Capítulo 9. Principios de conteo y combinatoria

Alfredo García Castañon[1]
José Antonio Reyes Rodríguez[2]
María del Rosario Gámez Aguilar[3]

DOI: https://doi.org/10.52501/cc.440.09

Resumen

Los principios fundamentales de conteo constituyen reglas básicas de la combinatoria que permiten determinar el número de formas en que pueden ocurrir ciertos eventos sin necesidad de enumerarlos. Entre ellos destacan el principio aditivo, que se aplica cuando las opciones son mutuamente excluyentes y se suman las posibilidades, y el principio multiplicativo, que se utiliza cuando un proceso ocurre en etapas sucesivas, multiplicando las opciones de cada paso. Asimismo, el principio de inclusión-exclusión amplía el conteo cuando existen intersecciones entre conjuntos, evitando duplicidades. Estos principios son esenciales para el estudio de técnicas más avanzadas como las permutaciones y combinaciones. Las permutaciones corresponden a los arreglos u ordenamientos de elementos donde el orden sí importa, mientras que las combinaciones se refieren a selecciones en las que el orden no es relevante. Ambas se calculan mediante fórmulas basadas en el factorial y tienen aplicaciones en diversas áreas como la probabilidad, la estadística y la informática. Además, existen variantes como las permutaciones con repetición, que ajustan el conteo cuando hay elementos iguales. El principio de inclusión-exclusión también se aplica a múltiples conjuntos, sumando los elementos individuales, restando intersecciones dobles y agregando las triples, lo que permite un conteo preciso. En conjunto, estos conceptos tienen amplias aplicaciones en campos como la ingeniería, la biología, la economía y la informática, especialmente en problemas de

[1] Maestro en Informática Administrativa. Docente en Tecnológico Nacional de México. ORCID: https://orcid.org/0009-0001-3656-8293 ; correo electrónico: alfredo.garcia@itz.edu.mx
[2] Licenciado en Informática. Docente en Tecnológico Nacional de México.
[3] Ingeniero en Materiales. Docente en Tecnológico Nacional de México.

optimización, análisis de datos y toma de decisiones. Su estudio fortalece el razonamiento lógico y la capacidad para resolver problemas complejos.

Palabras clave: *principios de conteo, permutaciones, principio de inclusión-exclusión.*

Principios fundamentales de conteo

Los **principios fundamentales de conteo** son reglas básicas de la **combinatoria** que permiten calcular el número de formas en que pueden ocurrir ciertos eventos, sin necesidad de enumerar cada posibilidad una por una. Se utilizan en situaciones de conteo y probabilidad, y constituyen la base para técnicas más avanzadas como permutaciones y combinaciones.

Principio aditivo (o de la suma)

Si un proceso puede realizarse de **dos maneras mutuamente excluyentes** (no pueden ocurrir al mismo tiempo), entonces el número total de maneras de realizarlo es la **suma** de ambas posibilidades.

Ejemplo:

En una heladería puedes elegir entre 3 tipos de paletas o 4 tipos de nieves. Como no puedes elegir ambas a la vez, hay:

$3 + 4 = 7$ posibilidades.

Principio multiplicativo (o de la multiplicación)

Si un proceso se compone de **dos pasos sucesivos** y el primero puede hacerse de m formas y el segundo de n formas, entonces el número total de formas de realizar ambos pasos es la **multiplicación**: $m \times n$.

Ejemplo:

Para vestirte, tienes 4 camisas y 3 pantalones. Cada camisa se puede combinar con cada pantalón, entonces hay:

$4 \times 3 = 12$ formas de vestirte.

Principio de inclusión-exclusión (extensión del aditivo)

Cuando las opciones **no son mutuamente excluyentes** (pueden coincidir), se debe restar la intersección.

Ejemplo:

Si en una fiesta hay 20 personas que saben inglés, 15 que saben francés y 5 que saben ambos idiomas, el total de personas que saben al menos un idioma es: 20 + 15 – 5 = 30.

Importancia

Estos principios permiten **contar de manera eficiente** y constituyen la base para:

- **Permutaciones** (ordenamientos).
- **Combinaciones** (selecciones sin orden).
- **Variaciones** y problemas de probabilidad.

Permutaciones y combinaciones

La **combinatoria** es una rama de la matemática que estudia el conteo de objetos y sus posibles disposiciones sin necesidad de enumerar cada caso. Dentro de este campo, las **permutaciones** y **combinaciones** constituyen herramientas esenciales que permiten calcular el número de formas en que se pueden ordenar o seleccionar elementos de un conjunto. De acuerdo con Camacho y Gómez (2018), el dominio de estas técnicas facilita la resolución de problemas en probabilidad, estadística, informática y teoría de decisiones. Una **permutación** es un arreglo u **ordenamiento** de todos o parte de los elementos de un conjunto, donde el **orden sí importa** (Martínez, 2017).

Fórmula general de permutación

La cantidad de permutaciones de *n* elementos tomados de r en r se expresa como:

$$\mathrm{P(n,r)} = \frac{(n-r)!}{\mathrm{n!}}$$

donde $n!$ (factorial de n) representa el producto de todos los números enteros positivos desde 1 hasta n.

Ejemplo:

En una repisa hay 5 libros distintos y queremos saber de cuántas maneras se pueden ordenar 3 de ellos:

$$P(5.3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$$

Respuesta: 60 formas distintas de ordenar 3 libros de un total de 5.

Permutaciones con repetición

Cuando algunos elementos se repiten, el número de permutaciones se reduce, ya que no todos los ordenamientos son únicos.

Ejemplo:

En la palabra "MAMÁ" hay 4 letras en total, con 2 "M" y 2 "A".

$$P = \frac{4!}{(2! \times 2!)} = 6.$$

Respuesta: 6 formas distintas de ordenar las letras.

Combinaciones

Definición: una combinación es una selección de elementos de un conjunto, donde el orden no importa (Mendoza y Rodríguez, 2019).

Fórmula general de combinación

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!)}$$

Ejemplo:

De un grupo de 8 estudiantes, queremos elegir 3 para formar un comité. Como el orden de elección no importa:

$$C\,(8,3) = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56.$$

Respuesta: hay 56 maneras de elegir a los 3 integrantes.

Tabla 1. *Diferencias clave entre permutaciones y combinaciones*

Aspecto	Permutación	combinación
Orden	Importa	No importa
Fórmula	$P(n,r) = \frac{(n-r)!}{n!}$	$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!)}$
Ejemplo	Ordenar 3 libros de 5	Elegir 3 estudiantes de 8
Resultado del ejemplo	60 formas	56 formas

Principio de inclusión-expulsión

El **principio de inclusión–exclusión** es una técnica de conteo usada para determinar el número de elementos que pertenecen a la **unión** de varios conjuntos, evitando la **sobrecontabilización**.

En su forma básica, para dos conjuntos A y B:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ se suman los elementos de cada conjunto.

- Se resta la intersección porque fue contada dos veces.

Para **tres conjuntos** A, B, C:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

La idea es: **sumar las partes individuales, restar las intersecciones dobles y agregar las triples**.

En general, para *n* conjuntos, el principio sigue el mismo patrón de **sumar y restar alternadamente** las intersecciones.

Ejemplo 1: dos conjuntos

En un grupo de estudiantes:

- 20 saben programar en Python (A).
- 15 saben programar en **C++** (B).
- 8 saben ambos lenguajes ($A \cap B$).

¿Cuántos estudiantes saben al menos un lenguaje?

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 20 + 15 - 8 = 27$

27 estudiantes saben al menos un lenguaje.

Ejemplo 2: tres conjuntos

En una clase de ingeniería:

- 25 estudiantes aprobaron **Matemáticas** (A).
- 18 aprobaron **Física** (B).
- 20 aprobaron **Química** (C).
- 10 aprobaron Matemáticas y Física.
- 7 aprobaron Matemáticas y Química.
- 5 aprobaron Física y Química.
- 3 aprobaron las tres materias.

¿Cuántos aprobaron **al menos una**?

$|A \cup B \cup C| = 25 + 18 + 20 - (10 + 7 + 5) + 3$

$|A \cup B \cup C| = 63 - 22 + 3 = 44$

44 estudiantes aprobaron al menos una materia.

Importancia en ingeniería

El principio de inclusión-exclusión es clave en:

- **Teoría de conjuntos y probabilidad**: calcular probabilidades de eventos compuestos.
- **Análisis de datos**: evitar duplicados al contar elementos en bases de datos.
- **Optimización y computación**: algoritmos de conteo y combinatoria.

Aplicaciones

- Estadística y probabilidad: cálculo de probabilidades.
- Informática: generación de contraseñas, algoritmos de cifrado.
- Biología: combinaciones genéticas.
- Economía y administración: toma de decisiones.
- Educación: desarrollo del razonamiento lógico-matemático.

Conclusión

El estudio de las permutaciones y combinaciones constituye una base fundamental para comprender el conteo en matemáticas. Al distinguir entre situaciones donde el orden es importante y aquellas donde no lo es, se construye un marco analítico aplicable en numerosos campos. Su aprendizaje contribuye al desarrollo de competencias lógicas y de resolución de problemas, esenciales en la formación académica y profesional.

Referencias

Camacho, A., y Gómez, R. (2018). Aplicaciones de la combinatoria en problemas de probabilidad. *Revista Colombiana de Educación Matemática, 9*(1), 55-68.

Martínez, J. (2017). *Fundamentos de lógica y matemáticas*. Universidad Nacional Autónoma de México.

Mendoza, F., y Rodríguez, L. (2019). Aplicaciones de la lógica matemática en la computación. *Revista Colombiana de Matemáticas Aplicadas, 11*(2), 45-58.

Ramírez, S. (2021). La enseñanza de las funciones como herramienta para el desarrollo del pensamiento matemático. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 15*(29), 45-63.