Capítulo 10. Inducción y recursión

Antonio Pérez Cortés[1]
Cecilia Guadalupe Hernández Yáñez[2]

DOI: https://doi.org/10.52501/cc.440.10

Resumen

Las demostraciones por inducción matemática constituyen una herramienta fundamental para verificar proposiciones que involucran números naturales. Este principio permite determinar si una afirmación es válida para todos los valores de n a partir de dos pasos esenciales: comprobar que la proposición es verdadera para un valor inicial (caso base) y demostrar que, si se cumple para un valor k, entonces también se cumple para $k + 1$ (paso inductivo). De esta manera, se garantiza la validez de la proposición para todos los números naturales a partir de n inicial. Este método ha sido ampliamente utilizado desde el siglo XVII, aunque fue formalizado posteriormente, y resulta clave para demostrar fórmulas como la suma de números naturales o la suma de cuadrados, así como para analizar desigualdades. Por otro lado, los algoritmos recursivos representan un enfoque complementario en matemáticas y programación, basado en la idea de resolver problemas mediante su reducción a casos más simples del mismo tipo. La recursividad se expresa a través de relaciones de recurrencia, que definen cada término de una sucesión en función de términos anteriores, junto con condiciones iniciales que permiten iniciar el proceso. Este método es ampliamente utilizado para modelar fenómenos en diversas áreas, como la economía, donde se aplica en el cálculo de intereses compuestos. Además, existe una estrecha relación entre inducción y recurrencia, ya que muchos resultados pueden demostrarse mediante ambos enfoques. En conjunto, estos conceptos fortalecen el razonamiento lógico y la resolución sistemática de problemas matemáticos complejos.

[1] Maestro en Matemáticas. Docente en Tecnológico Nacional de México. Correo electrónico: antonio.pc@itz.edu.mx
[2] Licenciada en Matemáticas. Docente en Tecnológico Nacional de México.

Palabras clave: *inducción matemática, algoritmos recursivos.*

Demostraciones por inducción

Cuando trabajamos proposiciones que involucran a los números naturales y que, además, se satisfacen para una cantidad particular de elementos, la primer pregunta que nos podemos formular es la siguiente: ¿podemos generalizar este resultado para cualquier valor natural $n = 1,2,3, \dots$? De no ser así, ¿para qué valores de n se satisface la proposición?

El principio de inducción matemática es una herramienta usada ampliamente en matemáticas, que usualmente se enuncia a través de alguna afirmación $P(n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Este principio es la principal herramienta para responder las preguntas iniciales que nos formulamos. Podría darse el caso de que $P(n)$ sea satisfecha para algunos valores de n y completamente falsa para otros (Velásquez, 2010). Para ilustrar esto, consideremos las afirmaciones siguientes:

1. $n^2 = n$. Podemos notar que esta afirmación se cumple para el valor 1, es decir, $P(1)$ es verdadera. Por otro lado, $P(n)$ es falsa para cualquier $n > 1$.
2. $n^2 > 0$. Claramente, el cuadrado de cualquier número natural es positivo, es decir, $P(n)$ es verdadera para toda n.

Definición (principio de inducción matemática): *Sea n_0 un número natural fijo y sea $P(n)$ una propiedad definida para cada número natural $n \geq n_0$. Además, supongamos que se satisfacen las condiciones siguientes:*

i) *$P(n_0)$ es verdadera.*

ii) *Si para todo natural $k \geq n_0$, $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ también lo es.*

Entonces decimos que para todo entero $n \geq n_0$, $P(n)$ es verdadera. A ii) *le llamamos hipótesis de inducción o hipótesis inductiva (idem).*

Este principio fue usado inicialmente en trabajos de Francesco Maurolico en 1575. Años después, Pierre de Fermat y Blaise Pascal utilizaron esta técnica, pero fue hasta 1883 que Augustus de Morgan describió de manera rigurosa esta técnica y la nombró *Inducción matemática* ("Inducción matemática", 2024).

Ejemplo 1. Para ilustrar mejor este principio, partamos de un ejemplo clásico: supongamos que buscamos la suma (S_{100}) de los primeros 100 números naturales, es decir, $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} i$ Este problema fue resuelto por Carl Friederich Gauss y después generalizado en la fórmula siguiente:

$S_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (Chávez y González, 2018; De Nápoli, 2020).

Para demostrar esto, notemos que $P(1)$ es verdadera, ya que para $n = 1$ tenemos que $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Ahora supongamos que para cada entero $k \geq 1$, $P(k)$ es verdadera. Demostremos que $P(k+1)$ es verdadera, es decir,

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Dado que $P(k)$ es verdadera, tenemos que

$$S_k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Luego, consideremos

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= \sum_{i=1}^{k+1} i \\
&= \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) \\
&= S_k + (k+1) \leftarrow \text{Aplicamos hipóteis de inducción}, \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\
S_{k+1} &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula se satisface para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2. Demuestre que la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales está dada por la fórmula

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Primero, notemos que $P(1)$ es verdadera, ya que

$$1 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{(2)(3)}{6}$$

Ahora asumimos que para todo $k \geq 1$, $P(k)$ es verdadera, esto es

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Nuestro objetivo ahora es demostrar que

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= \sum_{i=1}^{k+1} i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \leftarrow \text{Aplicamos hipótesis de inducción,} \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula es verdadera para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3. Ahora encontremos para que valores de n se satisface la desigualdad

$$2^n > 2n + 1$$

Notemos que para $n = 1, 2$ no se satisface, pues $2^1 < 2(1) + 1 = 3$ y $2^2 < 2(2) + 1 = 5$. Por otro lado, para $n = 3$ tenemos que $2^3 > 2(3) + 1$, es decir, $P(3)$ es verdadera. Ahora, supongamos que para todo $k \geq 3$ se satisface que $P(k)$ es verdadera, es decir, se satisface

$$2^k > 2k + 1$$

Ahora, nuestro objetivo es demostrar que $P(k+1)$ es verdadera, es decir,

$$2^{k+1} > 2k + 3$$

Tenemos que $2^{k+1} = 2^k \cdot 2$, por lo tanto, tenemos que para $2k + 2 > 3$ se cumple

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \quad > 2(2k + 1) = 4k + 2 = 2k + (2k + 2) > 2k + 3$$

Ejemplo 4. Demuestre que $\sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $r \neq 1$.

Notemos que $P(n)$ está dado por

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Por un lado, tenemos que

$$r^0 = 1 = \sum_{i=0}^{0} r^i$$

Por otro lado, tenemos

$$\sum_{i=0}^{0} r^i = \frac{r^{0+1} - 1}{r - 1} = 1$$

Concluimos que $P(0)$ es verdadera. Seguimos con el paso inductivo, es decir, asumimos que $P(k)$ es verdadera para algún entero $k \geq 0$, es decir, se satisface que

$$\sum_{i=0}^{k} = \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1}$$

Veamos que $P(k + 1)$ es verdadera. Tenemos que

$$\sum_{i=0}^{k+1} r^i = \sum_{i=0}^{k} r^i + r^{k+1}$$

Luego, dado que $P(k)$ es verdadera, se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} r^i &= \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1} + r^{k+1} \\ &= \frac{r^{k+1} - 1 + (r - 1)(r^{k+1})}{r - 1} \\ &= \frac{r^{k+1} - 1 + r^{k+2} - r^{k+1}}{r - 1} \\ &= \frac{r^{k+2} - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

Concluimos que $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq 0$.

Algoritmos recursivos

Uno de los aspectos más importantes de la programación es la recursividad, un concepto que aparece infinidad de veces en la naturaleza. Tales problemas consisten en resolver de manera directa un problema para algún conjunto de datos, y usar estos últimos para resolver el problema para el resto de datos. Una de las maneras de abordar problemas recursivos es a través de sucesiones (Ugarte, 2016).

Se puede definir una sucesión a través de su n-ésimo término, es decir, dar una fórmula para obtener el término a_n de la sucesión. De esta manera, podemos conocer cada término de la sucesión de manera inequívoca. De manera alternativa, se puede definir una sucesión a través de la recursividad, que es el proceso de definir una función que sea llamada a sí misma para de manera repetitiva (recursiva) hasta obtener una solución. En muchas ocasiones, esta función se denomina relación de recurrencia, y define cada elemento en términos de los elementos anteriores de la sucesión (Benítez, 2019).

Definición (relación de recurrencia)

Para una sucesión de términos $a_0, a_1, a_2, \ldots$, se define la relación de recurrencia como una fórmula que relaciona para cada k, el término a_k con los términos $a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_{k-i}$ (para $k - i \geq 0$). Las **condiciones iniciales** determinan los valores de $a_0, a_1, \ldots, a_m$ para algún entero fijo $m \geq 0$ (UNAM, s.f.; Doerr y Levasseur, s.f.).

Ejemplo 5. Consideremos una sucesión $c_0, c_1, c_2, \ldots$ de manera que para $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} c_k &= c_{k-1} + kc_{k-2} + 1 \\ & \quad c_0 = 1 y c_1 = 2 \end{aligned}$$

Para encontrar los términos $c_2, c_3 y c_4$ hacemos

$$\begin{aligned} c_2 &= c_1 + 2c_0 + 1 \\ &= 2 + 2(1) + 1 \\ c_2 &= 5 \\ c_3 &= c_2 + 3c_1 + 1 \\ &= 5 + 3(2) + 1 \\ c_3 &= 12 \\ c_4 &= c_3 + 4c_2 + 1 \\ &= 12 + 4(5) + 1 \\ c_4 &= 33 \end{aligned}$$

Sin embargo, una relación de recurrencia no es única, sino que se puede expresar de distintas maneras, y aun así para cada $k \geq 0$ obtener el mismo resultado para el término a_k. Para ilustrar esto, consideremos la sucesión dada por las relaciones de recurrencia:

$$\begin{aligned} s_k &= 3s_{k-1} - 1 para \quad k \geq 1, y \\ s_{k+1} &= 3s_k - 1, para \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

Cabe destacar que, a pesar de que la recurrencia y la inducción son procedimientos distintos, se pueden demostrar algunos resultados por medio de inducción o de recurrencia, o incluso por medio de ambos procedimientos. Ilustramos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Demostremos que el n-ésimo número impar (a_n) mayor que cero está dado por $2n - 1$. Para esto, consideramos el primer término, es decir, $n = 1$. Tenemos que

$$a_1 = 2(1) - 1 = 1$$

Supongamos que $P(k)$ es verdadera para algún $k \geq 0$. Tenemos que

$$a_k = 2k - 1$$

El objetivo es demostrar que $P(k + 1)$ es verdadera. Notemos que $a_{k+1} = a_k + 2$, ya que $a_k + 1$ es un número par. Luego, consideremos

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + 2 \\ &= (2k - 1) + 2 \\ &= 2k + 2 - 1 \\ a_{k+1} &= 2(k + 1) - 1 \end{aligned}$$

Para este resultado usamos inducción al asumir que la relación de recurrencia era cierta para algún entero positivo k.

Además, podemos definir la recurrencia para conjuntos, que es una forma de construir cualquier elemento de un conjunto A a partir de un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq A$ de elementos ya construidos (llamados base).

Ejemplo 6. Consideremos al conjunto de los números naturales. La base $\mathcal{B}$ de este conjunto es $\mathcal{B} = \{1\}$, y la relación de recurrencia está dada por $a_n = n + 1$.

Ejemplo 7. Uno de los ejemplos más comunes donde la recurrencia es extremadamente útil es en economía y finanzas, en particular en el cálculo de intereses compuestos con una tasa de impuestos periódica i. Para esto, definimos

$$\begin{aligned} n &= n\text{-ésimo periodo} \\ a_n &= \text{Cantidad de dinero a finales del periodo } n \\ a_0 &= \text{Cantidad inicial de dinero.} \end{aligned}$$

De esta manera, para cada periodo inicial, $n = 1$, tenemos que

$$a_1 = a_0 + ia_0$$

En general, para cualquier periodo k, se tiene que

$$a_k = a_{k-1} + ia_{k-1}$$

Notemos que el conjunto base es $\mathcal{B} = \{a_0\}$ y la relación de recurrencia es

$$a_n = a_{n-1} + ia_{n-1}$$

Referencias

Benítez, R. (2019). *Fundamentos de programación con Python.* Universidad de Chile; Departamento de Ciencias de la Computación.

Chávez, E., y González, C. (2018). *Matemáticas I. Libro de texto para el nivel medio superior*. Universidad Nacional Autónoma de México.

De Nápoli, P. L. (2020). *Más sobre inducción*. Departamento de Matemática; Facultad de Ciencias Exactas y Naturales; Universidad de Buenos Aires. https://mate.dm.uba.ar/~pdenapo/apuntes-algebraI/2020/2do-cuatrimestre/clase-07-induccion.pdf

Doerr, A., y Levasseur, K. [LibreTexts Español]. (s.f.). *Relaciones de recurrencia.* LibreTexts Español. https://es.libretexts.org/

Inducción matemática [Wikipedia] (2024, 5 de noviembre). En *Wikipedia*. https://es.wikipedia.org/wiki/Inducci%C3%B3n_matem%C3%A1tica

Ugarte, G. (2016). *Matemáticas discretas aplicadas a la computación.* Universidad Nacional de Colombia.

Universidad Nacional Autónoma de México. (s.f.). *Fascículo de matemáticas discretas I.* UNAM.

Velázquez, T. J. (2010). *Fascículo de inducción matemática*. Universidad Nacional Autónoma de México.