

## Capítulo 7. Teoría de grafos



Jorge Oliver Bautista Acosta<sup>1</sup>

Carlos Antonio Martínez Cardona<sup>2</sup>

DOI: <https://doi.org/10.52501/cc.440.07>

### Resumen

Un grafo es una estructura matemática que permite representar relaciones entre distintos elementos mediante vértices (nodos) y aristas (conexiones). Los vértices simbolizan entidades como personas, ciudades o dispositivos, mientras que las aristas representan los vínculos entre ellos, como rutas, comunicación o relaciones sociales. Las aristas pueden ser dirigidas o no dirigidas, tener peso o no, incluso pueden formar lazos o múltiples conexiones. Asimismo, los vértices poseen propiedades como el grado, que indica cuántas conexiones tienen, y pueden clasificarse como adyacentes, aislados o terminales. Dentro de los grafos también se estudian los caminos, que son secuencias de vértices conectados; los ciclos, que inician y terminan en el mismo punto; y la accesibilidad entre nodos, lo cual permite analizar la conectividad de la red. Los grafos pueden clasificarse según sus características en diversos tipos, como grafos simples, dirigidos, ponderados, completos, bipartitos o conexos, entre otros, lo que permite modelar diferentes situaciones reales. Para su estudio y aplicación, existen varias formas de representación, como conjuntos, matrices de adyacencia, matrices de incidencia y listas de adyacencia, cada una con ventajas en términos de almacenamiento y eficiencia en el análisis. Estas estructuras son fundamentales en múltiples aplicaciones prácticas, como redes de transporte, sistemas eléctricos, bases de datos y redes digitales, donde facilitan la organización, análisis y optimización de conexiones complejas. En síntesis, los grafos constituyen una herramienta esencial para comprender y modelar sistemas interconectados en diversos ámbitos científicos y tecnológicos.

---

<sup>1</sup> Maestro en Administración con especialidad en Comercio Internacional. Docente en Tecnológico Nacional de México. Correo electrónico: [oliver.ba@itz.edu.mx](mailto:oliver.ba@itz.edu.mx)

<sup>2</sup> Maestro en Administración. Docente en el Tecnológico Nacional de México.

**Palabras clave:** grafos, elementos de los grafos, tipos de grafos.

## Conceptos básicos y representaciones

### Definición

Un grafo es una representación gráfica de conexiones o relaciones entre objetos, entidades, cosas, etcétera.

## Elementos, características y componentes de los grafos

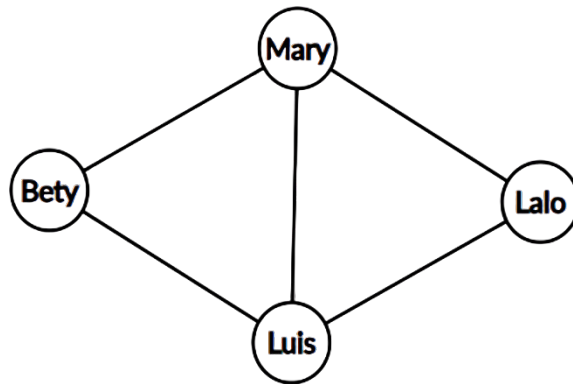
### Elementos de un grafo

Básicamente un grafo puede estar formado por dos elementos o componentes:

1. Vértices o nodos: son los puntos que representan los elementos de una relación. Por ejemplo: personas, ciudades, teléfonos, etc.
2. Aristas o enlaces: son las líneas que conectan a los vértices y representan la relación que hay entre dos o más vértices. Por ejemplo: carreteras entre dos ciudades, amistad entre dos personas, etc.

En la figura 1 se muestra un grafo donde los vértices so: Bety, Mary, Luis y Lalo, mientras que las aristas pueden ser relaciones de amistad. Por ejemplo, se observa que hay relación de amistad entre Bety y Mary, ya que hay una arista (línea) entre ellos dos, pero no hay relación de amistad entre Bety y Lalo, ya que no hay ninguna arista (línea) entre ambos.

**Figura 1.** Grafo entre personas



Fuente: elaboración propia.

### Consideraciones sobre las aristas

Si la arista carece de dirección se denota indistintamente  $\{a, b\}$  o  $\{b, a\}$ , donde  $a$  y  $b$  son los vértices que une.

Si  $\{a, b\}$  representa una arista, a los vértices  $a$  y  $b$  se les llama sus extremos.

Aristas adyacentes: se dice que dos aristas son adyacentes si convergen en el mismo vértice.

Por ejemplo, en la figura 2 las aristas  $(Zac, SLP)$  y  $(Ags, SLP)$  son aristas adyacentes.

Aristas paralelas: se dice que dos aristas son paralelas cuando están asociadas al mismo par de vértices.

Por ejemplo, en la figura 2, las aristas  $(Zac, SLP)$  y  $(SLP, Zac)$  son aristas paralelas.

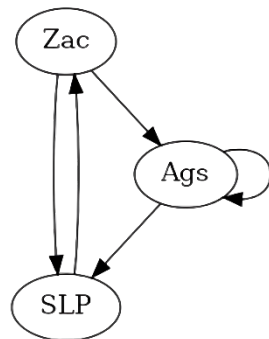
Aristas cíclicas: también llamada lazo. Es una arista que sale y entra en un mismo vértice.

Por ejemplo, en la figura 2 el vértice  $Ags$  tiene una arista que sale y entra en sí mismo, por lo tanto, esa arista es un lazo.

Cruce: son dos aristas que se cruzan en un punto.

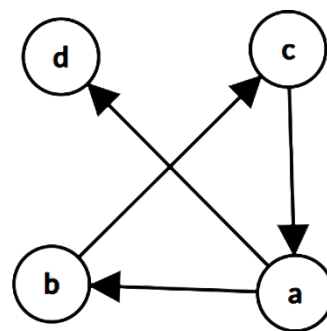
Por ejemplo, en la figura 3 las aristas  $(a, d)$  y  $(b, c)$  son aristas que se cruzan.

**Figura 2.** Tipos de aristas



Fuente: elaboración propia.

**Figura 3.** Cruce de vértices



Fuente: elaboración propia.

### Consideraciones sobre los vértices

Se llama grado de un vértice al número de aristas de las que es extremo. Además, se dice que un vértice es *par* o *impar* según lo es su grado.

Vértices adyacentes: si tenemos un par de vértices de un grafo (a, b) y si tenemos una arista que los une, entonces a y b son vértices adyacentes y se dice que “a” es el vértice inicial y “b” el vértice adyacente.

Por ejemplo, en la figura 4 Ags y SLP son vértices adyacentes y se dice que Ags es el vértice inicial y SLP el vértice adyacente.

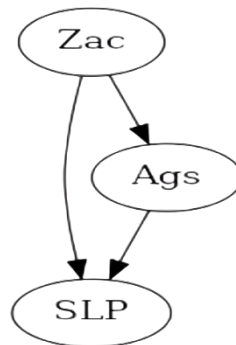
Vértice aislado: es un vértice de grado cero, es decir, un vértice que no es punto final de ninguna arista.

Por ejemplo, en la figura 4 Zac es un vértice de grado cero.

Vértice terminal: es un vértice de grado 1, es decir, que solo esta conectado a una arista.

Por ejemplo, en la figura 4, Ags es un vértice terminal.

**Figura 4.** Tipos de vértices



Fuente: elaboración propia.

### **Caminos**

Sean  $x, y \in V$ , se dice que hay un camino en  $G$  de  $x$  a  $y$  si existe una sucesión finita no vacía de aristas  $\{x, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_n, y\}$ . En este caso  $x$  e  $y$  se llaman los extremos del camino. El número de aristas del camino se llama la longitud del camino.

Por ejemplo, en la figura 5, en el camino (a, b, c, d) la longitud es 3.

Si los vértices no se repiten en el camino se dice que es un camino simple o propio.

Por ejemplo, en la figura 5, en el camino (a, b, c) los vértices no se repiten.

Si hay un camino no simple entre dos vértices, también habrá un camino simple entre ellos.

Por ejemplo, en la figura 5, un camino simple del vértice “a” al vértice “b” sería (a, b) pero se puede también tener el camino no simple (a, b, c, d, b).

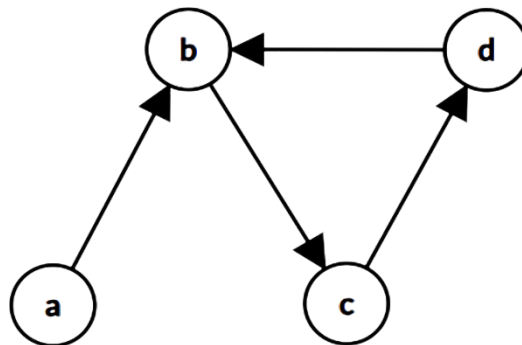
Se llama ciclo, circuito o camino cerrado a un camino simple, que comienza y termina en el mismo vértice.

Por ejemplo, en la figura 5 el camino (c, d, b, c) es un ciclo.

Un vértice “a” se dice accesible desde el vértice “b” si existe un camino entre ellos. Todo vértice es accesible respecto a sí mismo.

Por ejemplo, en la figura 5 los vértices b, c y d son accesibles desde el vértice “a”, pero el vértice “a” no es accesible desde algún vértice. Otra forma de decirlo es que hay caminos de “a” a los vértices b, c, d, pero no existe ningún camino de los vértices b, c, d, al vértice “a”.

**Figura 5. Caminos**



Fuente: elaboración propia.

### **Características de los grafos**

Puede haber uno o más vértices; por ejemplo en la figura 5 se tienen 4 vértices.

Puede que el grafo no tenga aristas (con lo cual no hay relación entre vértices). Por ejemplo, en la figura 2 se aprecia que no hay arista (relación) entre Pedro y Paty.

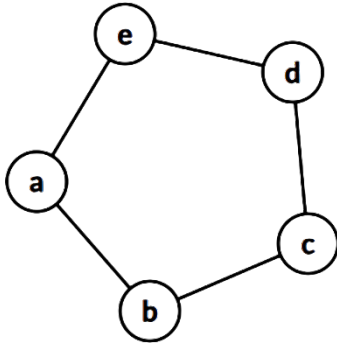
**Figura 6. Grafo sin aristas**



Fuente: elaboración propia.

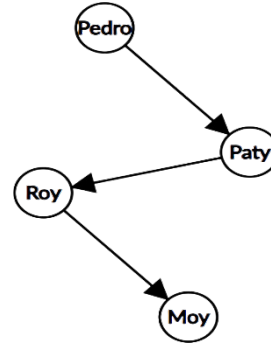
Las aristas pueden ser bidireccionales (como en la figura 7) o direccionales (como en la figura 8), donde solo van en un sentido.

**Figura 7. Grafo bidireccional**



Fuente: elaboración propia.

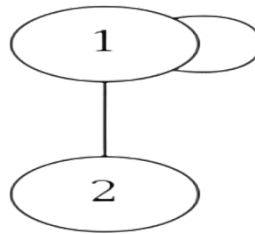
**Figura 8. Grafo dirigido**



Fuente: elaboración propia.

Puede haber aristas que salen y entran al mismo vértice, a las cuales se les llama lazo; por ejemplo, en la figura 9 el vértice 1 tiene un lazo.

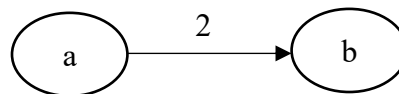
**Figura 9. Grafo con lazo**



Fuente: elaboración propia.

Las aristas pueden tener peso (valor), a lo cual se le llama grafo ponderado; por ejemplo la figura 10 tiene una arista con peso 2.

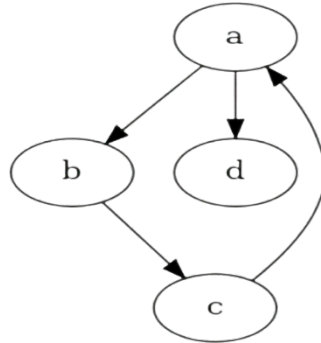
**Figura 10. Arista con peso**



Fuente: elaboración propia.

La forma de las aristas no es relevante (pueden ser líneas rectas o curvas), en la figura 11 se tienen ambos tipos de líneas.

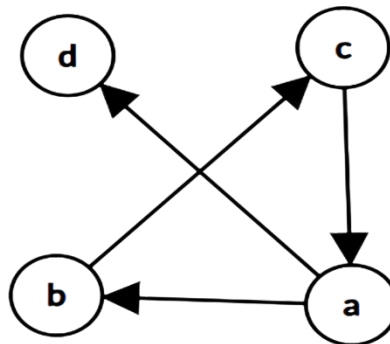
**Figura 11.** *Aristas rectas y curvas*



Fuente: elaboración propia.

La posición de los vértices no es relevante; por ejemplo, las imágenes 11 y 12 muestran el mismo grafo, pero acomodando los vértices y aristas en diferente posición.

**Figura 12.** *Grafo con cuatro vértices*



Fuente: elaboración propia.

### **Tipos de grafos**

Más que tipos de grafos, se dan clasificaciones de grafos, de acuerdo con ciertas condiciones que cumplen; algunas de estas características no son mutuamente excluyentes, por el contrario, un grafo puede presentar varias de ellas.

***Grafo simple***

Es un grafo donde existe una única arista entre cualquier par de vértices, no hay lazos, las aristas no están dirigidas. Por ejemplo, véase los grafos de la figura 1 y 7.

***Grafo no dirigido***

Es un grafo donde las aristas entre cada par de vértices no tienen dirección (la relación va en ambos sentidos). Por ejemplo, los grafos de las figuras 1, 7 y 9. Son usados cuando la relación entre vértices es bidireccional como una carretera entre dos ciudades.

***Grafo dirigido***

Es un grafo donde las aristas entre cada par de vértices tienen dirección (como una flecha que va del vértice A hacia el vértice B). Por ejemplo, véase los grafos de las figuras 2, 3, 4, 5, 8, 10, 11 y 12.

***Grafo no ponderado***

Es un grafo donde no existe ningún valor representado en las aristas. Por ejemplo, véase los grafos de las figuras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 y 12.

***Grafo ponderado***

Es un grafo donde las aristas tienen un *peso* o valor, que puede representar distancia, tiempo, costo, etc. Por ejemplo, véase el grafo de la figura 10.

***Multígrafo***

Es un grafo que puede tener múltiples aristas entre el mismo par de vértices y puede tener bucles. Por ejemplo, véase el grafo de la figura 2. Aplicación: un sistema de transporte con varias rutas entre dos estaciones.

***Pseudografo***

Es un grafo que permite tanto múltiples aristas como bucles.

***Subgrafo***

Es un grafo cuyos vértices y aristas son subconjuntos de otro grafo.

***Grafo conexo***

Un grafo no dirigido es conexo si existe un camino entre cualquier par de vértices. Por ejemplo, véase los grafos de las figuras 1, 2, 7 y 9.

***Grafo completo***

Cada vértice está conectado con todos los demás vértices. Tiene exactamente  $[n(n-1)]/2$  aristas, donde  $n$  es el número de vértices del grafo. Por ejemplo, véase el grafo de la figura 13.

***Grafo bipartito***

Sus vértices pueden dividirse en dos conjuntos disjuntos, de forma que todas las aristas conectan un vértice de un conjunto con uno del otro. Si, además, todos los vértices de un conjunto están conectados con todos los del otro, se llama bipartito completo. Ejemplo: relaciones entre estudiantes y los cursos que toman.

***Grafo plano***

Un grafo plano es aquel que puede dibujarse en el plano sin que ninguna arista se interseque.

***Grafo regular***

Es un grafo donde todos los vértices tienen el mismo grado.

***Grafo nulo***

Es un grafo donde los vértices no están conectados, esto es, no hay aristas.

***Grafo isomorfo***

Dos grafos son isomorfos cuando existe una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre sus vértices, de tal forma que dos de estos quedan unidos por una arista en común.

## Representación de los grafos

### Conjuntos

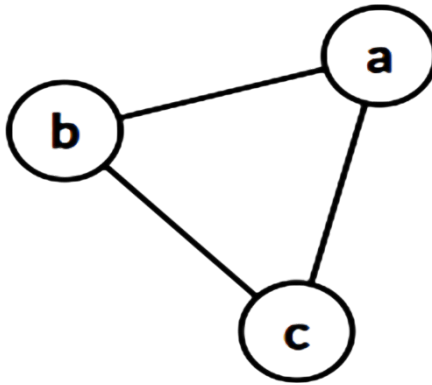
Un grafo (G) se define como un conjunto de vértices (V) no vacío y un conjunto de aristas (A), donde  $G = \{V, A\}$ .

En este capítulo, el conjunto de aristas A se escribirán como pares ordenados, donde  $v_1$  y  $v_2 \in V$  y  $(v_1, v_2) \in A$ .

Ejemplos:

- a) Se tiene el grafo no dirigido.

**Figura 13.** Grafo no dirigido



Fuente: elaboración propia.

La representación en forma de conjuntos del grafo de la figura 13 sería la siguiente:

El conjunto de vértices (V) que forman al grafo.

$$V = \{a, b, c\}$$

El conjunto de pares ordenados (A) que forman las aristas representadas con enlace doble.

$$A = \{(a,b)(b,a)(a,c)(c,a)(b,c)(c,b)\}$$

El conjunto de pares ordenados (A) que forman las aristas representadas con enlace simple.

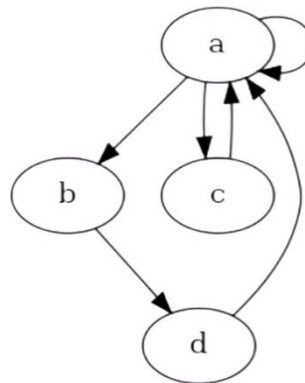
$$A = \{(a,b)(a,c)(b,c)\}$$

La diferencia de la representación con enlace doble y enlace sencillo es que en un grafo no dirigido las aristas son bidireccionales, entonces en enlace doble se ponen dos pares

ordenados para cada arista. Mientras tanto, en el enlace sencillo solo se pone un par ordenado y se sobreentiende que va hacia cualquier sentido.

- b) Se tiene el grafo dirigido.

**Figura 14.** Grafo dirigido



Fuente: elaboración propia.

La representación en forma de conjuntos del grafo de la figura 13 sería la siguiente:

El conjunto de vértices (V) que forman al grafo.

$$V = \{a, b, c, d\}$$

El conjunto de pares ordenados (A) que forman las aristas del grafo.

$$A = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,d)(c,a)(d,a)\}$$

### Matrices

#### Matriz de adyacencia

Sea  $G = (V,E)$ , con  $V \neq \emptyset$ , se llama matriz de adyacencia de G a la matriz  $n \times n$ ,  $A = (a_{ij})$ , donde

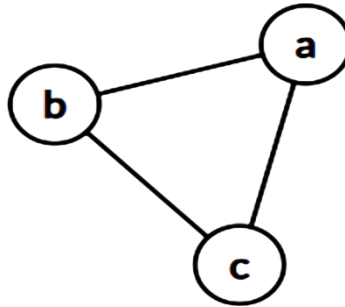
$$a_{ij} = 1 \text{ si } (v_i, v_j) \in E \text{ y } a_{ij} = 0 \text{ si } (v_i, v_j) \notin E$$

Ejemplos:

- a) Para el grafo de la figura 13, la matriz de adyacencia es la siguiente:

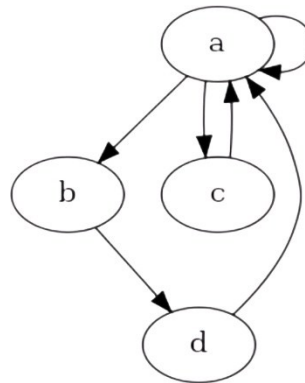
	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	0	0	1
c	1	0	0	0
d	1	0	0	0

Para un grafo no dirigido, su matriz de adyacencia siempre es simétrica.



	a	b	c
a	0	1	1
b	1	0	1
c	1	1	0

Para el grafo de la figura 14, su matriz de adyacencia es la siguiente:



**Matriz de incidencia**

Sea G un grafo de n vértices, la matriz de incidencia A del grafo G, es una matriz

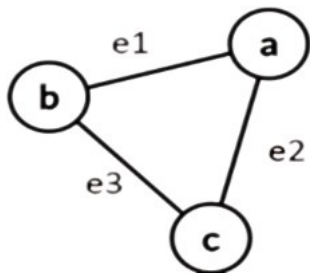
$A = a_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ , que cumple:

- Las columnas de la matriz representan las aristas del grafo.
- Las filas representan a los distintos vértices.
- Por cada vértice ( $v_i$ ) unido por una arista ( $a_{ij}$ ), se tiene que:

$a_{ij} = 1$ , si  $v_i$  es adyacente a  $e_j$  y  $a_{ij} = 0$ , si  $v_i$  no es adyacente a  $e_j$ .

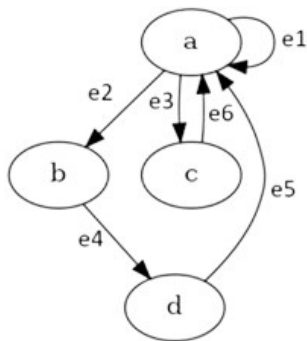
Además, si  $a_{ij}$  es entrada de  $v_i$  entonces  $a_{ij} = -1$

a) Para el grafo de la figura 13, su matriz de incidencia es la siguiente:



	e1	e2	e3
a	1	1	0
b	1	0	1
c	0	1	1

b) Para el grafo de la figura 14, su matriz de incidencia es la siguiente:



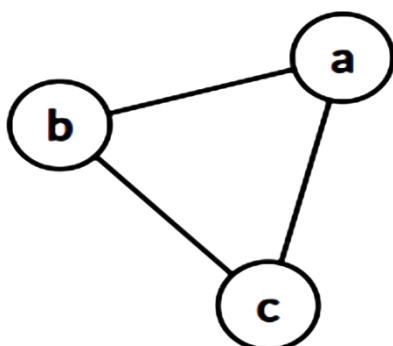
	e1	e2	e3	e4	e5	e6
a	2	1	1	0	-1	-1
b	0	-1	0	1	0	0
c	0	0	-1	0	0	1
d	0	0	0	1	1	0

### Listas

#### *Lista de adyacencia*

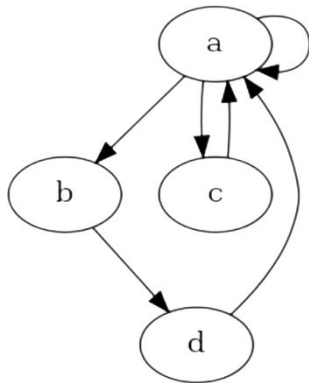
Cada vértice tiene una lista de vértices, los cuales son adyacentes a él. Esto causa redundancia en un grafo no dirigido (ya que A existe en la lista de adyacencia de B y viceversa), pero las búsquedas son más rápidas.

a) Para el grafo de la figura 13, su lista de adyacencia es la siguiente:



Nodo	Adyacentes
a	b, c
b	a, c
c	a, b

b) Para el grafo de la figura 14, su lista de adyacencia es la siguiente:



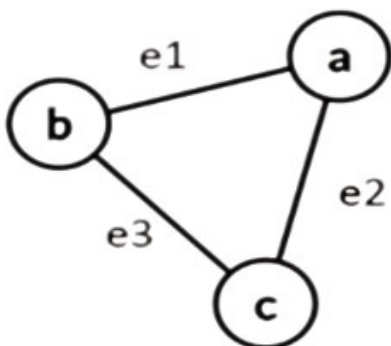
Nodo	Adyacentes
a	a, b, c
b	d
c	a
d	a

**Lista de incidencia**

Las aristas se representan con un vector de pares (ordenados, si el grafo es dirigido), donde cada par representa una de las aristas. Las listas de incidencia son útiles para:

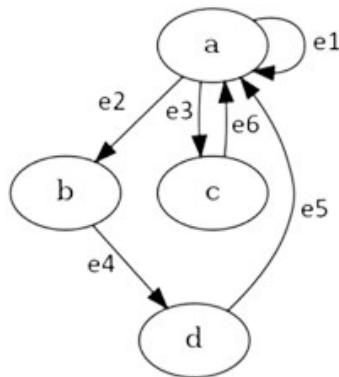
- Representar grafos de manera compacta.
- Realizar algoritmos en grafos, como búsqueda de caminos.
- Implementar estructuras de datos para grafos en *software*.

a) Para el grafo de la figura 13, su lista de incidencia es la siguiente:



Arista	Pares de incidencia
e1	(a,b)
e2	(a,c)
e3	(b,c)

b) Para el grafo de la figura 14, su lista de incidencia es la siguiente:



Arista	Pares de incidencia
e1	(a,a)
e2	(a,b)
e3	(a,c)
e4	(b,d)
e5	(d,a)
e6	(c,a)

**Tabla 1.** Comparación entre algunas de las diferentes representaciones de grafos

Representación	Espacio	Búsqueda de adyacentes	Ver si hay conexión
Lista de adyacencia	$O(V + E)$	Rápido	Lento (hay que buscar en la lista)
Matriz de adyacencia	$O(V^2)$	Lento (recorrer la fila)	Rápido (acceso directo)
Matriz de incidencia	$O(V \times E)$	Poca usada	Poca usada

### Aplicaciones de los grafos

- Red de carreteras, donde los nodos son las ciudades y las aristas son las conexiones entre ellas.
- Red eléctrica.
- Red de drenaje de una ciudad.
- Red de páginas de Wikipedia.
- Circuitos eléctricos.
- Cronogramas de proyectos.
- Rutas más cortas.
- Análisis de relaciones sociales .
- Modelado de páginas web y enlaces en internet .
- Representación de redes con direccionalidad, como interacciones en redes sociales.
- Organización de estructuras de datos como árboles y listas enlazadas.
- Resolución de problemas en algoritmos.

## Referencias

- Balderas, J. (2014, 26 de noviembre). *Matemáticas discretas: relaciones y grafos*. Blogspot. <https://matematicasdiscretas8.blogspot.com/2014/11/elementos-y-caracteristicas-de-los.html>
- Callejas, A., Cosme, A., y Serrano, A. (s.f.). *Elementos y Características de los Grafos*. Instituto Tecnológico de Querétaro. <https://trabajoenequipoitq.wixsite.com/maticas-discreta/61--elementos-y-caracteristicas>
- CS Academy. (s.f.). *Editor de gráficos*. CS Academy. [https://csacademy.com/app/graph\\_editor/](https://csacademy.com/app/graph_editor/)
- Khairulin, M. (s.f.). *Draw graph*. GitHub. <https://mxwell.github.io/draw-graph/?q=>
- Mostaccio, C., y Pérez, G. (s.f.). *Grafo Ponderado*. Grafos [http://163.10.22.82/OAS/estructuras\\_de\\_grafos/grafos\\_ponderado.html](http://163.10.22.82/OAS/estructuras_de_grafos/grafos_grafos_ponderado.html)
- Perfil, V. (2017, 28 de noviembre). Elementos, características y componentes de los grafos. Matemáticas Discretas. <https://tcsjmdiscretas.blogspot.com/2017/11/elementos-caracteristicas-y-componentes.html>
- Teoría de grafos. (2025, 17 de marzo.). En *Wikipedia*. [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Teor%C3%ADa\\_de\\_grafos&oldid=166169478](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Teor%C3%ADa_de_grafos&oldid=166169478)
- Universitat Politècnica de València. (2011, 21 de septiembre). *Representación de grafos. Matriz de adyacencia | 3/25 | UPV* [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=cNAkUZaiDo4>