda.

a.-

B \ A	0	1
0		
1	1	1

F = B

b.-

B \ A	0	1
0		1
1		1

F = A

c.-

B \ A	0	1
0	1	
1	1	

F = $\overline{A}$

d.-

B \ A	0	1
0	1	1
1		

F = $\overline{B}$

3. Reduzca: F = $\bar{A}\,\overline{B}\overline{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1		1
1	1			

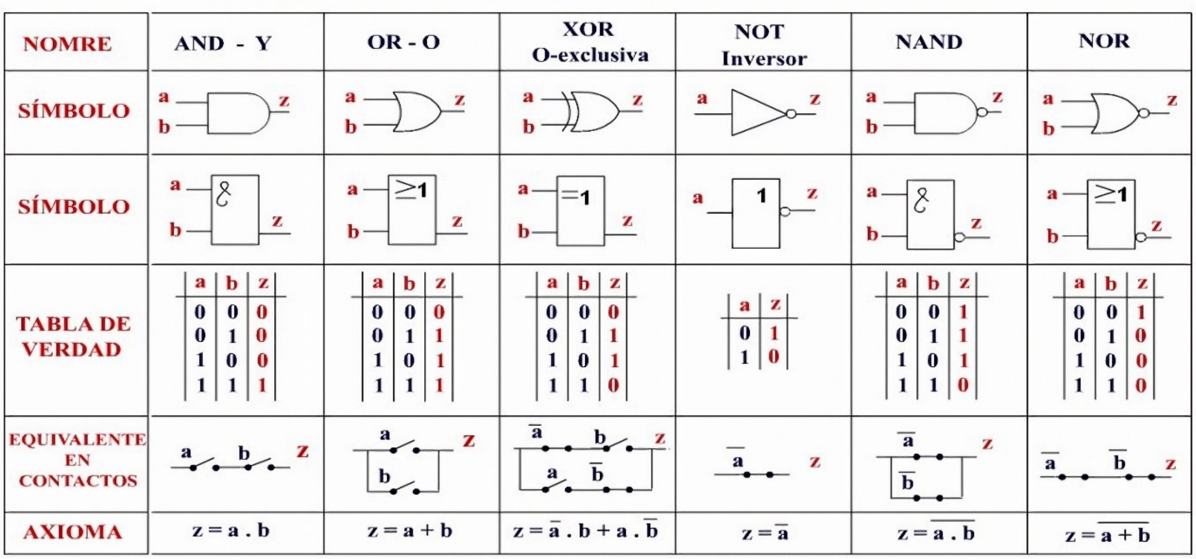
F=$A\ B + AC + BC$

Nota: en este ejemplo se observa que los cuadros externos de un mapa, que son adyacentes, pueden visualizarse formando un cilindro imaginario con el mapa, con respecto a un eje vertical, o, en su caso, teniendo un eje horizontal.

Aplicaciones en circuitos lógicos

Estas compuertas, también conocidas como operadores lógicos, son pequeños circuitos digitales integrados cuyo funcionamiento está de acuerdo con el algebra de Boole en sus operaciones y postulados, las cuales se muestran en la figura 1 (Blogspot, s.f.; Morris, 2013; Morris et al., 2015).

Figura 1. *Funciones lógicas básicas*



NOMRE	AND - Y	OR - O	XOR O-exclusiva	NOT Inversor	NAND	NOR
SÍMBOLO	a b z	a b z	a b z	a z	a b z	a b z
SÍMBOLO	a b & z	a b ≥1 z	a b =1 z	a 1 z	a b & z	a b ≥1 z
TABLA DE VERDAD	a b z: 0 0 0; 0 1 0; 1 0 0; 1 1 1	a b z: 0 0 0; 0 1 1; 1 0 1; 1 1 1	a b z: 0 0 0; 0 1 1; 1 0 1; 1 1 0	a z: 0 1; 1 0	a b z: 0 0 1; 0 1 1; 1 0 1; 1 1 0	a b z: 0 0 1; 0 1 0; 1 0 0; 1 1 0
EQUIVALENTE EN CONTACTOS	a b z	a b z	$\bar{a}$ b a $\bar{b}$ z	$\bar{a}$ z	$\bar{a}$ $\bar{b}$ z	$\bar{a}$ $\bar{b}$ z
AXIOMA	z = a . b	z = a + b	z = $\bar{a}$. b + a . $\bar{b}$	z = $\bar{a}$	z = $\overline{a . b}$	z = $\overline{a + b}$

Referencias

Barceló, A. (2012). *Introducción a la lógica intencional lógica temporal proposicional*. Instituto de Investigaciones Filosóficas.

Blogspot. (s.f.). *Diagrama de puertas lógicas* [Imagen]. Blogspot https://4.bp.blogspot.com/_HEr2cc0A3Y/VSyACzDZiYI/AAAAAAAABKc/kiR9eIiLt5Q/s1600/puertas-logicas.png

Boole, G. (2023). *El análisis matemático de la lógica* (2.ª ed.). Lincoln Press.

Enciclopedia Herder. (2023). *George Boole*. https://encyclopaedia.herdereditorial.com.

González, R. (2016). *Circuitos lógicos*. Moodle CCH Azcapotzalco.

Jasso Méndez, J., y Rivlin, L. (2023). Argumentación humana eficaz y lógica para el siglo XXI. Andamios. *Revista de Investigación Social, 20*(53), 203-221.

Lifeder. (2023, 24 de agosto). *Álgebra booleana: qué es, historia, teoremas, postulados, ejemplos*. Lifeder. https://www.lifeder.com

Morris, M. (2013). *Diseño digital*. Prentice Hall/Pearson.

Morris, M., Kime, C., y Martin, T. (2015). *Logic and computer design fundamentals*. Prentice Hall College.

Riofrio Sarmiento, E. S., y Rodríguez Cabrera, N. L. (2023). Recurso tecnológico para la enseñanza del álgebra Booleana en compuertas lógicas: una propuesta didáctica. *Revista Uniandes Episteme, 10*(2), 249–260. https://doi.org/10.61154/rue.v10i2.2906