TENDENCIAS en la educación MATEMÁTICA 2021

CC COLECCIÓN CONOCIMIENTO

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Estela Juárez Ruiz
Honorina Ruiz Estrada
(editoras)

Tendencias en la educación matemática 2021

COMUNICACIÓN CIENTÍFICA

COMUNICACIÓN CIENTÍFICA PUBLICACIONES ARBITRADAS
HUMANIDADES, SOCIALES Y CIENCIAS

COLECCIÓN CONOCIMIENTO

Cada libro de la Colección Conocimiento es evaluado para su publicación mediante el sistema de dictaminación de pares externos. Invitamos a ver el proceso de dictaminación transparentado en

http://doi.org/10.52501/cc.019

www.comunicacion-cientifica.com

Ediciones Comunicación Científica se especializa en la publicación de libros de investigación digitales e impresos en las áreas de humanidades, ciencias sociales y ciencias exactas. Guía su criterio de publicación cumpliendo con las prácticas internacionales de dictaminación, comités y ética editorial, acceso abierto, medición del impacto de la publicación, difusión, distribución impresa y digital, transparencia editorial e indización internacional.

Tendencias en la educación matemática 2021

Lidia Aurora Hernández Rebollar, Estela Juárez Ruiz
y Honorina Ruiz Estrada

(editoras)

Colección
Conocimiento

Tendencias en la educación matemática 2021 / Lidia Aurora Hernández Rebollar, Estela Juárez Ruiz y Honorina Ruiz Estrada (editoras). — Ciudad de México : Comunicación Científica, 2021. — 316 páginas : ilustraciones. — (Colección Conocimiento).
ISBN 978-607-99505-8-3
DOI 10.52501/cc.019
1. Matemáticas — Estudio y enseñanza. I. Hernández Rebollar, Lidia Aurora, editor. II. Juárez Ruiz, Estela, editor. III. Ruiz Estrada, Honorina, editor. IV. Serie.
LC: QA11.2 Dewey: 510.07

Diseño de portada: Francisco Zeledón
Diseño de interiores: Guillermo Huerta

Ediciones Comunicación Científica S.A. de C.V., 2021
Av. Insurgentes Sur 1602, piso 4, suite 400,
Crédito Constructor, Benito Juárez, 03940, Ciudad de México, México,
Tel. (52) 55 5696-6541 • móvil: (52) 55 4516 2170
info@comunicacion-cientifica.com • infocomunicacioncientifica@gmail.com
www.comunicacion-cientifica.com • comunicacioncientificapublicaciones
@ComunidadCient2

ISBN: 978-607-99505-8-3
DOI: https://doi.org/10.52501/cc.019

Esta obra fue dictaminada mediante el proceso de pares ciegos externos,
puede consultar el proceso transparentado en
https://doi.org/10.52501/cc.019

Contenido

Sección 4
Estudios sobre problemas y tareas matemáticos

Sección 5
Estudios sobre los libros de texto de matemáticas

Comité Científico Revisor

Daniel Rodríguez Vergara
Dominique Manghi,
María del Socorro García González
Flor Montserrat Rodríguez Vásquez
José Martín Estrada Analco
Judith Alejandra Hernández Sánchez
Gabriela Buendía Ábalos
José Gabriel Sánchez Ruiz
Santiago Ramiro Velázquez Bustamante
Nielka Rojas González
Guadalupe Cabañas Sánchez
Darly Alina Kú Euán
Eduardo Carlos Briceño Solís
Eric Flores Medrano
Nehemías Moreno Martínez
Francisco Javier Diez Palomar
María Araceli Juárez Ramírez
José Antonio Juárez López
Bertha Ivonne Sánchez Luján
Leidy Hernández Mesa
José Trinidad Ulloa Ibarra
Rita Guadalupe Angulo Villanueva
Marcela Ferrari Escolá
Liliana Suárez Téllez
Dinazar Escudero Ávila
Wendy Loraine De León Zamora
José David Morante Rodríguez
Margarita Hernández González
Catalina Navarro Sandoval
Luis David Benítez Lara
y Jesús Antonio Larios Trejo.

Presentación

Estimado lector, está por adentrarse en el conocimiento de diferentes trabajos de investigación que los autores presentaron en el VII Taller Internacional "Tendencias en la educación matemática basada en la investigación (TEMBI 7)" que se realizó en alianza con la Comunidad GeoGebra Latinoamericana en noviembre de 2020. Cada uno de estos trabajos respondió a una convocatoria posterior al taller y se sometió a un proceso de arbitraje doble ciego en el que participaron expertos de diferentes temáticas de la educación matemática.

La obra está dividida en cinco secciones que usted puede disfrutar en el orden de su preferencia y que describimos a continuación para que tenga un primer acercamiento a sus temas. Esperamos que todos sean de su interés.

Sección 1. Estudios sobre pensamiento numérico algebraico

En la primera sección de este libro encontrará cinco capítulos que abordan temas que van desde la aritmética usada en la vida cotidiana hasta el lenguaje matemático en textos algebraicos antiguos, pasando por la comprensión y la enseñanza de la ecuación cuadrática, la factorización de polinomios y el cálculo de determinantes que se enseñan en la escuela formal.

Un primer capítulo atiende el significado del concepto de ecuación cuadrática y su reconocimiento en sus representaciones factorizada y canónica. Se discuten los significados estudiantiles de dos grupos de secundaria haciendo uso del método de análisis de contenido.

El segundo capítulo aborda el aprendizaje de la factorización de polinomios algebraicos usando un punto de vista geométrico y siguiendo la teoría de Duval. Se hace uso del *software* denominado Caja de Polinomios y se discuten los beneficios y las limitaciones de este *software* en estudiantes de bachillerato.

El tercer capítulo narra la implementación de tareas de aprendizaje para el cálculo de determinantes, enmarcándolo en un entorno más rico como es la identificación y la comparación de patrones que surgen de matrices cuadradas que conducen a determinantes nulos. Las actividades se desarrollan en un ambiente de GeoGebra.

En el cuarto capítulo se discuten las estrategias de cálculo mental de una vendedora de tortillas hechas a mano. La informante respondió seis planteamientos relacionados con su contexto de trabajo. Los autores nos llevan de la mano a través de este interesante mundo de la matemática cotidiana, que no se ajusta a los métodos de la escuela formal.

Finalmente, el quinto capítulo aborda las características multisemióticas de tres textos algebraicos antiguos: al-Khwârizmî, Viète y Descartes. Aquí se busca reconocer las competencias y los conocimientos lingüísticos multisemióticos requeridos en estos documentos históricos, para luego identificar cuáles aparecen en textos matemáticos producidos por estudiantes mexicanos de bachillerato.

Sección 2. Estudios acerca de la comprensión de conceptos matemáticos

Esta sección está compuesta por tres capítulos que abordan el estudio de la comprensión de conceptos matemáticos desde diferentes perspectivas teóricas y metodológicas. Se estudian los conceptos *grupos*, *números complejos*, *vector* y *medida* que nos permiten conocer factores importantes para su comprensión propuestos por otros investigadores, algunos de los cuales se fundamentan en teorías como la de Modos de Pensamiento, la de Conexiones, la de Etnomatemática o la de Indicadores de Entendimiento. Estos trabajos abonan al estudio de la comprensión de las matemáticas y permiten planear su enseñanza y su aprendizaje con base en resultados de investigaciones rigurosas, dos de las cuales involucraron a estudiantes reales (capítulos 6 y 7) o a grupos culturales (capítulo 8).

Sección 3 Estudios sobre el profesor de matemáticas

En esta sección se presentan dos capítulos relacionados con el profesor de matemáticas. El primero es un estudio acerca del papel que desempeñan las creencias de los profesores en la práctica docente, específicamente en el proceso de evaluación del aprendizaje de sus alumnos. Analizan la percepción de algunos profesores de primaria y secundaria de lo que se debe evaluar y por qué evaluarlo, de los instrumentos utilizados para evaluar, de la dificultad que plantea la evaluación en la clase de matemáticas y qué entienden por evaluación los docentes. El segundo trabajo aborda la utilidad de las videograbaciones de las clases de los profesores en servicio, como un instrumento de análisis y reflexión de la práctica docente que facilita un espacio que permite articular la teoría didáctica y la matemática con la práctica docente.

Sección 4. Estudios sobre problemas y tareas matemáticos

En esta sección se presentan dos estudios: uno sobre la resolución de problemas y otro acerca del análisis de la autenticidad de las tareas. En el primer caso, los autores del texto observaron las respuestas de estudiantes de secundaria a un acertijo matemático que implicaba calcular el área de un triángulo que no podía ser construido porque carecía de área. Analizaron la influencia del tiempo transcurrido desde que los aprendices estudiaron el tema de criterios de existencia de triángulos y la resolución del problema. Asimismo, observaron que la conducta de los estudiantes cambia sólo por un periodo de tiempo, para luego regresar a su conducta original, por lo cual sugieren la importancia de fomentar aprendizajes más duraderos. El segundo texto aborda el análisis y la modificación de un conjunto de tareas extraídas de un libro de texto de álgebra para que cumplan con la taxonomía de tareas auténticas. Mediante un análisis cuantitativo de las respuestas obtenidas por cinco jueces expertos acerca de cada uno de los aspectos de autenticidad de esas tareas, se calcula la concordancia entre ellos y se obtienen valores bajos, pero después de atender sugerencias, modificar las tareas y realizar una segunda valoración, se logran niveles altos de concordancia en todos los aspectos, lo cual da como resultado un conjunto de cuatro tareas auténticas.

Sección 5. Estudios sobre los libros de texto de matemáticas

La última sección de este libro brinda la oportunidad de sumergirse en los libros de texto de matemáticas publicados por la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos. Los tres capítulos que conforman esta parte involucran cómo se presentan tres aspectos relevantes de la matemática escolar: la adición y la sustracción, el concepto de área y el teorema de Pitágoras. En estos tres textos se aborda desde la concordancia instruccional entre las clases virtuales y los libros de texto en relación con la suma y la resta, pasando por un estudio exhaustivo acerca de cómo ha evolucionado la presentación del concepto de área a lo largo de las últimas seis décadas, hasta el análisis de la autenticidad de problemas matemáticos que involucran el teorema de Pitágoras, autenticidad que está en consonancia con la reforma educativa de 2017.

Puebla de Zaragoza, septiembre de 2021

Estela Juárez-Ruiz,
Lidia Aurora Hernández Rebollar
y Honorina Ruiz Estrada
(editoras)

Sección 1

ESTUDIOS SOBRE PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO

Capítulo 1. Significados de la ecuación cuadrática en producciones de estudiantes de secundaria

Judith Alejandra Hernández-Sánchez
y Darly Alina Kú Euán
Universidad Autónoma de Zacatecas (México)

Resumen

En este artículo se describen los significados que surgen en dos grupos de estudiantes de secundaria cuando se les pide que expliquen qué es una ecuación cuadrática y reconozcan algunos ejemplos. La identificación y la descripción de las producciones de los estudiantes se sustenta en la noción de significado de un concepto matemático escolar conformado por sus tres componentes semánticas: estructura conceptual, sistema de representación y sentido o modo de uso. Con base en el método de análisis de contenido, los significados de ecuación cuadrática muestran una estructura conceptual incompleta en la que predomina el campo procedimental asociado a resolver un problema utilizando raíz cuadrada y encontrar valores desconocidos. Dadas las características de las tareas, lo verbal es el sistema de representación potenciado; además, los estudiantes presentan dificultades al utilizar el registro algebraico. Finalmente, los sentidos de uso se restringen a situaciones educativas de contextos matemáticos.

Palabras clave: análisis didáctico, estructura conceptual, sentido de uso.

Introducción

Las investigaciones sobre los significados de un concepto matemático escolar son variadas. Éstos pueden ser sobre conceptos del álgebra, geometría o cálculo evidenciados en diferentes producciones de corte escolar. Fernández-Plaza *et al.* (2016) realizan un análisis de las concepciones que surgen en las respuestas de estudiantes y futuros profesores sobre tres conceptos (la fracción como relación parte-todo, las razones trigonométricas y los números negativos y positivos). Hernández *et al.* (2020) y Herrera *et al.* (2017) identifican en libros de cálculo los significados de los conceptos *límite* y *derivada*, respectivamente. Por su parte, Rico *et al.* (2015) analizan los conocimientos de un grupo de estudiantes y de su profesora al resolver una tarea sobre potencias. En todas las investigaciones mencionadas se considera la diversidad de significados que emergen y sus implicaciones en la educación matemática.

El estudio de la multiplicidad de significados de conceptos matemáticos escolares es una línea vigente de investigación (Pino-Fan, 2017), pues brinda información sobre el discurso que se potencia dentro de la matemática escolar. Al respecto, Soto y Cantoral (2014) consideran que ésta requiere un carácter más funcional. Esta falta de una matemática más funcional podría deberse a que los componentes del significado se limitan a una estructura conceptual incompleta y carente de formas de uso que los dote de sentido. En esta investigación se muestra evidencia que apoya dicha hipótesis.

Se eligió el tema de la ecuación cuadrática pues las ecuaciones constituyen un tema rector en la educación secundaria en México. En particular, en el tercer grado “el estudio de las ecuaciones continúa y concluye en la educación básica con la formulación y la solución de ecuaciones cuadráticas para resolver problemas” (Secretaría de Educación y Cultura [SEP], 2017, p. 224). Sin embargo, Acosta (2017) considera que la enseñanza y el aprendizaje de este tema presenta grandes dificultades; en particular, que los contextos y las situaciones de los problemas que involucran a la ecuación cuadrática son restringidos. Esto provoca que las formas de uso de este concepto matemático escolar no alcancen un sentido funcional en los significados de los estudiantes; es decir, que su estructura conceptual, sus representaciones y su fenomenología se presentan de manera limitada. Lo anterior provoca, como lo sostienen Ursini y Trigueros (2006), que los estudiantes no puedan aplicar sus conocimientos algebraicos (en este caso relacionados con la ecuación cuadrática) en contextos diferentes a los escolares.

Por ese motivo, en esta investigación se ofrece prueba contundente de las estructuras conceptuales que surgen en los significados que se evidencian en dos grupos de estudiantes de secundaria. Para ello se utilizaron dos tareas que abordan situaciones ubicadas en el ámbito educativo en un contexto matemático: definir la ecuación cuadrática y reconocer algunos casos especiales de esta.

Marco teórico

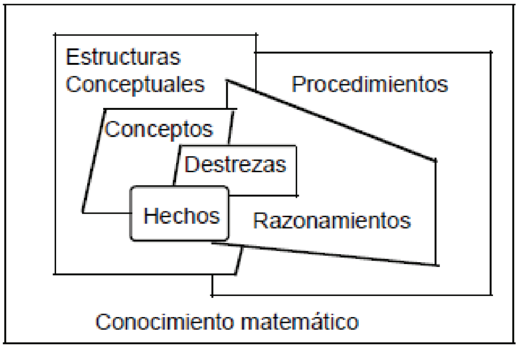
La noción de significado de un concepto en el ámbito de la matemática escolar, según Rico (2012), está integrada por el siguiente triángulo semántico:

- *Estructura conceptual,* que comprende conceptos y propiedades, los argumentos y las proposiciones que se derivan y sus criterios de veracidad.
- *Sistema de representación semiótica,* definido por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente dicho concepto y lo relacionan con otros.
- *Fenomenología,* que incluye aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que están en el origen del concepto y le dan sentido (pp. 52-53).

Se considera que esta terna brinda información sobre la forma en que se organiza un contenido matemático en situación escolar. Por esa razón se utiliza para interpretar el conocimiento de los estudiantes desde las concepciones que evidencian al responder ítems sobre ecuaciones cuadráticas. A continuación se aborda cada componente semántica del significado para establecer las categorías utilizadas en el análisis de las producciones de los estudiantes.

En el caso de la *estructura conceptual* se adopta la organización del conocimiento matemático desde una perspectiva cognitiva (propuesta por Hiebert y Lefevre, 1986; cit. por Rico, 1997). Estas ideas son retomadas por Rico (1997) para establecer un esquema que divide las componentes del conocimiento matemático en dos campos: *conceptual* y *procedimental* (figura 1). De esta forma, el *campo conceptual* queda organizado en *(a)*

FIGURA 1. *Cuadro de composición y relaciones del conocimiento matemático*



FUENTE: Rico (1997, p. 31).

hechos (términos, notaciones, convenios y resultados), *(b)* conceptos y *(c)* estructuras conceptuales relacionadas con una noción particular. El *campo procedimental,* por su parte, está conformado por *(a)* destrezas que procesan hechos, *(b)* razonamientos que relacionan conceptos y *(c)* estrategias que actúan sobre las estructuras.

En el segundo componente del significado, el *sistema de representación semiótica,* se eligieron dos de los sistemas de representación propuestos por Cañadas y Gómez (2014). Esto con base en las representaciones que se esperaba podrían surgir según la naturaleza de los ítems aplicados. Estos sistemas son:

a) Simbólico. Sistema de representación específico porque tiene sus propios signos: números, letras y símbolos de las operaciones aritméticas, con los cuales se puede operar y entre cuyos elementos existe una relación.
b) Verbal. Sistema de representación que tiene sentido cuando el lenguaje es referido a conceptos y procedimientos matemáticos que se quieren representar (Cañadas y Gómez, 2014, p. 20).

La *fenomenología,* tercer componente del significado, estuvo compuesta por dos organizadores: *situaciones* y *contextos*. Los contextos pueden ubicarse en un marco matemático o extramatemático, esto es, según Rico *et al.* (2008) en formas en que se usan los conceptos. En el caso de las situaciones, éstas hacen referencia al medio en el que se sitúan las tareas.

Los ítems aplicados se situaron en un ámbito educativo, según la clasificación proporcionada por Gómez (2007).

De esta manera, la terna semántica del significado de un concepto matemático escolar y sus organizadores brindan, como sostienen Fernández-Plaza *et al.* (2016), un marco interpretativo para responder preguntas del conocimiento matemático de los estudiantes sobre los siguientes aspectos:

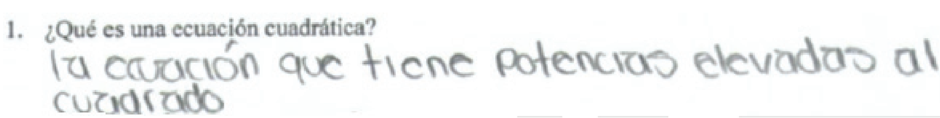
> ¿Cómo expresan los conceptos y nociones básicas?, ¿qué propiedades o relaciones argumentan sus ideas matemáticas?, ¿qué signos emplean para ello?, ¿qué modos de uso identifican para el concepto?, ¿qué situaciones, fenómenos o contextos enmarcan, o están en el origen, de sus ideas matemáticas? (p. 238).

Estas preguntas sirvieron de referencia para la interpretación de los significados parciales que expresaron los estudiantes sobre el concepto matemático escolar de ecuación cuadrática.

Método

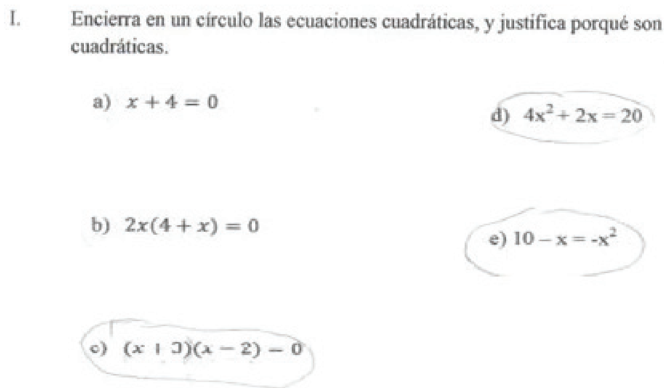
El método adoptado para este estudio fue el análisis de contenido propuesto por Rico y Fernández-Cano (2013). Para la recolección de los significados se utilizaron dos cuestionarios distintos. En el grupo A participaron 22 estudiantes, a quienes se les preguntó: ¿qué es una ecuación cuadrática? (figura 2). A los cinco estudiantes del grupo B, se les pidió encerrar en un círculo aquellos ejemplos que cumplían con las características de una ecuación cuadrática y justificar su elección (figura 3).

Figura 2. *Ítem aplicado al grupo A con la respuesta obtenida del estudiante E22.*


1. ¿Qué es una ecuación cuadrática?
la ecuación que tiene potencias elevadas al cuadrado

El corpus analizado estuvo conformado por 25 respuestas, 20 de estudiantes del grupo A y cinco del grupo B. Las unidades de análisis fueron las palabras o símbolos que expresaban algún término, proposición

Figura 3. *Ítem aplicado al grupo B con la respuesta obtenida del estudiante E2B.*



I. Encierra en un círculo las ecuaciones cuadráticas, y justifica porqué son cuadráticas.

a) $x + 4 = 0$

d) $4x^2 + 2x = 20$

b) $2x(4 + x) = 0$

e) $10 - x = -x^2$

c) $(x + 3)(x - 2) = 0$

o frase que describiera la ecuación cuadrática o que argumentara la selección de alguno de los ejemplos refiriéndose a alguna característica de esta noción.

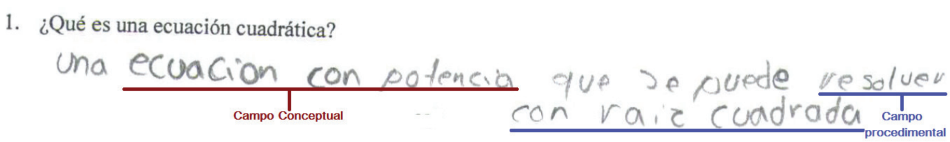
Las categorías establecidas fueron las componentes del significado y sus organizadores expuestos en la sección anterior. Es decir, *estructura conceptual* (campo conceptual y procedimental), *sistema de representación semiótica* (verbal o simbólico) y *fenomenología* (contexto matemático o extra matemático). Cada una de estas componentes fue organizada en una ficha de registro (véase figura 4). En la primera fila se utiliza el código para identificar al estudiante y al grupo al que corresponde. Por ejemplo, E1A corresponde al estudiante 1 del grupo A; de manera similar E5B corresponde a la respuesta del estudiante 5 del grupo B. En la segunda fila se anexa la imagen de la respuesta al ítem propuesto en cada grupo. Enseguida se desagregan las tres componentes del significado y sus organizadores y categorías propuestas.

FIGURA 4. *Ficha de registro para la interpretaciónde las componentes de los significados*

Código					
Imagen					
Estructura conceptual		*Representaciones*		*Fenomenología*	
Campo conceptual	Campo procedimental	Verbal	Simbólico	Contexto matemático	Contexto extra matemático

Finalmente, para el llenado del instrumento se realizó la interpretación de cada una de las producciones de los estudiantes identificando las componentes del significado que surgieron en sus respuestas. En la figura 5 se muestra la respuesta del estudiante E5A, quien asocia dos referentes a la estructura de la ecuación cuadrática: uno conceptual, ubicándolo como una ecuación con la propiedad de tener potencia, y el otro de corte procedimental, asociado a la forma de resolver el problema con el uso de la raíz cuadrada. La representación semiótica que se usa es la verbal, y el sentido y la forma de uso quedan delimitados en un contexto matemático.

FIGURA 5. *Identificación de las componentes del significado en la respuesta de E5A*



Los datos obtenidos fueron analizados por separado, pues los ítems utilizados para cada grupo fueron diferentes. A continuación se presentan los resultados desagregados.

Resultados del grupo A

En las producciones de los estudiantes del grupo A la componente asociada a la *estructura conceptual* fue la que presentó mayor diversidad. Respecto del *sistema de representación semiótica* predominante, fue el verbal. Sólo dos estudiantes incluyeron en su descripción dos términos de manera simbólica: x *y* (x^2). El estudiante E2A propuso la x como la variable que se debe encontrar, y el estudiante E7A explicó que la ecuación cuadrática se representa con (x^2). Finalmente la *fenomenología* se mantuvo en el mismo contexto y en la misma situación del ítem propuesto; sólo el estudiante E20A relacionó este concepto con la solución de una medida o cuadrado.

Por lo anterior, la componente que permitió identificar la multiplicidad de significados de la ecuación cuadrática fue la estructura conceptual. Estos significados (tabla 1) se aglutinan en el campo procedimental. En este caso, 55% de los estudiantes (E21A, E2A, E19A, E10A, E3A, E17A, E20A, E14A, E15A, E18A y E11A) se concentran en las acciones o los procedimientos asociados a la ecuación cuadrática sin proponer propiedades ni características para el término, concepto o estructura asociados al campo conceptual. En contraparte, sólo 30% (E4A, E12A, E16A, E22A, E7A y E9A) incluyen elementos que caracterizan la estructura conceptual de la ecuación cuadrática, y 15% incluye características de ambos campos (E5A, E8A y E13A).

Para la componente conceptual, el referente más relevante fue que era una ecuación que incluye *una potencia al cuadrado*. Para el campo procedimental no se mencionaron razonamientos ni estrategias; sólo destrezas. La de mayor mención fue *resolver utilizando la raíz cuadrada*. Es importante mencionar que en la destreza de *resolver la ecuación* cuadrática, aunque acompañada de cómo hacerlo (mediante letras, números o con operaciones), no queda claro el sentido que tiene para los estudiantes; sin embargo, en el grupo B se encuentran componentes que permitieron describir un posible significado de lo que podría entenderse como la destreza de *resolver la ecuación*.

También se considera que una componente conceptual que forma parte de la ecuación es la noción de variable como incógnita; sin embargo, sólo cuatro estudiantes (E2A, E10A, E18A y E21A) asociaron este uso de la variable con el significado de la ecuación cuadrática (véase figura 6).

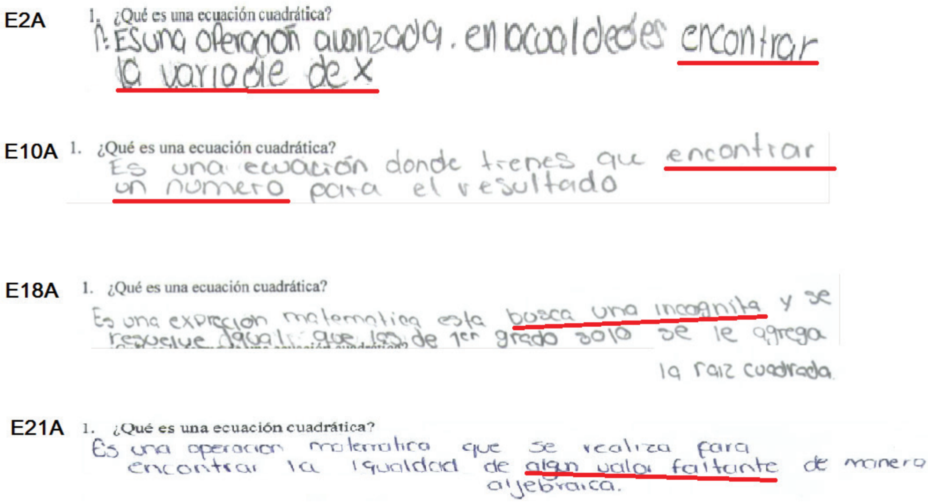
Otro resultado relevante es que sólo tres estudiantes (E5A, E8A y E13A), de los 20 que respondieron el instrumento, incluyeron en su significado de ecuación cuadrática componentes de los dos campos (conceptual

TABLA 1. *Estructura conceptual de los significados de la ecuación cuadrática en el grupo A*

Campo conceptual		Campo procedimental		Código
Operación		Encontrar	la igualdad para un valor faltante	E21A
			la variable x	E2A
		Realizar	multiplicar, sumar, restar y sacar raíz a un valor	E19A
Ecuación	Con dos soluciones			E4A
	Con potencia al cuadrado			E5A, E8A, E12A, E13A, E16A, E22A
		Encontrar	un número	E10A
		Calcular	en dos partes	E3A
		Resolver	con raíz cuadrada	E5A, E8A, E13A, E17A
		Realizar	con números y letras	E17A
Fórmula		Resolver	una medida o cuadrado	E20A
Método o proceso		Resolver	con raíz cuadrada	E14A
			con letras y números	E15A
Expresión matemática		Encontrar	la incógnita	E18A
		Resolver	con raíz cuadrada	E18A
	Se representa con (x^2)			E7A
	Lleva dos equis cuadrada			E9A
		Resolver	mediante letras	E11A

y procedimental) que clasifican cognitivamente a un contenido matemático escolar (véase figura 7). Y precisamente los elementos que conforman el significado de la ecuación cuadrática de estos estudiantes son los que se mencionan con más frecuenca. En contraparte, la descripción de E7A, E9A y E11A no contó con un referente conceptual (ecuación, operación, fórmula, expresión matemática, método o proceso) (véase figura 8).

Figura 6. *La incógnita en los significados de la ecuación cuadrática del grupo A*

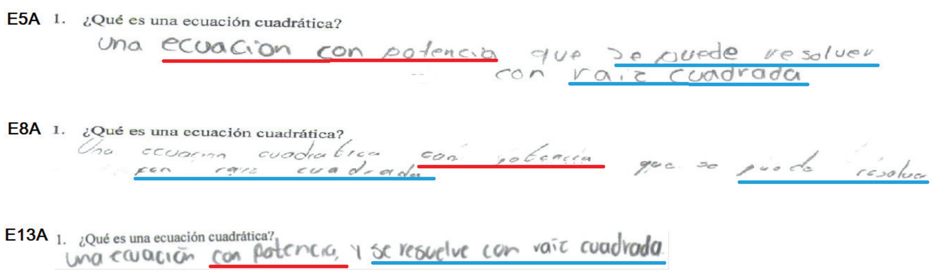

E2A 1. ¿Qué es una ecuación cuadrática?
R: Es una operacion avanzada. en igualdades encontrar la variable de x

E10A 1. ¿Qué es una ecuación cuadrática?
Es una ecuación donde tienes que encontrar un numero para el resultado

E18A 1. ¿Qué es una ecuación cuadrática?
Es una expresion matematica esta busca una incognita y se resuelve igual que las de 1er grado solo se le agrega la raiz cuadrada

E21A 1. ¿Qué es una ecuación cuadrática?
Es una operacion matematica que se realiza para encontrar la igualdad de algun valor faltante de manera algebraica.

Figura 7. *Significados del grupo A con categorías en el campo conceptual y procedimental*

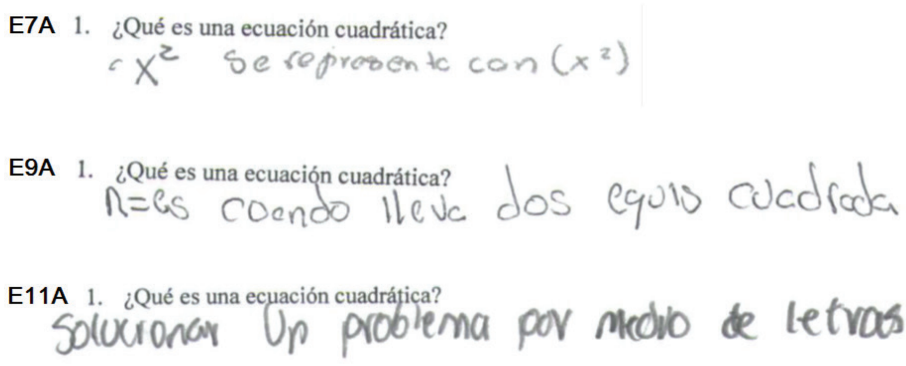

E5A 1. ¿Qué es una ecuación cuadrática?
Una ecuacion con potencia que se puede resolver con raiz cuadrada

E8A 1. ¿Qué es una ecuación cuadrática?
Una ecuacion cuadratica con potencia que se puede resolver con raiz cuadrada

E13A 1. ¿Qué es una ecuación cuadrática?
Una ecuación con potencia, y se resuelve con raiz cuadrada

Puesto que la estructura de un concepto matemático escolar se conforma por dos campos (conceptual y procedimental), se considera que si uno de éstos no está presente siempre se tendrá un significado parcial. En este caso, 85% de los estudiantes tiene un significado parcial de la ecuación cuadrática, donde predomina el campo procedimental, lo cual confirma la hipótesis de este estudio.

FIGURA 8. *Significados sin referente conceptual en el grupo A*


E7A 1. ¿Qué es una ecuación cuadrática?
x^2 se representa con (x^2)

E9A 1. ¿Qué es una ecuación cuadrática?
R= es cuando lleva dos equis cuadrada

E11A 1. ¿Qué es una ecuación cuadrática?
Solucionar un problema por medio de letras

Resultados del grupo B

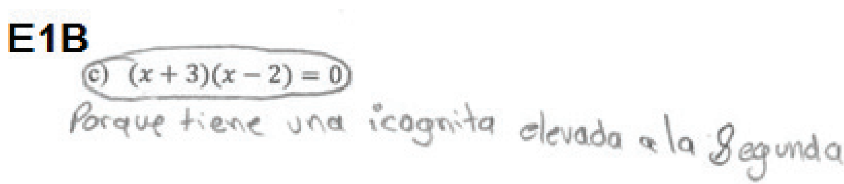
En el grupo B las respuestas de los estudiantes para las componentes *representaciones semióticas* y *fenomenología* tienen grandes similitudes con las respuestas del grupo A. De nueva cuenta en la componente de estructura conceptual se evidencia la multiplicidad de significados y algunas componentes del campo conceptual y procedimental que no se presentaron en el grupo A. Lo anterior se debe a la diferencia de ítems utilizados en cada tarea, donde si bien no se presenta un referente conceptual, sí se logra identificar las propiedades o las características que, según los estudiantes, debe cumplir una ecuación cuadrática. De esta manera la estructura conceptual identificada en las producciones del grupo B para la ecuación cuadrática se presenta en la tabla 2.

Los cinco estudiantes del grupo B reconocen que una propiedad del campo conceptual de la ecuación cuadrática consiste en incluir un término al cuadrado (véase figura 9). Esto coincide con el significado del campo conceptual más potenciado por el grupo A; es decir, que debe contener una potencia, en este caso al cuadrado. Por lo anterior, todos los estudiantes excluyeron el inciso *a:* $x + 4 = 0$ pues determinaron que no es una ecuación cuadrática.

Tabla 2. *Estructura conceptual de los significados de la ecuación cuadrática en el grupo B*

Campo conceptual	*Campo procedimental*	*Código*
Debe contar con los tres términos (la incógnita elevada a la segunda potencia, un número independiente y un número con una incógnita)		E1B
Debe tener x al cuadrado		E2B, E3B, E4B, E5B
	Se resuelve con una factorización	E1B, E2B, E4B

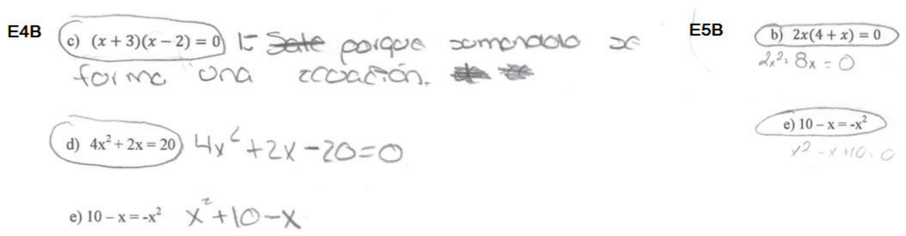
Figura 9. *Significado parcial de la ecuación cuadrática del E1B*



En las justificaciones de los estudiantes del grupo B para los incisos *b* y *c* se encontró el segundo significado más frecuente para este grupo de estudiantes, el cual reconoce a la ecuación cuadrática en su representación factorizada como una forma de resolverla. Por esta razón, cuatro de los cinco estudiantes encerraron el inciso *c:* $(x + 3)(x - 2)=0$, sin requerir su desarrollo. Sin embargo, en el inciso *b:* $2x(4 + x) = 0$, aparece un significado erróneo presentado por E1B en el sentido de que la ecuación debe incluir los tres términos (cuadrático, lineal e independiente). Otro resultado relevante es que el campo procedimental evidenciado por los estudiantes E1B, E2B y E4B, siendo la factorización una forma de resolver la ecuacún (tabla 2), permite comprender el significado propuesto por el estudiante E3A al referir que la ecuación cuadrática se calcula en dos partes (tabla 1).

También se observó que para los estudiantes E4B y E5B reconocer su forma canónica es importante para justificar si es o no una ecuación cuadrática. Por lo anterior, necesitaron realizar operaciones entre diferentes representaciones de la ecuación para obtener su forma $ax^2 + bx + c = 0$ (véase figura 10). De esta manera, en el grupo B el campo procedimental

FIGURA 10. *Desarrollo de los estudiantes de la ecuación a su forma*



jugó un papel importante, pues es la manipulación de la expresión cuadrática o la manera de resolverla lo que permite reconocerla. Aquí hay que hacer referencia a las destrezas algebraicas y aritméticas que realiza el estudiante con respecto al concepto.

Reflexiones y conclusión

De acuerdo con las respuestas presentadas por los estudiantes de los grupos A y B, se podría inferir que la enseñanza acentúa la formulación y la resolución de ecuaciones cuadráticas. En los significados mostrados por ambos grupos se pudo evidenciar que el campo procedimental que describe la estructura conceptual de la ecuación cuadrática puede estar asociado a los inconvenientes que Gavilán (2011) propone al pasar de la aritmética al álgebra. De ahí los argumentos de los estudiantes al expresar la ecuación cuadrática como un cálculo por medio de su raíz cuadrada. Es decir, suponen que si un término a la potencia 2 puede resolverse por medio de su raíz, entonces esta destreza les permite generalizarla y asociarla a la estructura conceptual de la ecuación cuadrática. Consecuentemente, esto conlleva el hecho de que procedimentalmente los estudiantes expresen la ecuación cuadrática en su forma canónica (véase figura 10) para lograr que cumpla con la propiedad asignada de tener la incógnita elevada al cuadrado (véase figura 9).

Ligado a lo anterior, otro conflicto que se ha identificado es que la incógnita aparece con poca frecuencia (20%) como una noción básica en la estructura conceptual de la ecuación cuadrática. Al parecer, los estudiantes ven la solución de una ecuación cuadrática como un solo valor, lo cual podría deberse a la generalización de la aritmética al álgebra ($\sqrt{(2^2)} = 2$). Lo anterior propicia que vean a la incógnita como una raíz que satisface simultáneamente a la ecuación cuadrática. Dado este resultado, será pertinente el rol de la variable como un elemento importante en la enseñanza del álgebra, con el objetivo de que el estudiante promueva los diferentes usos de la variable en contextos y situaciones que le permitan reconocerlos como diferentes. Lo anterior podría complementar, en el caso de la ecuación cuadrática, las tres componentes semánticas del significado. Así, se promoverá un sentido más funcional y formas de uso que ahora parecen ausentes en el conocimiento matemático evidenciado por los estudiantes.

Por otra parte, si bien las tareas pudieron incidir en los significados que se presentaron, se esperaba que los estudiantes, al menos los del grupo A, se refirieran a la ecuación cuadrática como un objeto útil para resolver problemas que fueran más allá de su formulación y su resolución en contextos matemáticos simples. Esto implica que las ideas matemáticas de los estudiantes están más relacionadas con los procedimientos y las reglas asociados a la resolución de la ecuación cuadrática que a sus modos de uso en situaciones más funcionales. Esta forma de enseñar la ecuación cuadrática (como una regla vacía de significados funcionales) implica que el estudiante recuerde sus características sintácticas, y tal vez pueda describirlas, pero no siempre podrá utilizarlas correctamente en una situación dada, debido a que se le ha provisto de significados parciales durante su instrucción. Asimismo, derivado de este estudio, se considera que los aprendizajes significativos de un concepto son los que están relacionados con sus diferentes usos y representaciones y no solamente con la solución a base de técnicas y/o procedimientos.

Referencias

Acosta, C. (2017). *Una propuesta de intervención desde el análisis didáctico. La enseñanza y aprendizaje de la ecuación cuadrática* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Zacatecas. Repositorio Institucional Caxcan. http://ricaxcan.uaz.edu.mx/jspui/handle/20.500.11845/1227.

Cañadas, M., & Gómez, P. (2014). *Apuntes sobre análisis de contenido.*

Módulo 2 de MAD 3 (manuscrito no publicado). Perú: Universidad de los Andes.

Fernández-Plaza, J. A., Castro-Rodríguez, E., Estrella, M., Martín-Fernández, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Vílchez-Marín, M. (2016). Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández & A. Berciano (Eds.), *Investigación en educación matemática XX* (pp. 237-246). México: SEIEM.

Gavilán, P. (2011). Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿Puede ayudar el aprendizaje cooperativo? *Investigación en la Escuela,* 73, 95-108.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada.

Herrera, E., Velasco, V., y Ruiz-Hidalgo, J. (2017). Comparando textos de cálculo: el caso de la derivada. *PNA, 11*(4), 280-306.

Pino-Fan, L. (2017). Contribución del enfoque ontosemiótico a las investigaciones sobre didáctica del cálculo. En *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-16). Granada: Universidad de Granada.

Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículum escolar de matemáticas. *Revista EMA, 1*(1), pp. 4-24.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículum de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Horsori.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*(1), 39-63.

Rico, L., & Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez & M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática: Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Comares.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J., & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria: El caso de los números naturales. *Suma, 1*(1), pp. 7-23.

Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J., Fernández-Plaza, J., Castro, E., Martín, E., & Vílchez, M. (2015). Concepciones y significados en una tarea matemática escolar. *Suma, 80*(2015), 67-76.

SEP (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas. Educación secundaria. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación.* https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/biblioteca/secundaria/mate/1-LPM-sec-Matematicas.pdf

Soto, D., & Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión: Una visión socioepistemológica. *Bolema, 28*(5), 152-154.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática, 18*(3), 5-38.

Capítulo 2. Una propuesta didáctica para promover el aprendizaje del concepto de factorización de polinomios algebraicos

Gerardo Irwin Téllez Vega
José Dionisio Zacarías Flores
https://orcid.org/0000-0003-2431-5341
y José Antonio Juárez López
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
(México)

Resumen

En este trabajo de investigación se presenta la aplicación de un material que pretende apoyar al estudiante de bachillerato en su comprensión acerca del tema de la factorización de polinomios algebraicos. Con base en la revisión de la literatura se encontró que existen dificultades acerca del aprendizaje de la factorización, por lo cual se elaboró la propuesta de enseñar el tema desde un punto de vista geométrico que ayude a la abstracción de las operaciones y rompa con los obstáculos que se generan con el simple manejo sintáctico de las expresiones matemáticas. Con base en la teoría de Duval, se piensa que al cambiar el registro de representación los estudiantes pueden acceder al estudio del objeto matemático a través de otra representación, como las figuras geométricas. En la búsqueda de un material que pudiera adaptarse al objetivo planteado se encontró un *software* de computadora denominado Caja de Polinomios. Esta investigación se enfocó en explorar los beneficios y las limitaciones de ese *software* en estudiantes de bachillerato. Este estudio contiene el análisis de la aplicación de las actividades y las conclusiones de esta propuesta.

Palabras clave: Caja de Polinomios, factorización, aprendizaje significativo.

Introducción

En la materia de álgebra siempre hay dificultades cuando el alumno comienza con el estudio de las letras como representación de un número general, como un elemento que cambia de valor o como una relación entre valores. Este paso de la aritmética al álgebra en general presenta dificultades matemáticas a los escolares, lo cual comienza desde la educación secundaria y continúa hasta grados superiores del marco curricular.

En el caso del álgebra, hablando de las letras como números generales, se aborda un tema llamado *factorización de polinomios* y en este tópico se presentan diversos obstáculos en la captación de los tratamientos necesarios para la resolución de las operaciones de carácter algebraico. Como señala Caballero y Juárez (2016):

> Los alumnos de nivel superior efectivamente tienen problemas de maduración, tales como aplicar parcialmente una fórmula, omitir signos, desarrollar expresiones algebraicas. Estos problemas no son de fácil solución; sin embargo, el profesor los puede detectar y resolver si existe la cooperación del alumno. No obstante, otras veces se han observado problemas de maduración de tal magnitud que pareciera que se originaron desde varios niveles anteriores (p. 35).

En ese trabajo se hace referencia a la factorización de polinomios ya que, en algunos casos, ésta es necesaria para realizar la adición o la sustracción de fracciones algebraicas, entre otras operaciones matemáticas que requieren un manejo algebraico.

Baltazar, Rivera, Martínez, Cárdenas y Anaya (2015) reportan las dificultades de estudiantes de octavo grado (un equivalente a segundo de secundaria) en la factorización de polinomios. Su estudio hace una serie de observaciones relacionadas con las dificultades y los errores que presentan algunos alumnos al enfrentarse a los procesos que son necesarios para factorizar los términos algebraicos que se les plantean. La mayoría de las equivocaciones cometidas por los estudiantes, a las que se refiere ese estudio, están relacionadas con la utilización de los signos, con el valor que les atribuyen a las letras y con la forma de trabajo en grados anteriores, así como también con la concentración y el interés por la asignatura. Los desaciertos más frecuentes analizados por los investigadores ocurren por la mala utilización e interpretación de los signos y por la alteración de las operaciones, lo cual genera conflictos en los alumnos a la hora de resolver los ejercicios.

Un ejemplo de los errores cometidos en la factorización se produce por la aplicación parcial de la regla de factorización por factor común: “Este error se presenta cuando el alumno intenta separar los factores comunes, pero no recuerda el paso siguiente del procedimiento, dejando inconclusa la operación, o no verifica la validez del factor común, así como no respeta las reglas de los exponentes del citado factor” (García, 2010).

Otro ejemplo lo proporciona Méndez (2012):

> Al factorizar polinomios cuadráticos: primero, no comprenden que deben encontrar dos polinomios irreducibles, que al multiplicarlos den la expresión original, y el segundo aspecto, encontrar dos números, que dependen de operaciones claramente establecidas, entre los coeficientes del polinomio y que permitan su factorización. Estas dos dificultades no pueden ser resueltas sólo considerando el marco algebraico, como se evidencia en el análisis de los procedimientos y conocimientos que hay que poner en juego al factorizar (p. 31396).

El análisis de los errores que cometen los alumnos al realizar operaciones matemáticas sirve para observar su aprendizaje, darle un seguimiento y, en el caso del docente, identificar la problemática acerca de los temas que les presentan mayor dificultad, “ya que la enseñanza de la factorización en ambiente de lápiz y papel requiere de reglas que clasifican los polinomios y necesitan de su manejo sintáctico” (Mejía, 2008).

De acuerdo con Baltazar *et al.* (2015) “se deben implementar metodologías que contengan recursos didácticos y clases teórico-prácticas más dinámicas que despierten el interés en el estudiante y, a través de esto, lograr que desarrollen habilidades mentales que fortalezcan su aprendizaje” (p. 678).

Revisando trabajos de investigación y artículos referentes al tema de factorización, descubrimos que hay estudios en habla hispana que fomentan la enseñanza de la factorización con materiales tangibles (Méndez, 2012; Ospina, 2015; Rubio, 2013; Salazar, Jiménez & Mora, 2013). Entre ellos, los trabajos de Soto, Mosquera y Gómez (2005) y Villarroel (2014) proponen la Caja de Polinomios como herramienta didáctica para el aprendizaje en operaciones con polinomios y factorización, que al parecer es clave para lograr un aprendizaje significativo.

Por lo que se plantea la pregunta: ¿qué beneficios y qué limitaciones representará la implementación de la Caja de Polinomios en el nivel medio superior de nuestra región para el aprendizaje de la factorización de polinomios?

En nuestro estudio, debido a la emergencia sanitaria por Covid-19 fue imposible realizar la observación directa de los estudiantes, lo que nos orilló a utilizar una versión digital del material y recurrir al uso de la plataforma Zoom para captar las interacciones que requeríamos.

Marco teórico

La factorización constituye un cambio en la representación de los términos algebraicos y representa un polinomio como el producto de sus factores o sus divisores.

El concepto de *factorización* se desarrolla de forma operacional desde la secundaria. Cosntituye una manipulación de expresiones, porque antes de realizar cualquier tratamiento uno debe reconocer el tipo de expresión que se va a cambiar, tomando en cuenta que existe un procedimiento particular para un polinomio determinado.

Por ejemplo, si al alumno se le presenta el término $5x^2y$, sabe que sus factores quedarán como: $5x^2y \rightarrow 5 \cdot x \cdot x \cdot y$; pero si se le presenta el polinomio $x^2 + 6x + 9$, está consciente que éste descompone en factores de distinta naturaleza (Méndez, 2012).

Como parte del proceso de factorizar polinomios, un primer paso del estudiante consiste en que reconozca el tipo de polinomio que va a tratar, para después seleccionar el método o los métodos que le permitean arribar a la solución (dependiendo del ejercicio).

> Ante una expresión general, dada o construida por el propio estudiante, éste tiene que interpretar los símbolos involucrados como números generales, los cuales representan cantidades indeterminadas que no se pueden, ni es necesario, determinar. Tienen que manipular este tipo de expresiones (por ejemplo, factorizar o simplificar) cuando así lo requiere el problema, sin necesidad de asignarle valores específicos a las variables (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005, p. 31).

Según Duval (1993, citado en Oviedo *et al.,* 2011), la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en dos características fundamentales:

- El uso de más de un registro de representación semiótica.
- La creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos, los cuales constituyen un símbolo de progreso de conocimiento.

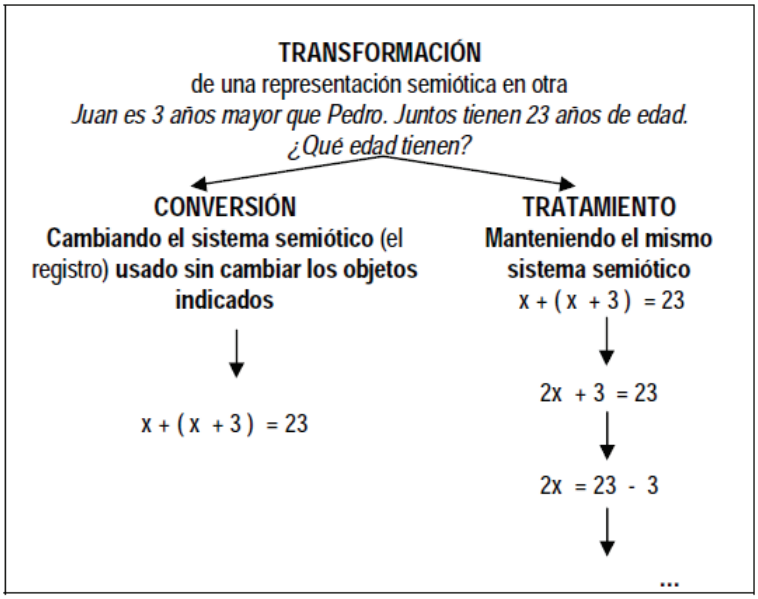
De acuerdo con Duval, un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

1. La presencia de una representación identificable.
2. El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación en el mismo registro en que ha sido formulada.
3. La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial; es decir, dos tipos de registros disímiles, con diferentes representaciones.

Ningún tipo de procesamiento matemático se puede realizar sin utilizar un sistema semiótico de representación, porque el procesamiento matemático siempre implica la sustitución de alguna representación semiótica por otra (Martínez y Hernández, 2016).

Según Ausubel, Novak y Hanesian (1983),

FIGURA 1. *Transformación, conversión y tratamiento*



FUENTE: Duval (2006).

> la esencia del proceso de aprendizaje significativo es que ideas expresadas simbólicamente se relacionen, de manera sustantiva (no literal) y no arbitraria, con lo que el aprendiz ya sabe, o sea, con algún aspecto de su estructura cognitiva específicamente relevante (*i. e.*, un subsumidor) que puede ser, por ejemplo, una imagen, un símbolo, un concepto o una proposición ya significativos (p. 41).

Por *asimilación* entendemos el proceso mediante el cual "la nueva información es vinculada con aspectos relevantes y preexistentes en la estructura cognoscitiva, proceso en que se modifica la información recientemente adquirida y la estructura preexistente" (Ausubel *et al.*, 1983, p. 71). Esto implica que las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" de las primeras. El subsumidor prácticamente no se modifica y la nueva información se hace parte de esa estructura de conocimiento.

Método

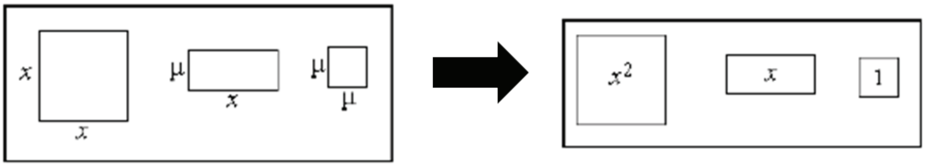
La metodología del estudio es *instrumental de casos de tipo cualitativo,* por lo cual se utilizará la descripción para comprender los resultados de cada situación particular. En este trabajo se desarrollaron actividades para trabajar con la Caja de Polinomios, versión digital, y se plantearon ejercicios tomados de los libros recomendados en el plan de estudios de la Subsecretaría de Educación Media Superior. En esta fase del estudio se identificaron los tipos de tareas y los métodos que deben utilizarse con el *software* de la Caja de Polinomios, una herramienta didáctica que consta de un tablero, cuadrados y rectángulos que, de acuerdo con *Soto et al.* (2005), permiten el desarrollo del álgebra de polinomios.

La Caja de Polinomios conjuga los aportes de cuatro matemáticos famosos: Euclides, quien en su libro de *Los elementos* y en la proposición 43 del libro I, orienta sobre la construcción de fichas rectangulares de distintas dimensiones, pero de igual área, y se apoya en la proposición 34 del mismo texto mediante la cual demuestra que cualquier diagonal de un paralelogramo lo divide en partes iguales, y asimismo utiliza la noción común según la que "si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales". El segundo matemático es Thábit Ibn Qurra al Harrani, especialista dedicado a la contemplación de las cantidades y quien, de manera generosa, presenta el concepto de *homogeneización,* el cual permite abordar los polinomios por medio del manejo de las áreas de rectángulos, atendiendo a las dimensiones de la base y la altura. Por último, el juego extiende su aplicación a polinomios con coeficientes negativos con la utilización del plano cartesiano, cuya creación se debe a Pierre de Fermat y a René Descartes (Villarroel, 2014).

Los autores rescatan el pensamiento matemático de Thábit Ibn Qurra, quien, al observar que una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + px + q = 0$ no adquiere una representación geométrica adecuada por la imposibilidad de sumar áreas con longitudes y con puntos, propone utilizar una unidad de medida μ para expresar la ecuación anterior como $x^2 + p\mu x + q\mu^2 = 0$, por lo que ésta puede interpretarse geométricamente como la suma de áreas.

Esta imagen sintetiza la idea de homogenización de Thábit y da origen

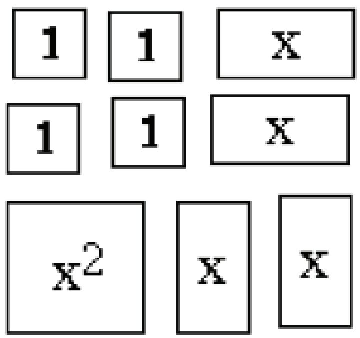
FIGURA 2. *Idea de homogenización de Thábit*



FUENTE: Soto *et al.* (2005).

a los rectángulos x^2, x, 1. Con estos rectángulos básicos es posible representar geométricamente un polinomio cuadrático con coeficientes enteros. Así, podremos representar geométricamente un polinomio $x^2 + 4x + 4$ como:

FIGURA 3. *Representación de un polinomio con figuras rectangulares*



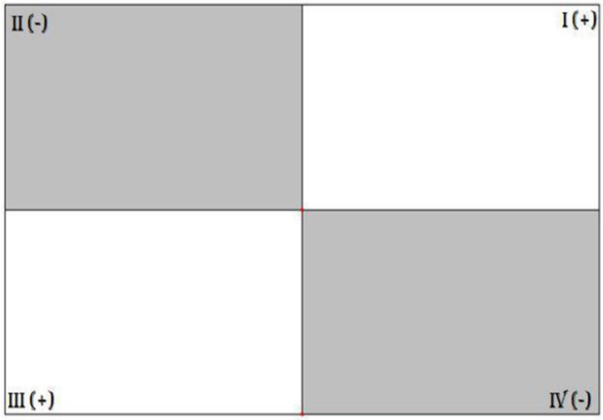
FUENTE: Villarroel (2014).

Sin embargo, también se pueden representar polinomios con coeficientes negativos. Ante este escenario Soto *et al.* (2005) proponen la utilización del plano cartesiano como un sistema auxiliar para la factorización de los términos negativos. Estos autores sostienen que las áreas de los rectángulos que se ubiquen en el primer o tercer cuadrantes se consideran con coeficientes positivos, y los que se ubiquen en el segundo o cuarto cuadrantes se consideran con coeficientes negativos.

Con este complemento auxiliar ahora podremos representar el polinomio $-2x^2 + 3x -1$ de la siguiente manera:

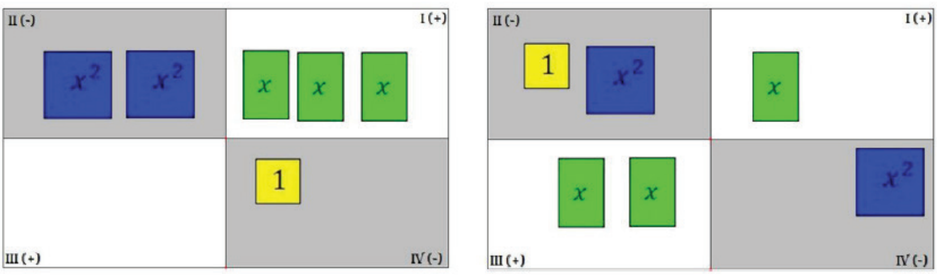
El material utilizaa cuadrados y rectángulos que se relacionan por medio de la longitud de sus lados, y hallar el valor del área de las figuras sirve

FIGURA 4. *Tablero de la Caja de Polinomios*



FUENTE: Villarroel (2014).

FIGURA 5. *Representación del polinomio* $-2x^2+3x-1$



FUENTE: Villarroel (2014).

para la representación de los términos algebraicos, por lo que en su estructura cognitiva los estudiantes lo relacionarán por asimilación puesto que son temas que ya había visto en grados académicos anteriores.

El material logra hacer la transformación de las expresiones algebraicas con figuras geométricas, convirtiéndolas al sistema de la Caja de Polinomios, y utiliza este mismo sistema para hacer los tratamientos necesarios con el fin de resolver las operaciones con polinomios.

Fernando Soto, Edwin Insuasty y Jesús Insuasty, profesores adscritos a los grupos de investigación Gescas y Galeras.net, de la Universidad de Nariño, diseñaron una versión digital que ya está a disposición de la comunidad educativa.

Figura 6. *Menú tutorial de la versión digital de la Caja de Polinomios*

Fuente: Insuasty *et al.* (2013).

"Esta herramienta digital tiene sus bases en la Caja de Polinomios y uno de sus principales objetivos es servir como recurso para el trabajo dentro y fuera del aula, además de promover actitudes positivas hacia las matemáticas" (Fernández y Ocoró, 2015, p. 32).

Con las actividades de esta herramienta se identificaron las estrategias que desarrollan los estudiantes, así como las dificultades que enfrentan con la representación de la Caja de Polinomios, es decir, con la valencia instrumental y semiótica.

La población de estudio estuvo conformada por jóvenes de nivel medio superior de Puebla y Tlaxcala que contaban con una computadora, conexión a internet desde casa y las aplicaciones y los requisitos del programa. El contacto con los participantes tuvo lugar a través de la plataforma Zoom, ya que ésta permitió la interacción con los equipos de cómputo de los participantes, quienes pudieron compartir sus pantallas para que nosotros pudiéramos visualizar lo que ellos realizaban, además de que la plataforma permitió la grabación de todas las sesiones que se llevaron a cabo.

Las actividades permitieron revisar las características del objeto matemático analizado e hicieron posible constatar el desarrollo de la comprensión de la factorización de polinomios gracias a los ejercicios que realizó el estudiante.

El análisis de los resultados se llevó a cabo con base en las actividades de los participantes y en las evidencias que nos enviaron.

Análisis de resultados

Previamente a las sesiones con la Caja de Polinomios se aplicó un cuestionario a los participantes que funcionó como organizador para que éstos recordaran las fórmulas para obtener el área de cuadrados y rectángulos y para que se acostumbraran al manejo de las literales como representaciones de los lados de las figuras.

Asimismo, se envió a los alumnos una serie de figuras geométricas sobre las cuales tenían que reescribir las fórmulas, y proponer otras, con el fin de que relacionaran las letras con altura, base, apotema, perímetro o área de esas figuras. Todo esto se realizó en un formulario de Google (véase figura 7).

En las siguientes capturas de pantalla se observan las respuestas de algunos estudiantes. Ahí se muestran las sugerencias de los participantes: cambiaron las literales de los lados de las figuras y las relacionaron con la aplicación de la fórmula de área que correspondía a cada una.

FIGURA 7. *Formulario de Google: organizador previo*

En la figura 8, una alumna mostró que se pueden cambiar las literales que representan los lados del polígono que se le proporcionó y aplicar la fórmula correcta para determinar su área.

Toda la información acerca del *software* y su instalación se les hizo llegar a los estudiantes vía correo electrónico. Se realizaron sesiones previas en Zoom para resolver dudas de instalación debido a que algunos participantes contaban con sistema operativo iOS y otros con Windows.

Las primeras sesiones trataron acerca de la interfaz del programa: cómo usar los botones, cómo acceder a tableros y cómo armar las figuras. Una vez que se confirmó que eran aptos en el uso del *software* se prosiguió con las actividades que llevarían a la factorización de polinomios.

La aplicación de las actividades se realizó a través de la plataforma Zoom, elegida por las diversas formas que ofrece este *software* para interactuar con los participantes: compartir pantalla y grabar las sesiones. Incluso los participantes podían obtener permiso del anfitrión para controlar el mando de la computadora y realizar las actividades de manera personal. Esto garantizó suficiente interacción con los participantes en la actividad. Cabe mencionar que la mayoría de las sesiones fue grabada con el fin de retomarlas y analizar las actividades que realizaron los estudiantes.

En el caso de la figura 10, con el programa Caja de Polinomios la participante pudo factorizar de manera correcta el polinomio, un polinomio perteneciente a la clasificación de factorización por agrupación de términos.

FIGURA 8. *Respuesta de una estudiante sobre la obtención del área de un hexágono regular*

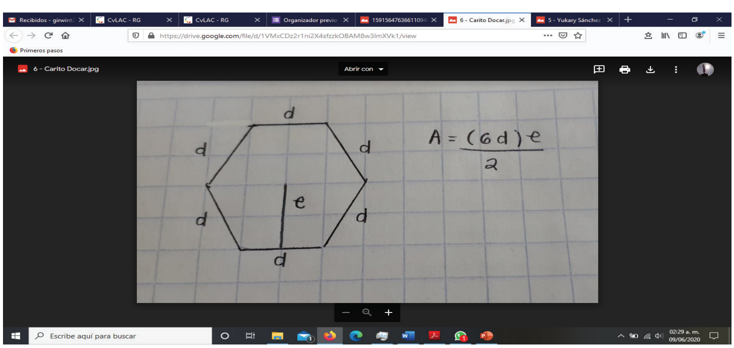


Figura 9. *Factorización del polinomio $x^2 - 9$ con apoyo de Zoom y el material*

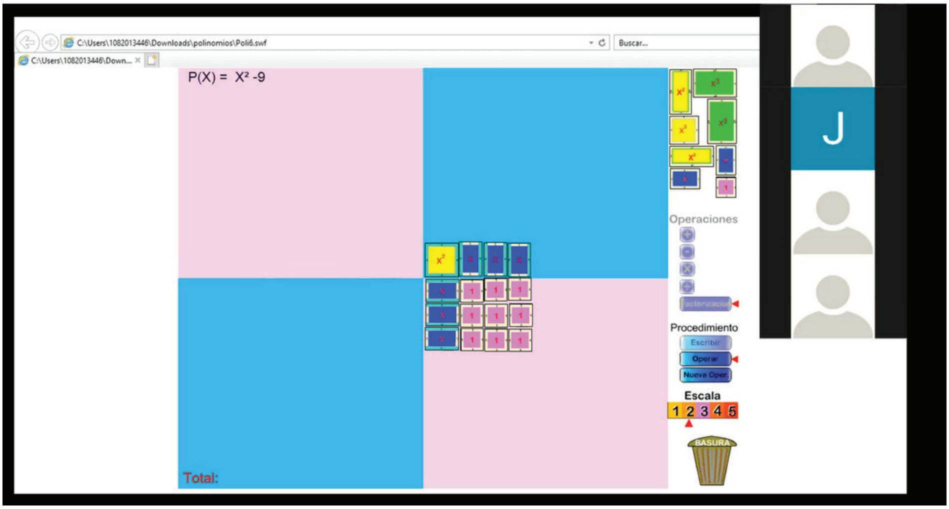
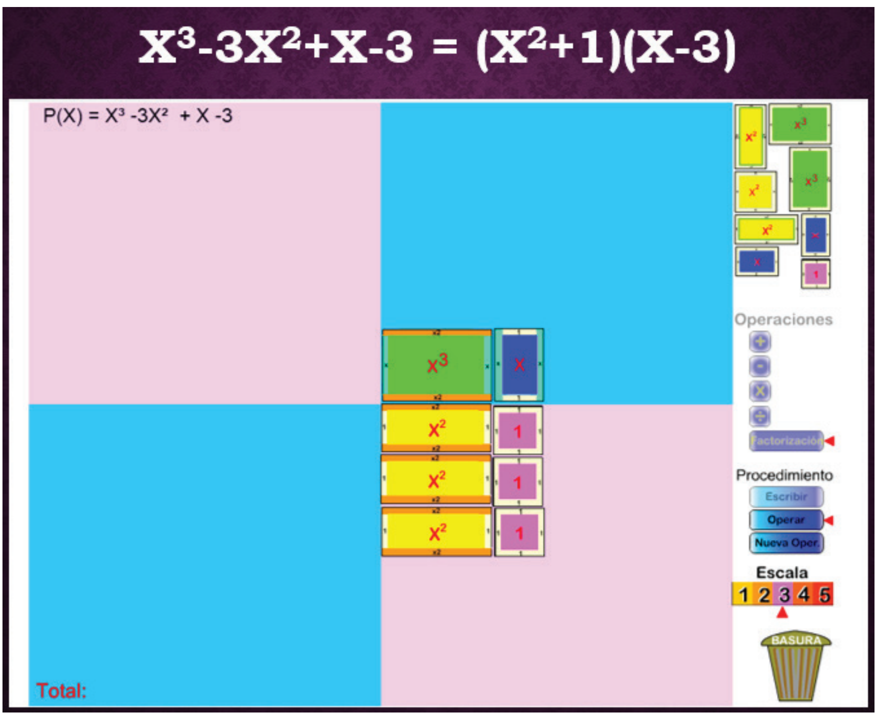


Figura 10. *Factorización del polinomio $x^3 - 3x^2 + x - 3$*



En la figura 11 el participante realizó la factorización del polinomio, obteniendo una figura con el menor número de fichas. Los pares de fichas que agregó se encuentran en zonas opuestas, por lo cual su estructura sí es viable.

FIGURA 11. *Factorización del polinomio* $4x^2 - 1$

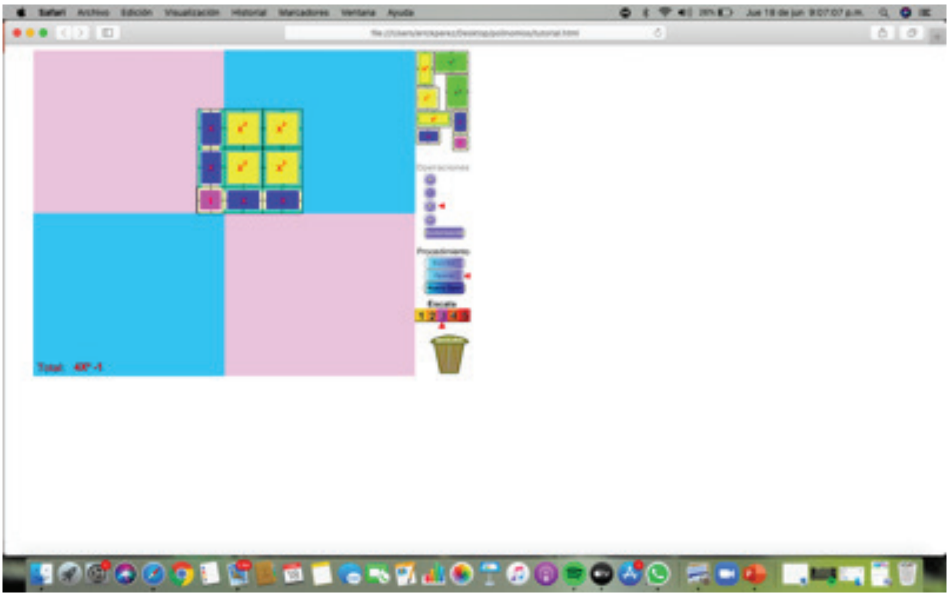
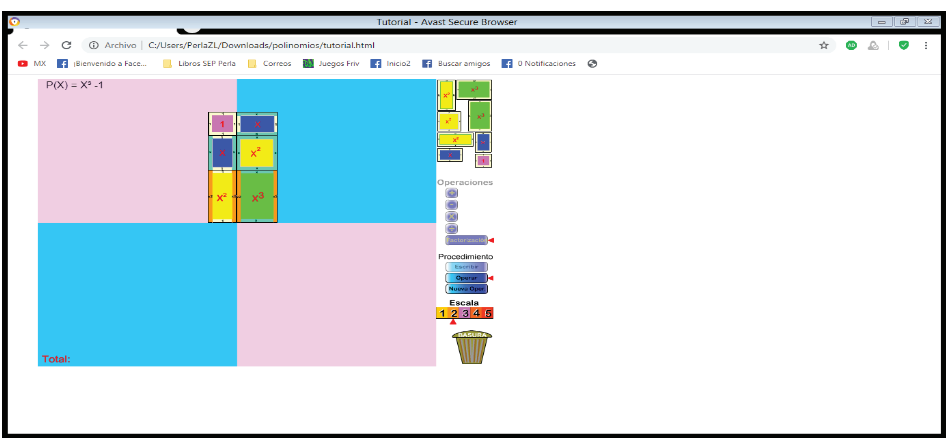


FIGURA 12. *Factorización el polinomio* $x^3 - 1$



En la figura 12 la participante logró factorizar el polinomio $x^3 - 1$ con el *software,* polinomio perteneciente a la clasificación de diferencia de cubos. Se puede ver que cumplió correctamente con su estructura, pues la construyó con el menor número de fichas, y es viable pues colocó los pares de fichas agregados en zonas opuestas del tablero.

Conclusiones

Como sostienen los autores de este texto, la Caja de Polinomios, empleada adecuadamente por el profesor, puede hacer que la clase de matemáticas deje de ser aburrida y que el estudiante despierte su interés por lo que está haciendo.

Varios participantes en este estudio aseguraron que se les hizo más dinámico el trabajo con la Caja de Polinomios, pues les sirvió para ensayar otra forma de hacer sus operaciones, más rápida y más sencilla, además de que pueden retroalimentar sus operaciones ya que el *software* está programado para advertirles que han cometido un error, lo cual sirve para que ellos mismos se corrijan y de ese modo construyan su aprendizaje.

Podemos concluir que la Caja de Polinomios cumple con la teoría de las representaciones semióticas, ya que con este material se llevó a cabo la transformación de una representación semiótica por otra; tuvo lugar una conversión, al pasar de la escritura algebraica a la representación geométrica, y se realizaron tratamientos de las operaciones en la Caja de Polinomios, que constituye el sistema semiótico que se mantuvo presente.

Ahora, puesto que las figuras geométricas que utilizamos son cuadrados y rectángulos, son de fácil asimilación para los estudiantes, pues ya estaban presentes en su estructura cognitiva. Los términos algebraicos y la relación con las fórmulas de área fueron proprocionados de forma estructurada y no arbitraria, lo cual se hizo gradualmente con los jóvenes durante todas las sesiones. Por lo anterior, podemos concluir que el material presenta características potencialmente significativas.

Con esta propuesta también se sientan las bases para la investigación o la creación de nuevo *software* para el aprendizaje del álgebra y de otros conceptos matemáticos que se puedan expresar en otro registro de representación, para su mejor comprensión.

Como afirman los participantes en esta investigación, existe una gran cantidad de mejoras que podrían implementarse a este *software*. Por ejemplo, el arrastre de las fichas al tablero; que se puedan empalmar unas con otras; que se puedan mover todas las fichas a la vez; que, si cambian su escala, las fichas no pierdan su posición y se deba hacer un reacomodo; que cuando se coloquen más de 11 fichas de X, la pantalla las represente correctamente, etcétera. En síntesis, este programa es muy útil, pero se puede mejorar o servir de base para la creación de uno nuevo.

Sin embargo, lo que se pretende con este estudio es que los docentes de matemáticas busquen materiales como éste para implementarlo en el aula como recurso didáctico con el fin de combatir el rezago escolar, la apatía y el desinterés hacia la materia de matemáticas.

En este trabajo, así como en el de los autores, se recomienda que, si se va a implementar el uso de la Caja de Polinomios, se haga desde el punto de vista matemático para que no se convierta en un juego más, y que conserve su riqueza matemática y su poder didáctico.

Con esta herramienta sólo se pueden trabajar polinomios con una sola variable y hasta de tercer grado. Queda a expensas de quien quiera implementar este material, el diseño de secuencias o metodologías que puedan ampliar estas posibilidades, pues se pueden crear más fichas, pero ya dependerá de la creatividad, la enseñanza y los objetivos que se planteen.

Hará falta un estudio a largo plazo, con una secuencia didáctica en el programa escolarizado para medir el aprovechamiento y el aprendizaje del álgebra básica con la Caja de Polinomios, puesto que esta investigación sólo se centró en una sola temática.

Referencias

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo* (2ª ed.). México: Trillas.

Baltazar, A., Rivera, J., Martínez, R., Cárdenas, H., & Amaya, T. (2015). Errores y dificultades que presentan los estudiantes de octavo grado al factorizar polinomios. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 28,* 678-684. https://www.clame.org.mx/documentos/alme 28.pdf

Caballero, E., & Juárez, J. A. (2016). Análisis y clasificación de errores en la adición de fracciones algebraicas con estudiantes que ingresan a la universidad. *Revista Números, 91,* 33-56. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/91/Volumen_91.pdf

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9,* 143–168. http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La habilidad para cambiar el registro de representaci?n.pdf

Fernández, D., & Ocoró, D. (2015). *Caja de Polinomios. Web Móvil* (Informe final de grado). Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia. http://biblioteca.udenar.edu.co:8085/atenea/biblioteca/91288.pdf

García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura* (Trabajo de fin de máster). Universidad de Granada, España. https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose_Garcia.pdf

Insuasty, E., Soto, O., & Insuasty, J. (2005). *Caja de Polinomios* (versión 1.1) [software de computadora]. Windows. Universidad de Nariño, Colombia.

Martínez, M., & Hernández, L. (2016). Importancia de las representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. *Saberes y Ciencias,* 50. http://www.viep.buap.mx/recursos/documentos/dgdc-saberesyciencias-050.pdf

Mejía, M. (octubre de 2008). *La factorización de polinomios en un ambiente CAS y lápiz/papel* [Taller]. IX Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Valledupar, Colombia. http://funes.uniandes.edu.co/947/1/16Taller.pdf

Méndez, T. (2012). Marco figural como medio para factorizar polinomios cuadráticos. *Bolema: Mathematics Education Bulletin, 26*(44), 1395-1416. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000400013

Ospina, M. (2015). *Guía didáctica para el aprendizaje de la factorización en estudiantes del CLEI IV del ITM* (Trabajo final de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Repositorio Institucional de la Universidad Nacional de Colombia. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/56850

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2011). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria, 13,* 29-36. https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112

Rubio, G. (2013). *Proceso de estudio de la factorización de polinomios mediante el uso de Algeblocks desde la TAD* (Proyecto de grado). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/6759

Salazar, V., Jiménez, S., & Mora, L. (noviembre de 2013). *Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización* (Contribución a Actas del Congreso). Primer Congreso de Educación Matemática de América Central y del Caribe, Santo Domingo, República Dominicana. http://funes.uniandes.edu.co/2791/

Soto, F., Mosquera, S., & Gómez, C. (2005). La Caja de Polinomios. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria, 13*(1), 83-97. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=46800108

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa*. México: Trillas.

Villarroel, J. M. (2014). *Propuesta para la enseñanza de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y el proceso de factorización de polinomios, con la herramienta didáctica "Caja de Polinomios", en estudiantes de grado octavo de la I. E. María Cano del municipio de Medellín* (Tesis o trabajo de investigación). Universidad Nacional de Colombia. Repositorio Institucional de la Universidad Nacional de Colombia. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/51789

Capítulo 3. Identificación de patrones en matrices cuadradas y sus determinantes por medio de herramientas digitales

Marcos Campos Nava
https://orcid.org/0000-0002-7534-3193
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (México)
Agustín Alfredo Torres Rodríguez
https://orcid.org/0000-0001-9112-3070
Tecnológico Nacional de México-Instituto Tecnológico de Atitalaquia (México)

Resumen

En esta propuesta se promovió el uso de la función de la hoja de cálculo que incorpora GeoGebra y otras aplicaciones para generar matrices cuadradas a partir de éstas, a las cuales se les puede calcular el determinante. El objetivo fue dejar de centrar la atención en el proceso algorítmico del cálculo de determinantes a lápiz y papel, que si bien, es un aprendizaje esperado en un curso de álgebra lineal, suele resultar un procedimiento tedioso cuando la dimensión de las matrices es de cuatro por cuatro o superior. Se planteó implementar una tarea de aprendizaje como alternativa que fomentara la identificación de patrones.

Para esta tarea se propusieron dos casos particulares: en el primero, la idea fue generar matrices cuadradas cuyas entradas sean una sucesión de números naturales consecutivos, y en el segundo, las matrices cuadradas cuyas entradas por fila o columna sumen cero. Con lo anterior se esperaba que los estudiantes fueran capaces de identificar algunos patrones que generan matrices con determinante nulo, para posteriormente plantear conjeturas y tratar de justificarlas. Lo anterior, a partir de los aprendizajes previos sobre matrices cuadradas y sus determinantes.

Palabras clave: herramientas digitales, determinantes, identificación de patrones.

Introducción

Cuando hablamos de un curso de álgebra lineal, nos vienen a la mente los conceptos de vectores, matrices y sistemas de ecuaciones lineales. En términos más formales, el álgebra lineal estudia conjuntos denominados "espacios vectoriales" que constan de un conjunto de vectores y escalares, pero que además, por ser una estructura de campo, incluye las operaciones entre éstos, así como ciertas propiedades (Noguera, Huérfano & Vera, 2015).

El aprendizaje del álgebra lineal no está exento de dificultades debido, entre otras razones, a que los objetos de estudio involucrados se presentan de forma abstracta y desvinculada de otras representaciones físicas o geométricas (Costa & Rossignoli, 2017). Por lo anterior, varias investigaciones sugieren adaptar acercamientos un poco más concretos para abordar algunos tópicos.

Además de lo anterior, la enseñanza del álgebra lineal ha estado dominada fuertemente por el desarrollo de procesos de naturaleza algorítmica, que muchas veces resultan complicados para los estudiantes, como en el caso de las operaciones con vectores y matrices. En este sentido, resulta necesario que los estudiantes desarrollen un dominio tanto conceptual como práctico de los objetos matemáticos involucrados, para lo que se requiere el desarrollo y la implementación de nuevas estrategias didácticas.

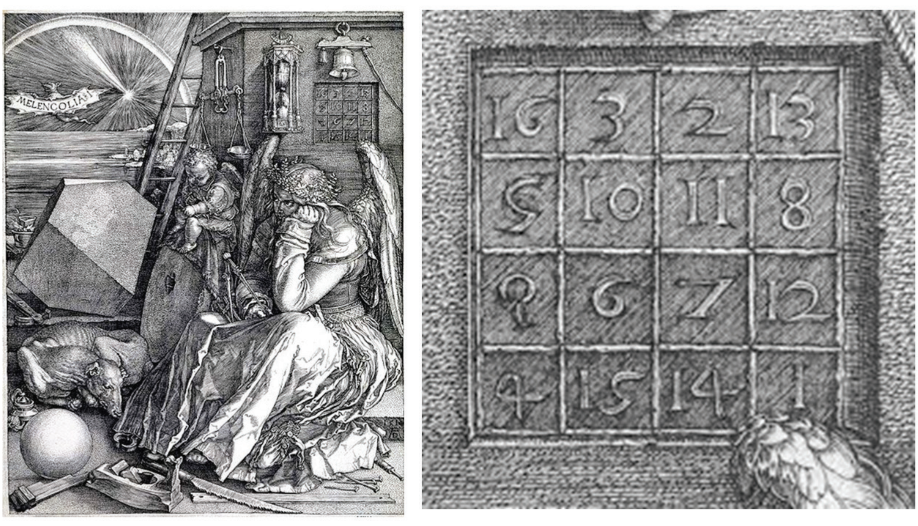
Con base en lo anterior, diversos autores han señalado la pertinencia de diseñar actividades de aprendizaje para el aula que involucren algunos elementos que favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático; esto es, de la forma cómo desarrollan su quehacer los matemáticos profesionales, lo que incluye actividades como identificación y comparación de patrones, uso de distintos registros de representación, elaboración de conjeturas, procesos de argumentación y justificación, entre otros (Barrera & Reyes, 2013).

Otro elemento relevante que puede incidir de forma favorable en el aprendizaje de la disciplina es el uso de herramientas digitales para su enseñanza, como lo han puesto de relieve diversas investigaciones. En ese sentido, se han desarrollado diversas propuestas con base en la investigación en el aula para ayudar a la mejor comprensión de tópicos relativos al álgebra lineal, en entornos semipresenciales o completamente virtuales (Campos & Torres, 2015; Noguera, Huérfano & Vera, 2015; Cáseres, 2016). Sin embargo, un común denominador de este tipo de propuestas es que se centran en cómo utilizar ciertos recursos para abordar temas típicos del programa de estudios, pero no en la naturaleza de la estrategia didáctica, ni en algunos de los elementos identificados como análogos al desarrollo del pensamiento matemático. Como ejemplo de lo anterior, los autores de este trabajo hemos identificado que una actividad que puede resultar interesante y que coadyuve a ese propósito es la identificación de patrones en algún tópico específico del álgebra lineal, que ayude a plantear conjeturas y tratar de justificarlas, lo cual consideramos puede ser de especial interés en la enseñanza de la asignatura.

Antecedentes

En la Antigüedad fueron creados los denominados cuadrados mágicos, que consistían en arreglos rectangulares de números naturales que cumplían

Figura 1. *Cuadro mágico representado en la obra de Durero Melancolía I, 1514*



Fuente: http://www.epsilones.com/paginas/artes/artes-032-durero-melancolia.html.

con la condición de que, al sumar sus cifras por filas, por columnas, e incluso por sus diagonales, la suma siempre daba la misma cantidad. En la figura 1 se muestra uno de estos cuadros mágicos, presente en la obra de Durero de 1514, llamada *Melancolía I*.

En la tabla 1 se presenta el arreglo que representa el cuadrado mágico de Durero. Se considera que es un cuadrado mágico porque al sumar los cuatro números de cada renglón, columna y diagonal, el resultado es 34.

TABLA 1. *Cuadro mágico de Alberto Durero*

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

El determinante de una matriz no se obtiene sólo de sumar los elementos de cada renglón o columna. Lo cierto es que el determinante también resulta ser una invariante para cada matriz cuadrada (sin que tenga que ser un cuadro mágico). Si se considera el cuadro mágico de Durero como una matriz 4×4 y se aplica la expansión de Laplace en el primer renglón para calcular el determinante, entonces se tiene:

$$\Delta = \mathbf{16}\begin{vmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{8} \\ \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{12} \\ \mathbf{15} & \mathbf{14} & \mathbf{1} \end{vmatrix} - \mathbf{3}\begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{11} & \mathbf{8} \\ \mathbf{9} & \mathbf{7} & \mathbf{12} \\ \mathbf{4} & \mathbf{14} & \mathbf{1} \end{vmatrix} + \mathbf{2}\begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{8} \\ \mathbf{9} & \mathbf{6} & \mathbf{12} \\ \mathbf{4} & \mathbf{15} & \mathbf{1} \end{vmatrix} - \mathbf{13}\begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{11} \\ \mathbf{9} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ \mathbf{4} & \mathbf{15} & \mathbf{14} \end{vmatrix}$$

Como es un determinante de orden cuatro, el problema se reduce a resolver cuatro determinantes de orden tres, y en la siguiente etapa, al desarrollar cada determinante de este orden, se obtendrían los de orden dos. A manera de ejemplo, a continuación se muestra la reducción del primer determinante de orden tres, del cual se obtienen tres determinantes de orden dos, que se pueden calcular casi en automático:

$$\mathbf{16}\begin{vmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{8} \\ \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{12} \\ \mathbf{15} & \mathbf{14} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{16}\left[\mathbf{10}\begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{12} \\ \mathbf{14} & \mathbf{1} \end{vmatrix} - \mathbf{11}\begin{vmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{12} \\ \mathbf{15} & \mathbf{1} \end{vmatrix} + \mathbf{8}\begin{vmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ \mathbf{15} & \mathbf{14} \end{vmatrix}\right]$$

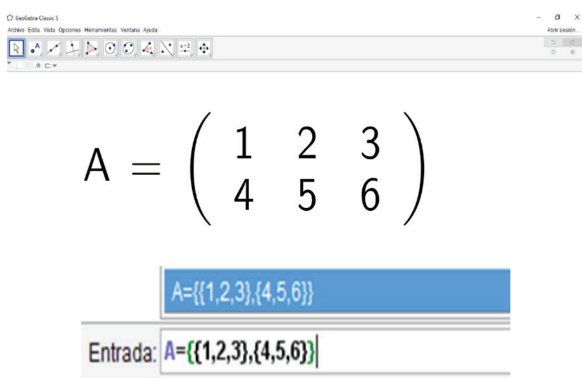
Si se realizan todos los cálculos necesarios para encontrar el determinante del cuadrado mágico, el lector puede corroborar que el resultado es cero. Es justamente para este tópico, abordado regularmente en cursos introductorios de álgebra lineal, que proponemos una actividad alternativa, la cual estaría conformada por acciones en las que el estudiante tuviera que identificar patrones, plantear conjeturas e intentar realizar demostraciones, empleando la ayuda de una herramienta digital. La idea de esta propuesta es precisamente el diseño de tareas de aprendizaje para el aula que vayan a contracorriente de los ya mencionados procesos de resolución algorítmicos que predominan en la enseñanza.

Metodología

¿Cómo se puede declarar un arreglo rectangular en GeoGebra? Una manera es introducir en la casilla de entrada del *software*, entre llaves y separados por comas, los elementos del renglón de la matriz: se separa con una coma un renglón de otro y se agregan tantos renglones como se requieran. Al final se encierra entre llaves todo el arreglo (véase figura 2).

La notación anterior es similar a la que requieren otros programas de matemáticas, pero no deja de ser tedioso declarar matrices de esa forma. Sin embargo, la versión de escritorio de GeoGebra acepta otro modo distinto de declarar matrices con la función de hoja de cálculo: sólo se intro-

FIGURA 2. *Escritura de elementos en renglones de la matriz usando GeoGebra*



ducen las entradas de la misma en esta hoja y luego se aplica un comando específico para convertir el arreglo en una matriz (véase figura 3).

Para la implementación de la tarea de aprendizaje con los estudiantes se consideraron dos actividades, cada una con instrucciones precisas, las cuales se describen a continuación (véase figuras 4 y 5).

Se propusieron estas dos actividades a un grupo de estudiantes de tercer semestre de una licenciatura en física, de una universidad pública en México, que cursaban la asignatura de espacios vectoriales en modalidad virtual debido a la contingencia sanitaria ocasionada por la pandemia de Covid-19. Las actividades fueron introducidas por el profesor por medio de un video en el cual promovió el uso de GeoGebra para que se tratara de identificar conjeturas. El video fue publicado en la plataforma educativa Moodle, que es parte de los llamados LMS (*Learning Management System),* plataforma de libre uso que permite gestionar cursos a distancia, la cual, durante el periodo de clases virtuales, ha sido utilizada en muchas instituciones educativas. En ese video se sugirió a los estudiantes que utilizaran el mismo *software,* pero se les dejó en libertad de utilizar otras herramientas digitales con las que pudieran estar más familiarizados. Sus resultados debían publicarlos también en formato de video en la misma plataforma.

FIGURA 3. *Empleo de la hoja de cálculo de GeoGebra para generar matrices*

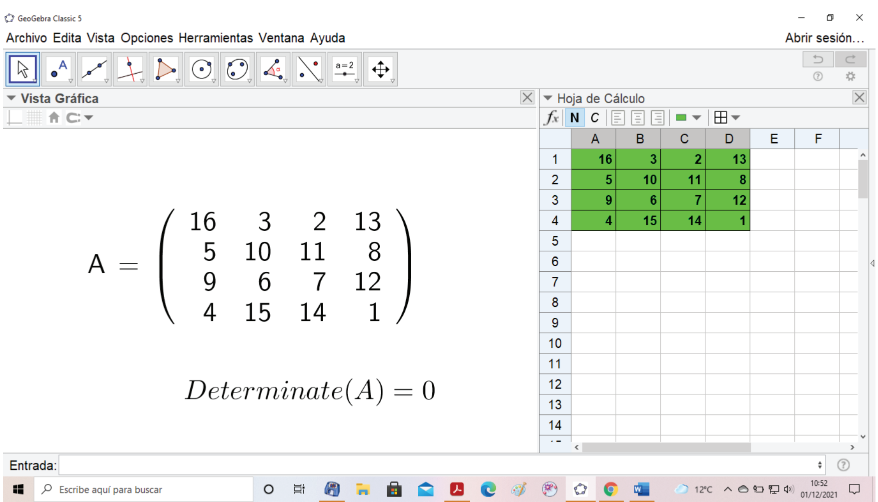


Figura 4. *Enunciado de la actividad 1 en la tarea de aprendizaje*

¿Qué tipo de patrones se pueden identificar al interactuar con GeoGebra y el cálculo de determinantes?

Actividad 1

Introduzca matrices cuadradas 3×3; 4×4; 5×5 cuyas entradas sean una sucesión de números naturales consecutivos. ¿Cuánto valen sus determinantes? ¿La sucesión debe empezar desde la unidad? ¿Se puede justificar que, si las entradas de una matriz cuadrada es una sucesión de números naturales consecutivos, el determinante sea nulo?

Figura 5. *Enunciado de la actividad 2 en la tarea de aprendizaje*

Actividad 2

Proponga arreglos de números que correspondan a matrices cuadradas 3×3; 4×4; 5×5, en los cuales algunas entradas no estén declaradas. Proponga a los estudiantes que llenen las entradas faltantes y que cumplan con la siguiente condición: que la suma de las entradas de cada columna sea nula. ¿Cuánto valen los determinantes de matrices así formadas? ¿Se puede justificar que esta propiedad es válida para las matrices cuadradas de cualquier dimensión? ¿Qué sucede si en lugar de sumar cero las columnas, lo suman las filas?

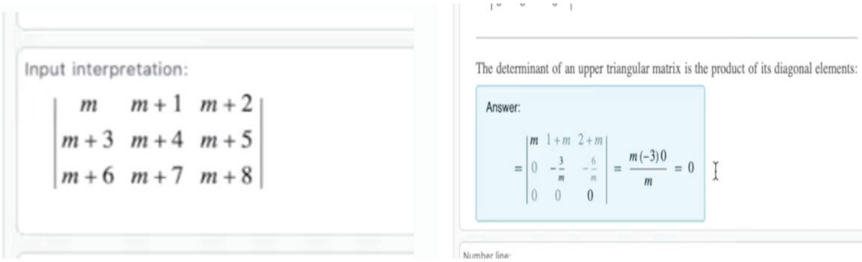
Resultados

Los estudiantes trabajaron en la solución de las dos actividades propuestas en esta tarea y realizaron la grabación de un video que subieron a su canal de YouTube y compartieron en Moodle. Este video muestra las evidencias de sus análisis en torno de dichas propuestas. Se realizaron las transcripciones de los audios de los videos obtenidos y, a partir de ellas, aquí se comparten algunos de los resultados más relevantes.

Un estudiante (A) analizó el caso particular en que una matriz está conformada por elementos consecutivos. Partió de un elemento "n" seguido de "$n + 1$", "$n + 2$", y así sucesivamente, probando con un tamaño de matriz de 3×3, y obteniendo su determinante empleando una herramienta digital, en este caso Wolfram Mathematica.

Este mismo estudiante analizó los casos de matrices con elementos consecutivos, de dimensiones 4×4 y 5×5, y obtuvo el valor de cero para el determinante en ambos casos. Además, halló que al reducir este tipo de matrices siempre obtenía una matriz triangular superior con algunos

FIGURA. 6. *Resolución del caso de una matriz* 3×3 *con elementos consecutivos*

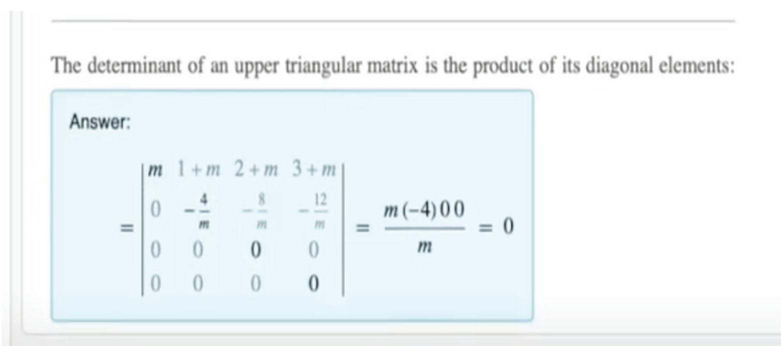


FUENTE: Video de los autores.

ceros en la diagonal. Hay que recordar que, por definición, debido a que el determinante de este tipo de matrices se obtiene al multiplicar los elementos dispuestos en su diagonal principal, el producto siempre da como resultado cero (véase figura 7).

Además, realizó el hallazgo del cálculo del determinante, como una expresión algebraica análoga en todos los casos revisados con la única diferencia del número correspondiente al numerador de la fracción obtenida en el segundo elemento de la diagonal principal (véase figura 7). Incluso identificó que ese número, así como los demás ceros que aparecen en la diagonal principal en cada caso, son patrones que se observan en los casos consecutivos de las matrices .

FIGURA 7. *Resolución del determinante en el caso de una matriz* 4×4 *con elementos consecutivos*



FUENTE: Video de los autores.

Otro estudiante (B) realizó el análisis de un caso particular, al ensayar con números consecutivos negativos, y encontró que de igual forma se cumple que el valor del determinante da como resultado cero. En su caso optó por hacer los cálculos con papel y lápiz (véase figura 8).

En un tercer caso, el estudiante C utilizó matrices de números consecutivos que comienzan en 1 e identificó un patrón que se presenta en estos casos (véase figura 9). Se percató de que, en todos los casos de este tipo, la última columna de la matriz equivale a un múltiplo escalar de la primera fila. Como puede observarse en la matriz que analizó, la tercera columna, que equivale a la entrada (3, 6, 9) es múltiplo de la primera fila (1, 2, 3); en este caso, el escalar que funge como múltiplo equivale a la dimensión "n" de la matriz es 3. En el caso de la matriz observó una situación análoga, donde la última columna de la matriz, formada por la entrada (4, 8, 12, 16) equivale a multiplicar por el escalar 4 la primera fila (1, 2, 3, 4), y nuevamente el escalar equivale a la dimensión de la matriz (véase figura 9).

A partir de la identificación de un posible patrón, se plantea la conjetura respectiva a este hallazgo en forma de pregunta: ¿qué pasa si un vector columna es múltiplo escalar de un vector renglón? ¿El determinante será igual a cero? A continuación, este estudiante intentó encontrar explicaciones a este aparente resultado. Descurbrió que esa relación entre la primera fila y la última columna tiene que ver con la obtención de un reglón de puros ceros al momento de reducir la matriz. Entonces, concluyó

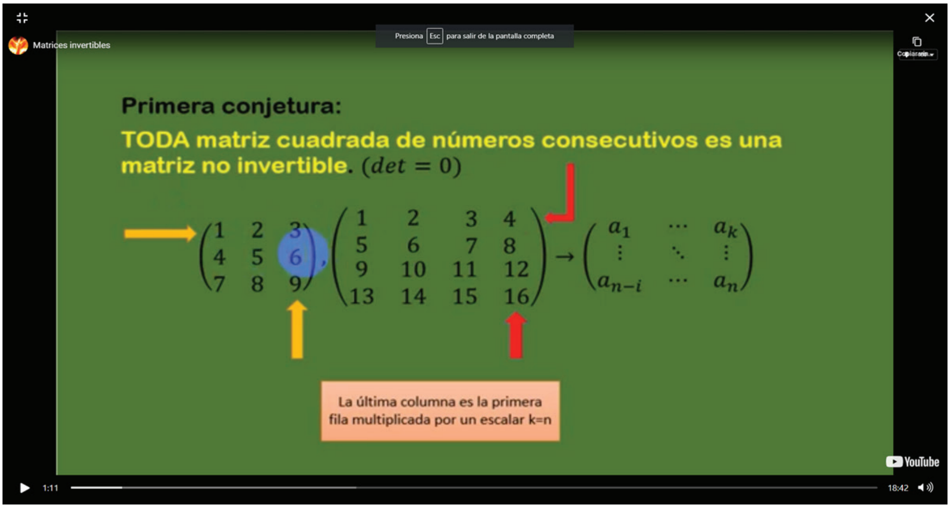
Figura 8. *Análisis de un caso particular de matriz con elementos consecutivos negativos*

$$\begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -6 & -7 & -8 \\ -9 & -10 & -11 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 & -4 \\ -6 & -7 \\ -9 & -10 \end{matrix} =$$

$$-231 - 288 - 300 + 315 + 240 + 264 = 0$$

Fuente: Video de los autores.

FIGURA 9. *Identificación de patrones en el caso de matrices con números consecutivos*



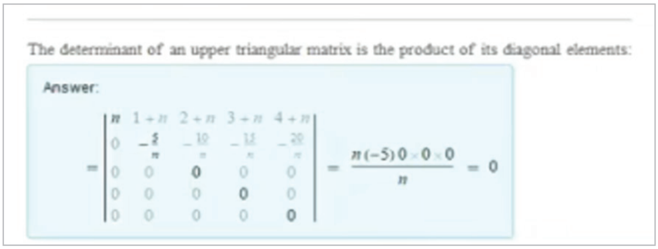
FUENTE: Video de los autores.

que, cuando se obtiene un vector de ceros, la matriz da siempre un determinante con valor cero, esto es, que no es invertible. Al final concluyó que cualquier matriz formada de números consecutivos sería no invertible.

Un cuarto estudiante (D) también utilizó el *software* de Wolfram Mathematica para tratar de demostrar la conjetura planteada por la primera propuesta. Encontró un resultado análogo al del estudiante A, donde identificó que, al reducir la matriz y obtener una triangular superior para una matriz 4×4, obtuvo que las dos últimas filas se hicieron de ceros, y con ello el producto de la diagonal principal también; por consiguiente, el resultado del determinante es cero. Después, abordó los casos de matrices 3×3 y 5×5 y encontró resultados similares (véase figura 10).

Este estudiante también afirmó haber identificado que, al realizar el cálculo del determinante en cada uno de estos casos, halló un patrón con el cual siempre consiguió una expresión en el producto que se obtiene para la estimación del valor del determinante (véase figura 11). Esta expresión es del tipo:

Figura 10. *Cálculo del determinante de una matriz con números consecutivos*

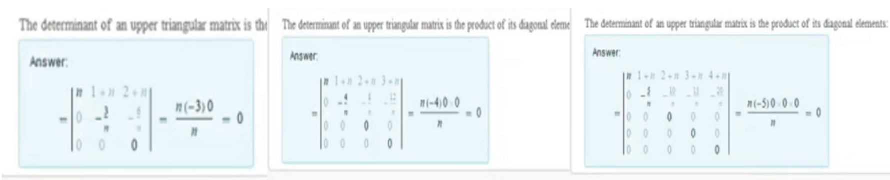


Fuente: Video de los autores.

$$Det\ (M_{n\times n}) = \frac{n\,(-k)(0)^{n-2)}}{n}$$

Donde *k* equivale al orden de la matriz respectiva.

Figura 11. *Identificación de un patrón en la "fórmula" del cálculo del determinante para matrices cuadradas de números consecutivos*

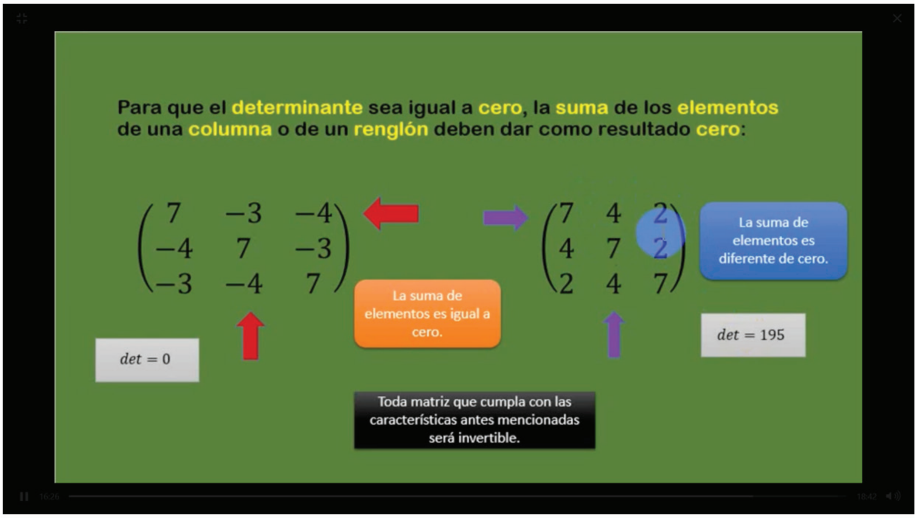


Fuente: Video de los autores.

Para la propuesta 2, que consistía en analizar los casos de matrices cuadradas de modo que tuvieran algunas entradas no declaradas, pero que cumplieran con la condición de que la suma de las entradas de una columna o de un renglón dieran cero, y la relación de esta condición con el valor del determinante, se comparten asimismo algunos otros resultados sobresalientes obtenidos por los estudiantes de este mismo grupo.

El estudiante C analizó varios casos particulares, así como contraejemplos, para concluir que siempre que la suma de los elementos de una columna o de un renglón den cero como resultado, entonces el determinante también lo será; en caso contrario, el determinante siempre tendría un valor distinto a cero (véase figura 12).

FIGURA 12. *Análisis de casos particulares para la segunda propuesta por el estudiante C*



FUENTE: Video de los autores.

Otros estudiantes trabajaron en equipo y desarrollaron una demostración para probar la conjetura planteada. En vez de resolver casos particulares, estaban convencidos de que la conjetura era válida y sin ofrecer más ejemplos y con ayuda de una herramienta digital partieron de una notación general para una matriz cuadrada (véase figura 13).

A partir de esta notación consideraron la suma de los primeros $m-1$ renglones, lo que proporciona un vector que denominaron “vector suma” y lo denotaron como:

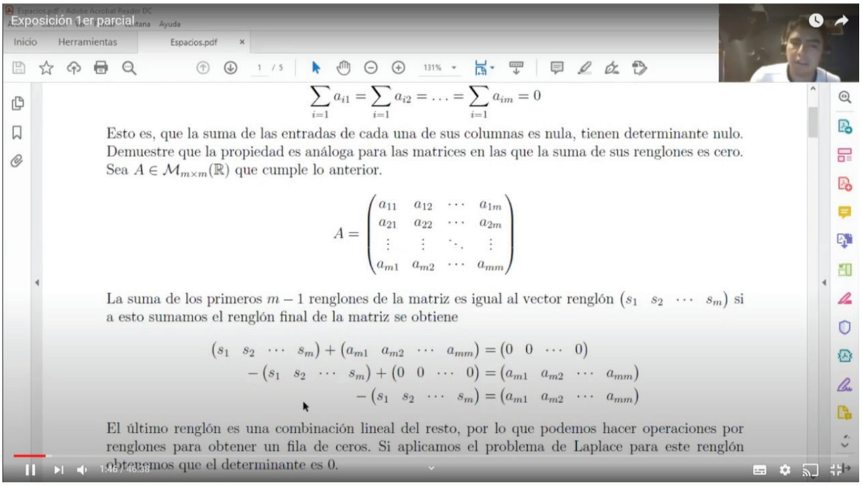
$$(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_m)$$

Si a este renglón se le suma el último renglón de la matriz, se obtiene un vector de puros ceros:

$$(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_m) + (a_{m1}, a_{2m}, a_{m3}, \ldots, a_{mm}) = (0, 0, 0, \ldots \ldots \ldots 0)$$

Lo anterior, debido a la condición inicial dada, de que la suma de todas las columnas debía dar como resultado cero, entonces, al despejar el vector $(a_{m1}, a_{2m}, a_{m3}, \ldots, a_{mm})$, equivale a:

FIGURA 13. *Caso general para una matriz cuadrada*



FUENTE: Video de los autores.

$$(a_{m1}, a_{2m}, a_{m3}, \ldots, a_{mm}) = -(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_m)$$

O, lo que es lo mismo, que el vector en el último renglón resulta de una combinación lineal de todos los demás, y entonces se deduce que, en tal caso, se obtienen filas de cero, lo que se traduce en que el valor del determinante también resulta ser nulo.

Como último paso, también consideraron la matriz transpuesta de S^T, esto es , y dedujeron de forma análoga que la misma condición se cumplía para las columnas de la matriz.

Discusiones y reflexiones

De la revisión de los resultados obtenidos por los estudiantes puede desprenderse que la tarea abordada permitió, en principio, que ellos pusieran en práctica algunos elementos de lo que diversos investigadores denominan el *desarrollo del pensamiento matemático*, lo que incluye actividades como el análisis de casos particulares, el intento de comprobar o rechazar una conjetura, la identificación de patrones, la búsqueda de razones o argumentos para corroborar sus conjeturas, entre otros.

En la mayoría de los casos, los estudiantes utilizaron el apoyo de alguna herramienta digital para realizar los cálculos, con lo que se puso a prueba el principio de restar protagonismo a los procesos algorítmicos y, en vez de ello, disponer del tiempo de la actividad para desarrollar las distintas heurísticas de resolución, intentando identificar patrones. De este modo, el énfasis en el trabajo desarrollado por los estudiantes se centró en los distintos elementos que se consideran como esenciales para la reflexión y el modo de *hacer* matemáticas (Flores & Gómez, 2009).

Por otro lado, consideramos relevante señalar que las características de una actividad como ésta permiten que los estudiantes exploren distintas rutas y heurísticas, y de este modo contribuye a mantener el interés por las actividades desarrolladas, y además a lograr que su rol sea más activo, ya que se involucran en mayor grado con los contenidos abordados.

Conclusiones

Cuando se prepara al estudiante para abordar tareas de aprendizaje que consideran elementos del pensar y el hacer matemáticas, como la identificación de patrones, el desarrollo de distintas heurísticas, el planteamiento de conjeturas y la búsqueda de argumentos para probar dichas conjeturas, es posible obtener resultados satisfactorios.

Es importante que las tareas diseñadas permitan que el estudiante adopte un rol más activo, siempre con la guía o el acompañamiento del profesor, incluso en modalidad a distancia, preparando actividades con instrucciones claras, pero con la suficiente libertad para experimentar el uso de las herramientas digitales utilizadas en cada caso.

Los roles que el profesor desarrolla durante la implementación de una tarea deben potenciar las actividades de sus estudiantes durante el proceso de resolución de la tarea.

Referencias

Barrera, F., & Reyes, A. (2013). *Elementos didácticos y resolución de problemas: formación docente en matemáticas*. México: UAEH.

Campos, M., & Torres, A. A. (2015). Impacto del empleo de un blog en álgebra lineal a nivel licenciatura. *Revista Pistas Educativas, 35*(111), 98-115.

Cáseres, E. (2016). Algunas consideraciones sobre el aprendizaje del álgebra lineal en ambientes de semipresencialidad: Una visión desde los estudiantes de ingeniería de producción de la UCLA. *Dissertare: Revista de Investigación en Ciencias Sociales, 1*(1), 38-53.

Costa, V. A., & Rossignoli, R. (2017). Enseñanza del álgebra lineal en una facultad de ingeniería: Aspectos metodológicos y didácticos. *Revista Educación en Ingeniería, 12*(23), 49-55.

Flores, A. H., & Gómez, A. (2009). Aprender matemática haciendo matemática. *Revista Educación Matemática, 21*(2), 117-142.

Noguera, E., Huérfano, Y., & Vera, M. (2015). Entorno virtual para la enseñanza del álgebra lineal en la Universidad Nacional Experimental de los Llanos Ezequiel Zamora, núcleo Santa Bárbara estado de Barinas. *Dialéctica: Revista de Investigación en Educación, 11*(1), 87-114.

Capítulo 4. Estrategias de cálculo mental: Un estudio de caso con un adulto de escolaridad baja

Brian Omar López Ventura
_y José Antonio Juárez López
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

Resumen

La presente investigación tuvo como objetivo analizar las estrategias de cálculo mental que utiliza una persona no escolarizada en actividades de su contexto laboral. Con un enfoque cualitativo descriptivo se analizaron los procedimientos de solución que aplica esta persona en su ambiente. Es importante mencionar que esta investigación se enfoca en dicha población porque aún es escasa la evidencia que nos permite conocer lo que sucede en la mente de las personas sobre el cálculo mental. Con ayuda de la entrevista semiestructurada como guía adaptada al contexto de la persona se logró obtener resultados interesantes que nos permitieron conocer la matemática fuera de la escuela, como el reordenamiento o reacomodo de datos, el redondeo o valor faltante, la implementación de algunas propiedades como la distributiva, la asociativa y la conmutativa, e incluso el uso de múltiplos y valor posicional. Dichas estrategias son presentadas mediante tablas, en las que se registran las operaciones utilizadas de cada planteamiento. La interpretación jugó un papel importante debido a que el adulto no está acostumbrado a compartir experiencias matemáticas; con esas evidencias podremos encontrar qué hay detrás de cada estrategia de solución que han aprendido los estudiantes fuera de la escuela.

Palabras clave: cálculo mental, estrategia de solución, adulto analfabeta.

Introducción

Cuando se realiza una compra en la tienda de la esquina y se observa que despacha una persona adulta mayor de edad, uno se percata de una gran habilidad en el intercambio monetario (compraventa). El cálculo mental que aplica una persona es el tema de interés de esta investigación. Estos procesos se realizan en la mente de la persona y llegar a dominarlos resulta una tarea difícil de obtener. Para observar qué es lo que sucede y analizar las estrategias de cálculo mental, la entrevista clínica nos permitió conocer las pautas y las formas en las que se llevan a cabo estos procesos. Resulta interesante observar cómo estas personas muy habilidosas en sus negocios se cuestionan todo el tiempo ¿cuánto debo cobrar?, ¿cuánto debo dar de cambio?, ¿cuánto debo repartir?, ¿cuánto me queda?, ¿cuánto me sobra?, ¿para cuánto me alcanza?, etc. Las soluciones a estas interrogantes presentan una estrategia de cálculo mental en particular, propósito central de esta investigación. Con apoyo de la entrevista semiestructurada se obtuvieron las estrategias de solución que aplican los adultos de escolaridad baja cuando resuelven problemas aritméticos de su contexto, y después de ser analizados se logró identificar características propias en los procedimientos, donde algunos de ellos son diferentes a los aprendidos en la escuela.

Antecedentes teóricos

El cálculo mental es una parte primordial de la enseñanza de la matemáticas, además de que es una herramienta que sirve para responder de manera flexible y apropiada a diversas situaciones de la vida cotidiana, como la habilidad de procesar rápidamente en la mente y decidir si conviene comprar un producto o no, si alcanza para surtir una despensa, si sobra o no; la persona se cuestiona cuánto le sobra, si desea repartir un pastel a sus invitados, si es conveniente prestar dinero o simplemente regular sus actividades en relación con el tiempo. Podríamos continuar con una gran lista de actividades que los adultos realizan y resuelven mediante el cálculo mental.

Diversas investigaciones como las de Ávila (1990), Valiente (1995), Fernández (2014) y Cortés, Backhoff y Organista (2004) han mostrado evidencias sobre las estrategias y los procedimientos de cálculo mental que utilizan los sujetos cuando se enfrentan a planteamientos adaptados, con el propósito de vislumbrar cómo operan la aritmética básica de la suma, la resta, la multiplicación y la división.

Nys, Ventura, Fernandes, Querido, Leybaert y Content (2013), en su comparación de adultos educados y no escolarizados, muestran resultados significativos sobre las habilidades que presentan ambos; por un lado, los que recibieron una educación matemática y, por otro lado, los que no recibieron una instrucción formal en matemáticas, quienes desarrollan procesos más largos y con una tasa de errores más alta.

Por su parte, Mochón y Vázquez (1995) y Gálvez, Cosmelli, Cubillos, Leger, Mena, Tanter, Flores, Luci, Montoya y Soto (2011), en sus estudios en niños, presentan testimonios que permiten observar las estrategias de solución que aplican frente a un problema, con el fin de optimizar sus habilidades de cálculo mental, identificando una necesidad de promover estrategias fundamentales como la descomposición y el redondeo.

Al respecto, Carraher, Schliemann y Carreher (2011) sostienen que

> En la escuela las matemáticas son una ciencia, que se enseña en un momento definido; en la vida las matemáticas son parte de la actividad de un sujeto que compra, vende, mide y encarga piezas de madera, que construye paredes y hace el cálculo del ángulo (p. 19).

Retomando la cotidianidad de las personas, una solución matemática que se realiza en la calle puede reflejar una gran cantidad de información sobre los procesos de cálculo mental y cómo lo aplican en situaciones específicas.

Con el interés de saber qué sucede en la mente de las personas sobre el cálculo mental y contribuir a las investigaciones antes mencionadas, el propósito de esta investigación es explorar las estrategias de cálculo mental que aplica un adulto con escolaridad baja en la resolución de problemas aritméticos en su contexto.

Método

La diferencia que presenta esta investigación, en relación con las ya descritas, es el diseño del instrumento, debido a que fue adaptado al contexto del sujeto, mientras que las demás muestran actividades que pueden no ser de su contexto o de su realidad. De manera que el propósito de esta investigación no es clasificar ni considerar niveles de solución, sino conocer los procesos aritméticos que utiliza el individuo para dar solución a problemáticas reales.

Barajas, Parada y Molina (2017) señalan "que los procedimientos son aquellas formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas" (p. 79). En particular, en esta investigación ponemos énfasis en procesos aritméticos como aquellos relacionados con el dominio del número y la estructura del sistema, las operaciones en diversos contextos, sus propiedades y las relaciones entre ellas.

Así, para esta investigación se optó por el estudio de caso de una persona que fue cuidadosamente observada mientras aplicaba procesos aritméticos mentales. Se empleó el método cualitativo para describir las múltiples variables de la realidad que revelan los fenómenos inmersos sobre las estrategias que utiliza el adulto sobre el cálculo mental en el momento de resolver situaciones de su vida cotidiana y que merecen un interés dentro del mundo de la investigación matemática.

Con la aplicación de la entrevista semiestructurada adaptada al contexto del sujeto se logró obtener evidencia sobre los aritméticos que están inmersos en el cálculo mental. De una población de tres personas observadas que realizaban aritméticos se ha seleccionado a la señora que vende tortillas a mano, por la característica de ser analfabeta, mayor de 60 años de edad y por desempeñar un oficio en la población de residencia. Cabe señalar que en el municipio de Ixtenco, Tlaxcala, donde se aplicó la entrevista, su mayor población son adultos y su ingreso económico se obtiene mediante un negocio (tienda).

Esta persona fue observada en un primer momento con el propósito de determinar cómo aplica procesos aritméticos en el intercambio de productos y con objeto de diseñar la entrevista. El segundo momento consistió en realizar una entrevista a profundidad para obtener las estrategias de cálculo mental que utiliza en su quehacer, para lo cual fue necesario grabar el audio de la entrevista para su análisis posterior. El tiempo estimado de la entrevista fue de 70 minutos, debido a la destreza con la que respondió las preguntas. Además, es importante mencionar que dicha entrevista fue llevada a cabo en el establecimiento de la persona para garantizar confianza y seguridad y escuchar con atención su respuesta.

Todo comenzó con la selección y la observación a tres personas con oficios diferentes: *persona 1,* la señora que vende tortillas hechas a mano; *persona 2,* la señora que vende frutas, y *persona 3* la señora que vende pollo. No obstante, este trabajo sólo presenta la entrevista a la persona que vende tortillas, debido a su importancia y relevancia.

El primer momento se compone de nueve preguntas que tienen el propósito de explorar el contexto laboral y algunos indicios sobre los saberes matemáticos previos del sujeto (véase anexo). El segundo momento consiste en solicitar la solución de seis planteamientos con el propósito de estimular al sujeto para que aplique operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división), donde dichos planteamientos provienen de la realidad, ya que estas operaciones son las más practicadas y dominadas por la persona.

Resultados

Para la presentación de resultados se optó por mostrar una entrevista, de las tres realizadas. Por su relevancia y su interés para esta investigación se presenta el relato de la señora que vende tortillas hechas a mano.

Para identificar las intervenciones del entrevistador se empleó la E, y para las respuestas de la persona entrevistada, la S.

El registro de los resultados en los cuadros sirve para identificar el procedimiento aplicado y explorar la estrategia de solución.

Entrevista a la señora que vende tortillas hechas a mano

Planteamiento 1

E: Una persona compra tres kilogramos de tortillas y paga con un billete de 50 pesos. ¿Cuánto da de cambio?

S: 3 por 13 son 39; entonces 11 pesos de cambio.

TABLA 1. *Estrategia de solución correspondiente al planteamiento 1*

Procedimientos aplicados identificados				
Multiplicación	***Redondeo***	***Valor faltante***	***Suma***	***Respuesta***
3 x 13 = 39	39 y 1 = 40	40 para 50 faltan 10	1 + 10 = 11	11 de cambio

Planteamiento 2

E: Si vende cuatro kilogramos y medio de tortillas, ¿cuánto cobra?

S: (Se toma un tiempo y responde) 59 pesos.

E: Describa cómo obtuvo ese resultado.

S: De medio son 7, 3 por 4 son 12, de 4 son 40, y 12, son 52. Entonces 52 y 7 son 59 pesos.

TABLA 2. *Estrategia de solución correspondiente del planteamiento 2*

Procedimientos aplicados identificados					
División	***Multiplicación***	***Multiplicación***	***Suma***	***Suma***	***Respuesta***
$13 \div 2 = 6.5$ 7 (1)	$3 \times 4 = 12$	$4 \times 10 = 40$	40 + 12 = 52	52 + 7 = 59	59 pesos

En el primer proceso (1) asigna como resultado 7, pues argumenta que prefiere evitar trabajar con decimales debido a que pocos traen cambio de 50 centavos.

Planteamiento 3

E: Si le encargan 21 kilogramos de tortillas en paquetes de 3 kilogramos, ¿cuántos paquetes deberá entregar?

S: Si cada paquete tiene 3 kilos (se queda callada un momento y dice):

12, 15, 18, son 21; si cada paquete tiene 3 kilos, entonces son 7 paquetes.
E: Podría explicarme una poco más.
S: Realicé una operación de 3 por 7: son 21 kilos.

TABLA 3. *Estrategia de solución correspondiente al planteamiento 3*

Procedimientos aplicados identificados					
Comienza con el valor	***Multiplicación***	***Multiplicación***	***Multiplicación***	***Multiplicación***	***Respuesta***
3	$3 \times 4 = 12$	$3 \times 5 = 15$	$3 \times 6 = 18$	$3 \times 7 = 21$	7 paquetes

Planteamiento 4
E: Si le encargan 15 kilogramos en paquetes de 2 kilogramos y medio, ¿cuántos paquetes deberán entregar?
S: Son 6 paquetes.
E: ¿Podría explicarme cómo sabe que son 6 paquetes?
S: Si cada paquete es dos y medio, 2 paquetes son 5, entonces 2 más son 10 y 2 más son 15 kilos: son 6 paquetes.

TABLA 4. *Estrategia de solución correspondiente al planteamiento 4*

Procedimientos aplicados identificados						
Suma	***Suma***	***Suma***	***Suma***	***Múltiplos de 5***	***Suma***	***Resultado***
2.5 + 2.5 = 5 paquetes	2.5 + 2.5 = 5 paquetes	5 + 5 = 10 kilogramos	2.5 + 2.5 = 5 paquetes	5, 10, 15 kilogramos	El número de veces que aparece 2.5	6 paquetes

Es importante indicar que para este planteamiento la persona utiliza los dedos de su mano, asignando el valor de 2.5 a uno de ellos; posteriormente, asigna que 2 dedos son 5 kilos, y así sucesivamente, hasta llegar al 15 contando con sus dedos.

Planteamiento 5
E: ¿Cuántos kilogramos de tortillas puede despachar con $30 pesos?
S: De 1 son 13, de 2 son 26. Le doy 2 kilogramos y le sobran 4 pesos.

TABLA 5. *Estrategia de solución correspondiente al planteamiento 5*

Procedimientos aplicados identificados				
Inicia	***Multiplica***	***Redondeo***	***Respuestas***	
13	13 × 2 = 26	26 para 30 son 4	2 kilogramos	Sobran 4 pesos

Planteamiento 6

E. Suponga que inicia el día con 30 pesos; a mediodía le pagan 350 pesos de un préstamo que realizó, y al finalizar del día obtiene una venta de 670 pesos. ¿Cuánto dinero tiene al final del día?

S. 350 y 670 (se escucha un silencio prolongado), de 3 y 6 son 9; 70 y 50 son 120. Entonces son 900 y 120, 1020, y más 30, son 1050.

TABLA 6. *Estrategia de solución correspondiente al planteamiento 6*

Procedimientos aplicados identificados				
Suma	***Suma***	***Suma***	***Suma***	***Respuesta***
3 + 6 = 9	50 + 70 = 120	900 + 120 = 1020	1020 + 30 = 1050	1050

Análisis

Para el análisis de resultados se optó por presentar las estrategias de solución de una persona en cuadros. Es necesario señalar que la interpretación resultó un trabajo no tan sencillo, debido a que el adulto analfabeta no acostumbra compartir sus procedimientos aritméticos o cuestionarse si el algoritmo aplicado es el más adecuado, por lo que se trató con delicadeza la información proporcionada.

Para esta investigación la estrategia de solución es aquella que permite resolver una problemática en una situación particular, pero de la que no se puede asegurar que funcione en diversos casos. Por esta razón las estrategias encontradas son creaciones inéditas de cada entrevistado que bien vale la pena reconocer y considerar como estrategias de enseñanza-aprendizaje en el aula.

Las preguntas planteadas pretendían estimular en el entrevistado el desglose de procedimientos aritméticos como la multiplicación para saber la cantidad que se debía cobrar, la suma para obtener el total, la resta para conocer el cambio que se deberá regresar y la división en caso de repartir, agrupar o separar. Sin embargo, como se puede apreciar, una estrategia de solución requiere de más aritméticos involucrados; el redondeo, el valor faltante, el reacomodo y la descomposición.

Aquí algunos ejemplos:

En el planteamiento 1 (tabla 1), la solución se compone de cuatro procedimientos diferentes. Nótese en especial el redondeo; 39 y 1 son 40, así como el valor faltante de 40 para 50: 10, procedimientos que poco se enseñan en la escuela.

En el planteamiento 2 (tabla 2), para dar solución fue necesario aplicar cinco procedimientos, si bien se podría saber el costo de 4.5 kilogramos de tortillas mediante una multiplicación directa $4.5 \times 13 = 58.5$ pesos. En el primer procedimiento la persona menciona que los clientes no traen cambio de 50 centavos, razón por la cual se aplica el redondeo de 6.5 a 7 pesos, por medio kilogramo.

Aquí se presenta la descomposición al calcularse el costo de medio kilogramo, para después calcular el costo de la cantidad entera.

Descomposición: $13 = 3 + 10$

Multiplica 4×13, que bien puede interpretarse como el desglose de la propiedad distributiva.

$$4(3 +10) = (4 \times 3) + (4 \times 10) = 12 + 40 = 52 + 7 = 59$$

Sin olvidar sumar 7 al final, que es el costo de medio kilogramo.

En el planteamiento 3 (tabla 3) la estrategia consta de cuatro procedimientos. Se puede observar la aplicación de la tabla de multiplicar del 3, y el sujeto concluye su operación hasta obtener la cantidad de 21, asociando que deberá entregar 7 paquetes con 3 kilogramos cada uno. Se tenía contemplado que la persona utilizara la división como operación directa, pero hasta aquí no hay evidencia de que se utilice el algoritmo de división.

En el planteamiento 4 (tabla 4), cuando se esperaba que la persona hiciera uso de la división, ella utilizó las extremidades de sus manos para indicar que un dedo tenía el valor de 2.5, y dos, de 5. No muestra evidencia de usar la división hasta ahora, y asociado, mientras va dando solución al problema, los demás dedos, que aparecen como múltiplos del 5 e indicando que lleva 5, 10 y 15, al mismo tiempo que toma 6 de sus dedos, para finalmente concluir de esta manera que debe tener 6 paquetes.

En el planteamiento 5 (tabla 5) la persona utiliza dos procedimientos para llegar al resultado. Una vez realizada la multiplicación: $2 \times 13 = 26$, aplica el redondeo: 26 para 30, faltan 4. Concluye que puede vender 2 kilogramos de tortillas y le sobran 4 pesos de cambio. Hasta este momento no hay evidencia del uso de la resta como procedimiento aritmético básico.

En el planteamiento 6 (tabla 6), que resulta ser una actividad que a menudo sucede en el contexto de las personas, ocurrieron algunos fenómenos interesantes: el primero fue el reacomodo de las cantidades de mayor valor, y el segundo, el del valor posicional de 350 + 670:

Convierte de centenas a unidades:	$3 + 6 = 9$
Después suma las decenas:	$50 + 70 = 120$
Retoma el valor posicional	9 a 900
Efectúa la suma	$900 + 120 = 1020$
Al final suma la cantidad de menor valor	30
Resultado	$1\,020 + 30 = 1\,050$

El proceso de solución de estos planteamientos ha dejado como evidencia que no existe una única forma de llegar a la solución y que las estrategias pueden ser variadas de acuerdo con el problema.

Otra característica que se puede observar es la cantidad de procedimientos aplicados para llegar al resultado. Por ejemplo, en el primer planteamiento realiza cuatro procedimientos y en el planteamiento 5 utiliza sólo dos procedimientos. Sin embargo, no es sencillo determinar cuál es el mejor, ya que éste dependerá de la habilidad de la persona.

Los relatos de estos planteamientos han mostrado una diversidad de soluciones, donde se puede hacer notar que la división no resulta del dominio de la persona estudiada pero resulta interesante atestiguar la forma como resuelve los problemas. El empleo de las estrategias que se desglosan en los cuadros pueden ayudar al desarrollo de nuevos métodos para dar solución a diversos planteamientos.

Al igual que la división, la resta es otro algoritmo que no aparece en las estrategias de solución o al menos no hay evidencia detectada de su presencia. Esto ha llamado la atención: cómo las experiencias a las que se enfrenta la persona provocan que algunos procesos puedan ser evadidos, incluso cambiando la forma de resolver el problema utilizando estrategias alternas, como la estrategia del valor faltante en el planteamiento 1, cuando la persona menciona que "40 para 50: faltan 10", procesos que pueden ser transmitidos por otras personas. Incluso se podría observar evidencia del uso de múltiplos de 10.

Los procesos de solución son significativos por la manera de operar y dar solución a los problemas; por ejemplo, modificar el valor posicional de centenas a decenas, de decenas a unidades, y viceversa, como en el planteamiento 6.

A partir del análisis de los problemas que se han seleccionado por su relevancia para esta investigación se han identificado grandes diferencias en el desarrollo del cálculo mental que se ejecuta en el aula de clases, respecto del conocimiento que tiene el adulto con una escolaridad mínima.

Conclusiones

El cálculo mental, como se ha mencionado en todo este documento, es una habilidad que utilizan muchas personas para dar soluciones a distintos problemas, aplicando operaciones aritméticas básicas. Sin embargo, con la presente investigación se ha podido observar que una estrategia puede estar acompañada de procesos distintos, e incluso no observarse en el sector escolar y, en ocasiones, no ser permitidos.

La persona que fue seleccionada para la entrevista de este estudio ha practicado durante mucho tiempo el cálculo mental, que no debemos desatender ya que ha pasado por un proceso riguroso de experiencia, cometiendo errores en sus procesos y experimentando nuevas situaciones día con día. Esto nos obliga a reflexionar acerca de que en el ámbito escolar la práctica del cálculo mental debe tener un proceso similar, además de una vinculación con el contexto.

Lo anterior, debido a que muchas estrategias de cálculo mental que se practican en la escuela no están adaptadas para desarrollar una mente flexible con el fin de diseñar nuevas estrategias de solución, sino que caen en la repetición de saberes, o, en su caso, pueden no ser significativas para el estudiante.

El tiempo de práctica debería ser cotidiano con la posibilidad de que la experiencia derivada pueda ser transmitida entre estudiantes para generar nuevas estrategias de solución, mejorando los aprendizajes previos y perfeccionando los nuevos procesos con planteamientos reales.

Comprender los procesos de solución presentados aquí ha resultado interesante por la manera en que operan los algoritmos, detonando procesos simples y complejos.

Los procesos de solución detectados requieren un trabajo de observación detallado, debido a que el sujeto no está acostumbrado a compartir esos procesos, por lo cual ha resultado difícil interpretar los resultados de este estudio.

El sujeto no sólo mostró desconfianza para compartir sus procedimientos matemáticos ni define con detalle sus operaciones, por lo que la interpretación de nuestros relatos ha sido compleja, de ahí que le hayamos solicitado en todo momento que profundizara y reafirmara con otra pregunta la estrategia de solución que aplica a los problemas a los que se enfrenta de manera cotidiana.

Estas estrategias de solución a los diversos planteamientos muestran una gran diversidad de soluciones, pues van desde la operación más abstracta hasta concluir con la operación más sencilla. Pero en esa estrategia de solución la descomposición de valores y su reacomodo continúan siendo la mayor habilidad de esta persona para dar soluciones a los planteamientos que se le ponen enfrente.

Las habilidades de cálculo mental por parte de sujetos de más de 60 años de edad, a pesar de contar con una escolarización mínima (primaria) que se han explorado en esta investigación, implican una sorpredente capacidad de solución a los problemas cotidianos, que no poseen los métodos enseñados en la escuela para resolver sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. En próximas investigaciones pretendemos hallar evidencias relevantes que ayuden a la comunidad científica, profesores y alumnos, a acceder a una matemática más formal.

Referencias

Ávila, A. (1990). El saber matemático de los analfabetos: Origen y desarrollo de sus estrategias de cálculo. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 20*(3), 55-95.

Barajas, C., Paradas, S., & Molina, J. (2017). Procedimientos aritméticos en la resolución de problemas de fenómenos variacionales. *Bolema*, 32(60), 75-91. http://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a04

Carraher T. Schliemann, A., & Carraher, D. (2011). *En la vida diez, en la escuela cero*. México: Siglo XXI.

Cortés, J., Backhoff, E., & Organista, J. (2004). Estrategias de cálculo mental utilizadas por estudiantes de nivel secundaria de Baja California. *Educación Matemática,16*(1), 149-168.

Fernández Jiménez, L. (2014). *Cálculo mental* (Tesis de licenciatura). Universidad de la Rioja, Facultad de Letras y de la Educación. https://nanopdf.com/download/calculo-mental-biblioteca-de-la-universidad-de-la-rioja_pdf

Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, P., Mena, A., Tanter, É., Flores, X., Luci, G., Montoya, S., & Soto, J. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(1), 9-40.

Mochón, S., & Vázquez, J. (1995). Cálculo mental y estimación: métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza. *Educación Matemática, 3,* 93-105.

Nys, J., Ventura, P., Fernandes, T., Querido, L., Leybaert, J., & Content, A. (2013). Does Math Education Modify the Approximate Number System? A Comparison of Schooled and Unschooled Adults. *Trends in Neuroscience and Education, 2,* 13-22.

Valiente, S. (1995). Análisis de cuatro algoritmos operatorios obtenidos en investigación de campo con adultos analfabetas. *Educación Matemática, 7*(2), 60-73.

Capítulo 5. Lenguaje algebraico y multisemiosis: Hacia una reflexión más allá del simbolismo

Luis Alberto López-Acosta
https://orcid.org/0000-0002-2903-5413
Gisela Montiel Espinosa
https://orcid.org/0000-0003-1670-9172
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)

Resumen

Los estudios del lenguaje matemático en la investigación en matemática educativa han mostrado la importancia de enfocar esfuerzos tanto en la especificación de las habilidades lingüísticas que los estudiantes deben desarrollar en el aprendizaje de ese lenguaje, como en la consideración de los aspectos multimodal y multisemiótico que lo caracterizan. Por esta razón, en esta investigación se busca un primer acercamiento al entendimiento de la naturaleza multisemiótica de textos algebraicos antiguos con la intención de compararla, en una siguiente fase del estudio, con la naturaleza multisemiótica de textos de estudiantes de bachillerato. Reportamos parte de los resultados de un análisis lingüístico sistémico-funcional del discurso multimodal de tres textos algebraicos, que deja ver estructuras discursivas complejas que conllevan el uso sistemático de distintos recursos semióticos y su articulación en la producción de los significados algebraicos pretendidos en estos textos.

Palabras clave: lenguaje algebraico, multisemiosis, análisis sistémico-funcional del discurso multimodal

Introducción

Diversos estudios en torno del lenguaje matemático, tan sólo en la investigación en matemática educativa (ME), han aportado elementos esenciales para su caracterización y el reconocimiento de su complejidad (véase Austin & Howson, 1979; Kieran, Forman & Sfard, 2003; Morgan, 1996; Morgan, Craig, Schuette & Wagner, 2014; Moschkovich, Wagner, Bose, Rodriguez Mendes & Schütte, 2018; Pimm, 1987; Schleppegrell, 2007; Sfard, 2008). A partir de estas investigaciones se han constituido aproximaciones al aprendizaje de las matemáticas desde un punto de vista discursivo que establecen relaciones entre el pensamiento y el lenguaje (por ejemplo, Kieran, Forman & Sfard, 2003; Sfard, 2003 & 2008).

Estos trabajos caracterizan al discurso matemático como un discurso considerablemente *objetivado* (Schleppegrell, 2007; Sfard, 2003 & 2008), en el cual, por medio de construcciones metafóricas, se tiende a convertir *procesos* en *objetos* (Morgan, 2014; O'Halloran, 2005 & 2007; Pimm, 1987; Sfard, 2003 & 2008).

Asimismo, el lenguaje matemático recurre a un vocabulario especializado para nombrar sus objetos y sus procesos, el cual involucra no sólo palabras exclusivas (cateto, polinomio, etc.), sino también algunas provenientes del lenguaje cotidiano (segmento, sumar, dividir, etc.) que adquieren ciertas restricciones en su uso en la actividad matemática, a diferencia de la cotidiana; así como el uso de grupos nominales densos para sintetizar grandes cantidades de información; por ejemplo, *máximo común divisor*, *mínimo común múltiplo*, entre otros (Morgan, 2014; Schleppegrell, 2004). Ambas características se asumen como una de las fuentes más comunes de dificultades en su aprendizaje (Halliday, 1975; Morgan, 2014; Pimm, 1987;).

Con base en estas y otras premisas, algunos investigadores han propuesto que el aprendizaje del lenguaje matemático debe pensarse como el aprendizaje de una segunda lengua (Kirshner, 2001; Moschkovich, 2018; Pimm, 1987), lo cual deriva también de la importancia de promover una *competencia comunicativa*. Esto, de acuerdo con Pimm (1987), "implica saber cómo usar y comprender estilos de lenguaje apropiados para circunstancias sociales particulares" (p. 4), destacándose que este uso depende del entendimiento profundo de las reglas y las estructuraciones de este lenguaje, las cuales en el contexto escolar no son del todo explícitas (Drouhard & Teppo, 2004; Halliday, 1993a & 1993b; Morgan, 1996 & 2014; O'Halloran, 2005 & 2007; Pimm, 1987; Schleppegrell, 2004 & 2007).

Otro de los aspectos más reconocidos del lenguaje matemático es el uso sistemático de símbolos, razón por la cual se le identifica como un sistema de notación formal (Morgan, 2014). Diversos estudios han mostrado que estos sistemas simbólicos son regidos por reglas gramaticales que permiten su manipulación para conformar expresiones bien determinadas (Doran, 2018; Kirshner, 1987 & 2001; Morgan, 2014; O'Halloran, 2005). Mientras que la manipulación de estos sistemas simbólicos, principalmente en los usuarios fluentes del lenguaje matemático, se produce sin necesidad de una referencia a su semántica (Pimm, 1987), para muchos otros este aspecto es el que justamente les ocasiona grandes dificultades (Bednarz, Kieran & Lee, 1996; Mason, 1996), incluso para estudiantes que llegan al nivel superior (Thompson, 2017).

De acuerdo con algunas autoras (Rojano, 1994; O'Halloran, 2000 & 2005), el sistema simbólico del lenguaje actual de las matemáticas está constituido por el simbolismo algebraico. Como consecuencia, los estudios relativos al lenguaje algebraico, con base en aproximaciones lingüísticas y semióticas (por ejemplo, Arzarello, Bazzini & Chiappini, 2001; Drouhard, 1992; Kirshner, 1987 & 2001; Kirshner & Awtry, 2004), han estudiado principalmente las características semánticas y sintácticas del simbolismo (Chico, 2018). Por ejemplo, desde la postura de la gramática generativa de Noam Chomsky, Kirshner (1987) logró demostrar que el simbolismo algebraico puede considerarse un lenguaje en sí mismo, dando a conocer las estructuras profundas y superficiales de su gramática; lo que desde otros campos como la lingüística sigue siendo objeto de investigación para mejorar la pedagogía de las ciencias en general (Doran, 2018; O'Halloran, 2005).

Si bien estos aportes han logrado hasta el día de hoy generar un entendimiento importante respecto de la naturaleza general del lenguaje matemático y las particularidades del simbolismo algebraico, recientemente se ha manifestado la importancia de dos tipos de consideraciones respecto de los estudios contemporáneos del lenguaje matemático en la ME. La primera de estas consideraciones plantea una necesidad de conceptualizar el lenguaje matemático como un lenguaje multisemiótico, es decir, un lenguaje que produce significados a partir de más de un recurso semiótico; a saber, lenguaje natural, simbolismo e imágenes visuales (Drouhard & Teppo, 2004; Morgan, 2014; Morgan, *et al.,* 2014; Moschkovich *et al.,* 2018; O'Halloran, 2005, 2007 & 2015a; Schleppegrell, 2007). La segunda consideración es la necesidad de que los estudios arrojen luz sobre "el desarrollo de las competencias y los conocimientos lingüísticos necesarios" (Morgan *et al.,* 2014, p. 843) en el quehacer matemático por parte de los estudiantes.

De esta manera, identificamos en la literatura en ME una nula exploración respecto de estas características multisemióticas del lenguaje algebraico y su consideración dentro de los conocimientos y las competencias lingüísticas que jóvenes de bachillerato deberían desarrollar en su trayectoria académica. Por esta razón estamos interesados en profundizar en elementos que permitan robustecer las prácticas discursivas en la escuela a partir de un análisis de las características multisemióticas de textos algebraicos como punto de partida.

Así, en este trabajo reportamos parte de una investigación en la que procuramos generar un entendimiento robusto sobre las características multisemióticas del lenguaje algebraico en dos fases. La primera fase, un análisis de textos algebraicos originales de Viète y Descartes como resultado de un estudio histórico-epistemológico (EHE) previo relativo al desarrollo del álgebra simbólica. La segunda fase, en la cual nos encontramos actualmente, un análisis de textos desarrollados por estudiantes de bachillerato al explicar la resolución de ciertas tareas matemáticas, fundamentadas en aportaciones epistemológicas provenientes del EHE). Con estos análisis se busca reconocer las competencias y los conocimientos lingüísticos multisemióticos que fueron requeridos a nivel histórico y los que ponen en juego estudiantes de bachillerato mexicano, con el objetivo de identificar posibles filiaciones y rupturas en este tipo de competencias multisemióticas hasta ahora no exploradas en ME.

Puesto que no reconocimos construcciones teóricas específicas en ME para nuestro propósito de investigación, recurrimos a construcciones del campo de la lingüística; en particular, a los planteamientos de Kay L. O'Halloran respecto del *análisis sistémico-funcional del discurso multimodal*.

En el presente capítulo reportamos los resultados de esta primera fase de la investigación que consistió en determinar los *mecanismos de intersemiosis* presentes en algunos textos algebraicos de Viète y Descartes.

Fundamentación teórica

La multimodalidad o el estudio de discursos multimodales es un campo de investigación emergente dentro de la lingüística (O'Halloran, 2005) cuya finalidad es "comprender la contribución de varios recursos semióticos [...] en los estudios de comunicación" (Crawford Camiciottoli & Fortanet-Gómez, 2015, p. 1); por lo que "el análisis e interpretación del uso del lenguaje se contextualiza en conjunto con otros recursos semióticos que se utilizan simultáneamente para la construcción del significado" (O'Halloran, 2004, p. 1).

El modelo del análisis sistémico-funcional del discurso multimodal (ASFDM) desarrollado por Kay O'Halloran (2005, 2007, 2008, 2011, 2012, 2014 & 2015b) es un enfoque que amplía la perspectiva de la teoría lingüística sistémico-funcional (LSF) propuesta por M. A. K. Halliday (1982) hacia el estudio de los discursos multimodales y multisemióticos, como el de las matemáticas.

De acuerdo con O'Halloran (2007), "el estudio del discurso lingüístico por sí solo tiene limitaciones teóricas que tienen el potencial de simplificar y distorsionar la naturaleza real de las prácticas pedagógicas en las aulas de matemáticas" (p. 79), motivo por el cual el análisis multimodal resulta óptimo para el estudio del discurso matemático.

Entre uno de los objetivos del ASFDM está el estudio del fenómeno de *intersemiosis*, es decir, la producción de significado articulado entre distintos recursos semióticos. En el caso de las matemáticas, la intersemiosis entre simbolismo, imágenes visuales y lenguaje natural. Este fenómeno —también conocido como *resemiotización* (O'Halloran, 2005)— implica "transiciones semióticas, o movimientos entre recursos semióticos"

(O'Halloran, 2005, p. 159), tanto a nivel discursivo (macrotransiciones) como a nivel lexicogramatical (microtransiciones) (O'Halloran, 2005).

Mecanismos de intersemiosis

Este tipo de estudios han demostrado que los discursos multimodales y multisemióticos deben valerse de mecanismos que les permitan desarrollar el potencial de significado de sus distintos recursos y modos semióticos vía la intersemiosis. O'Halloran (2005, 2007 y 2008) ha determinado para el discurso matemático actual los siguientes *mecanismos de intersemiosis:*

1. *Cohesión semiótica.* Los sistemas de opción (todas aquellas combinaciones de elementos disponibles en una lengua) se organizan para conformar textos cohesivos en el interior y a través de *minigéneros* (recursos prefabricados para la conformación de textos), ítems (elementos que funcionan como unidades distinguibles mediante opciones sistemáticas de las gramáticas del lenguaje natural, simbolismo e imágenes visuales) y *componentes* (partes constitutivas de distintos recursos semióticos que contribuyen a la construcción de la estructuración de los significados en cada ítem).
2. *Adopción semiótica*. Los sistemas de opción de un recurso semiótico son incorporados como sistemas de opción dentro de otro recurso semiótico.
3. *Mezcla semiótica*. Los ítems son conformados por sistemas de opciones de diferentes recursos semióticos.
4. *Yuxtaposición y espacialidad*. Minigéneros, ítems, componentes y elementos constitutivos son organizados composicionalmente para facilitar la intersemiosis.
5. *Transición semiótica*. Sistemas de opción que producen macrotransiciones, las cuales cambian el discurso de un minigénero, un ítem y un componente hacia otro.
6. *Metáfora semiótica*. Se producen incongruencias entre los diversos recursos semióticos, tanto a nivel semántico como lexicogramatical (véase Halliday, 1998), en el estatus funcional de cada elemento.

Estos mecanismos de intersemiosis permiten ver cómo los textos construyen cohesión intersemiótica entre los distintos recursos semióticos que emplean para producir significados robustos. Nuestro interés estuvo en la determinación de estos mecanismos en los textos del corpus configurado.

Consideraciones metodológicas

La fase que aquí reportamos correspondió a un estudio de tipo documental cualitativo-descriptivo respecto a la determinación de los mecanismos de intersemiosis presentes en algunos textos algebraicos originales de Viète y Descartes, y su comparación con un texto de al-Khwârizmî. Estos textos fueron elegidos como resultado de un EHE previo (véase López-Acosta, 2019), en el que se identificó la relevancia del cambio de paradigma en los textos algebraicos que Viète y Descartes propiciaron durante el Renacimiento. En el EHE se identificó que el uso de imágenes en los tratados algebraicos no era común en los tratados de los algebristas previos a la época de Viète y Descartes, y cuando aparecían tenían la función principal de justificar o validar las reglas para la resolución de ecuaciones, a diferencia de estos dos matemáticos que trabajaban problemas geométricos complejos (véase López-Acosta, 2019). Debido a la compatibilidad identificada, en el tipo de imágenes y su función, entre los tratados algebraicos previos a Viète y Descartes, se decidió comparar los textos de estos últimos con el de al-Khwârizmî, precursor de la sistematización de los conocimientos algebraicos, sobre el cual se basó la tradición algebraica posterior.

Para cada texto se contó con una traducción al inglés o al español para una mejor comprensión del contenido de los textos elegidos para analizar. Los tres textos fueron los siguientes:

1. Demostración de la quinta forma normal del *Libro conciso de cálculo de al-jabr y al-muqâbala* de al-Khwârizmî de Rosen (1831, p. 16). Contrastado con la traducción en español de Puig (1998, pp. 10-13).
2. Proposición XVI de *Supplementum Geometriae* de Viète (1646, pp. 248-249). Contrastado con la traducción al inglés de Witmer (1983, pp. 403-405).
3. Ejemplo que propone Descartes (1637, pp. 319-322) en el libro II de *La Géométrie*. Contrastado con la traducción al español de Rossell (1947, pp. 79-80).

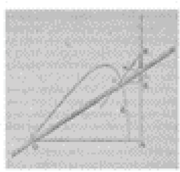
Método

La determinación de los mecanismos de intersemiosis requiere un análisis en dos niveles. El primero, un nivel discursivo que involucra la determinación de minigéneros, ítems y componentes para verificar cómo los recursos semióticos en el interior de cada una de estas estructuras se articulan o no. Una vez identificadas estas estructuras discursivas, se procede al análisis a nivel lexicogramatical (Halliday y Matthiessen, 2014), que por las limitaciones de espacio no es posible exponer aquí. Sin embargo, por ahora basta mencionar que este segundo análisis involucra la determinación de las categorías semánticas *procesos* (verbos), *participantes* (grupos nominales) y *circunstancias* (frases prepositivas o adverbiales) a nivel de la *cláusula,* la cual corresponde a la unidad gramatical mínima de significado en la LSF y que comprende al menos un proceso.

A manera de ejemplo en la figura 1 mostramos el texto de Descartes seccionado por cláusulas, donde se muestran las marcas del análisis de algunas de las categorías semánticas de interés mencionadas.

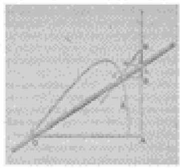
Figura 1. *Ejemplo del análisis lexicogramatical*

1. Como si quisiera saber
2. de qué género es la línea EC [[que imagino descrita por la intersección de la regla GL y la pieza CNKL,]]



3. cuyo lado KN está prolongado indefinidamente hacia C,
4. y que moviéndose ^KN sobre el plano, en línea recta
5. –es decir de tal manera que su lado KL se encuentre siempre aplicado sobre alguna región de la línea BA [[prolongada de uno y otro lado—]]
6. hace mover circularmente la regla GL alrededor del punto G,
7. por estar ella ^LA REGLA GL vinculada
8. de tal manera que ^LA REGLA pasa siempre por el punto L.
9. ^YO Elijo una línea recta [[como AB]]
10. para referir ^YO a sus diversos puntos ^DE AB todos los de la línea curva EC;
11. y en esta línea ^YO AB elijo un punto. [[como el A,]]
12. Para ^YO empezar por él el cálculo.
13. Digo ^YO

13. Digo ^YO
14. que ^YO elijo éste o aquella
15. porque soy libre de tomarlos como quiera:
16. pues aunque haya muchas maneras de elección
17. para hacer ^YO la ecuación más corta y más fácil,
18. siempre, << cualquiera sea la manera [[como se los tome,]] >>
19. puede hacerse [[que la línea aparezca de un mismo género,]]
20. como es fácil [[demostrar.]]



21. Después de esto, tomando un punto cualquiera de la curva, como el C,
22. sobre el cual supongo
23. que el instrumento [[que sirve para describirla]] está aplicado,
24. trazo por este punto C la línea CB paralela a la GA,
25. y puesto que CB y BA son dos cantidades indeterminadas y desconocidas,
26. ^YO las designo a una y y a la otra x.
27. Pero, para encontrar la relación de ambas,
28. considero también las cantidades conocidas [[que determinan el trazado de esa línea curva,]] tales como GA [[que denomino a;]] Kl, [[que denomino b]] y NL paralela a GA, [[que denomino c.]]
29. Luego digo:
30. como LN es a LK
31. o c ^ES a b,
32. así CB [[o sea y,]] es a BK [[que es por consiguiente $\frac{b}{c}y$;]]
33. y BL es $\frac{b}{c}y - b$;
34. y AL es $x + \frac{b}{c}y - b$.
35. Además, como CB es a LB
36. y ^ES a $\frac{b}{c}y - b$.
37. así a [[o sea GA]] es a LA [[o $x + \frac{b}{c}y - b$.]]
38. De manera que multiplicando la segunda ^a por la tercera ^$x + \frac{b}{c}y - b$
39. se obtiene $\frac{ab}{c}y - ab$.
40. ^$\frac{ab}{c}y - ab$ que es igual a $xy + \frac{b}{c}yy - by$,
41. ^ $xy + \frac{b}{c}yy - by$, que resulta multiplicando la primera^y por la última $x + \frac{b}{c}y - b$;
42. y así que la ecuación [[que se debía encontrar]] es [[$yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$.]]
43. En la cual se sabe
44. que la línea EC es de primer género:
45. pues, en efecto, no es otra que una hipérbola.

FUENTE: Elaboración propia.

Análisis y resultados

Proporcionamos un ejemplo para determinar los mecanismos de intersemiosis en los textos. Partiremos mostrando la estructura discursiva de los tres textos y posteriormente mostraremos, apoyándonos únicamente con el texto de Descartes, los elementos que permiten determinar la presencia o la ausencia de cada uno de los mecanismos.

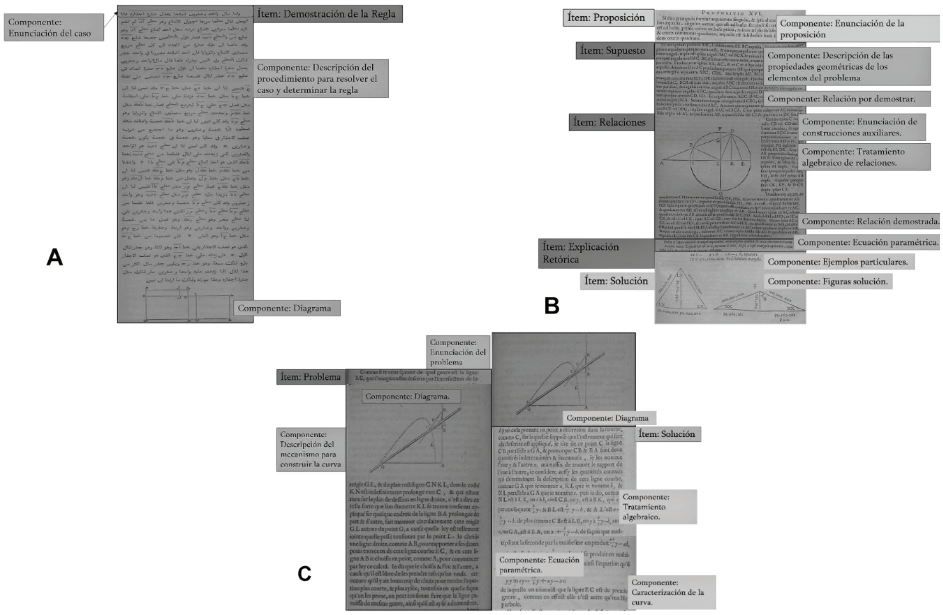
Estructura discursiva de los textos

La tabla 1 muestra las distintas estructuras discursivas presentes en los tres textos (véase figura 2). Puede notarse la complejidad de los textos de Descartes y Viète, lo cual implica un uso sistemático de más estructuras discursivas en comparación con el de al-Khwârizmî. Esto se debe a una razón epistemológica, en tanto corresponden con el distinto tipo de paradigma algebraico. La imagen en al-Khwârizmî, como hemos mencionado, se empleaba únicamente para demostrar las reglas normales para la solución de ecuaciones, mientras que en Viète y Descartes correspondía con el diagrama de problemas geométricos que estaban siendo investigados para determinar fórmulas y expresiones algebraicas paramétricas de solución.

Tabla 1. *Estructura discursiva en los tres textos*

Texto	***Estructura discursiva***		
	Minigéneros	***Ítems***	***Componentes***
al-Khwârizmî	• Demostración-explicación	Demostración de la regla	• Enunciación del caso • Descripción del procedimiento para resolver el caso y determinar la regla • Diagrama
Viète	• Planteamiento de la proposición geométrica	Proposición	• Enunciación de la proposición
	• Tratamiento algebraico del problema (análisis-síntesis)	Supuesto	• Descripción de propiedades geométricas de los elementos del problema • Relación geométrica por demostrar
		Relaciones	• Descripción de construcciones auxiliares • Diagrama • Tratamiento algebraico de relaciones
		Explicación retórica	• Ecuación paramétrica
		Solución	• Ejemplos particulares • Figuras solución
Descartes	• Planteamiento del problema	Problema	• Enunciación del problema • Diagrama • Descripción del mecanismo para construir la curva
	• Tratamiento algebraico del problema (análisis-síntesis)	Solución	• Diagrama • Tratamiento algebraico • Ecuación paramétrica • Caracterización de la curva

FIGURA 2. *Estructuras discursivas en los textos de al-Khwârizmî (A), Viète (B) y Descartes (C)*



FUENTE: Elaboración propia.

Determinación de los mecanismos de intersemiosis en el texto de Descartes

En la tabla 2 mostramos el ejemplo de la determinación de los mecanismos de intersemiosis para el texto de Descartes que presentamos en el apartado anterior.

Mecanismos de intersemiosis en los textos

A continuación, en la tabla 3, se muestra la condensación del análisis de los mecanismos de intersemiosis detectados en los textos analizados.

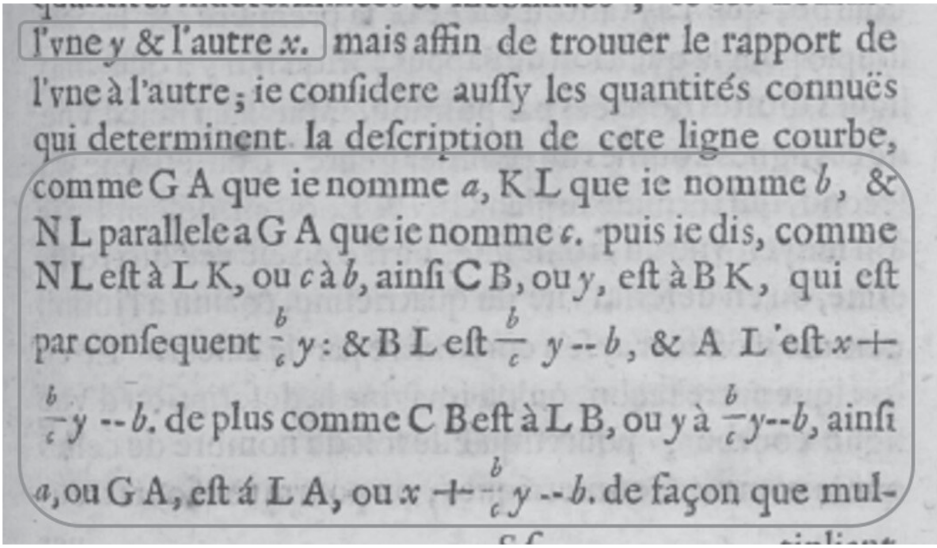
Una de las primeras consideraciones que arroja nuestro análisis es que si bien los tres textos cumplen casi con los mismos mecanismos intersemióticos, es necesario considerar que los textos de Viète y Descartes incorporan los tres recursos semióticos del lenguaje matemático escrito

Tabla 2. *Mecanismos de intersemiosis en el texto de Descartes*

Mecanismos intersemióticos		
Mecanismo	***Presencia***	***Justificación***
Cohesión semiótica	X	Hay cohesión semiótica en tanto se dan casos de *referencia*, pues en cada ítem hay una constante repetición del participante "curva", así como de los *participantes* descritos en el componente "Descripción del mecanismo para construir la curva" y en el componente "Diagrama".
Adopción semiótica	X	Hay incorporación sistemática de simbolismo geométrico y algebraico en el recurso semiótico del lenguaje natural. Véase, por ejemplo, en la figura 3 cómo se establecen las asociaciones entre simbolismo y los *participantes* del diagrama en el lenguaje natural, a través de *procesos relacionales identificativos* como "designo" y "denomino".
Mezcla semiótica		No se identifica por el hecho de que en el diagrama no hay involucramiento del simbolismo o el texto lingüístico que permita contextualizar y robustecer la carga perceptual de la imagen presente.
Yuxtaposición y espacialidad	X	La disposición espacial, en términos de centrado y de espaciado lineal, que se emplea en el componente "Diagrama" y en el componente "Ecuación paramétrica" contribuye a que estos elementos sean concebidos como la información importante. Véase en la figura 4 cómo la ecuación paramétrica se mantiene en el texto en una línea separada del resto con la intención de dotarla de protagonismo en el texto.
Transición semiótica	X	Se identifica que del ítem "Problema" hay un progresivo tránsito entre los distintos componentes de ambos ítems. A partir de los componentes "Diagrama" y "Descripción del mecanismo para construir la curva" es posible el establecimiento del componente "Tratamiento algebraico". Esto porque la explicación detallada de cómo funciona el instrumento permite caracterizar las propiedades geométricas subyacentes, las cuales, por consiguiente, permitirán transitar al componente "Ecuación paramétrica" una vez establecidas las relaciones algebraicas. Finalmente, a partir del componente "Ecuación paramétrica" se transita al componente "Caracterización de la curva", puesto que el género de la curva es interpretado por medio de las características algebraicas de la ecuación. En este sentido se identifica la transición: "Diagrama" y "Descripción del mecanismo para construir la curva" –> "Tratamiento algebraico" –> "Ecuación paramétrica –> "Caracterización de la curva".
Metáfora semiótica	X	Se da un único caso en el interior del ítem "Solución" en que, a través de un *proceso relacional identificativo* "es" se asocia el grupo nominal, en la cláusula 42, "*la ecuación que se quería encontrar…*" con la cláusula simbólica "$yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$" (Véase figura 4).

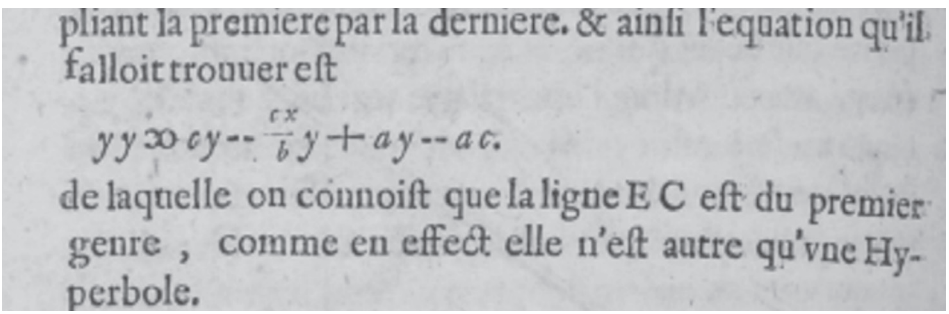
Fuente: Elaboración propia.

Figura 3. *Adopción semiótica en el texto de Descartes*


l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie conſidere auſſy les quantités connuës qui determinent la deſcription de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele a G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L eſt à L K, ou c à b, ainſi C B, ou y, eſt à B K, qui eſt par conſequent $\frac{b}{c}y$: & B L eſt $\frac{b}{c}y - b$, & A L eſt $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B eſt à L B, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainſi a, ou G A, eſt á L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que mul-

Fuente: Descartes (1637, p. 321).

Figura 4. *Uso del espaciado para destacar la ecuación como información relevante del texto*


pliant la premiere par la derniere. & ainſi l'equation qu'il falloit trouuer eſt

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

de laquelle on connoiſt que la ligne E C eſt du premier genre, comme en effect elle n'eſt autre qu'vne Hyperbole.

Fuente: Descartes (1637, p. 322).

actual (simbolismo, lenguaje natural e imagen), a diferencia del de al-Khwârizmî. Esto da una muestra de evolución en términos de la consistencia de la escritura típica en los textos previos a Viète y Descartes que además incorporan el recurso del simbolismo.

Se identifica que los tres textos no poseen las características de la gramática del lenguaje matemático en los textos actuales, en el sentido de que

TABLA 3. *Presencia de los mecanismos de intersemiosis en los tres textos*

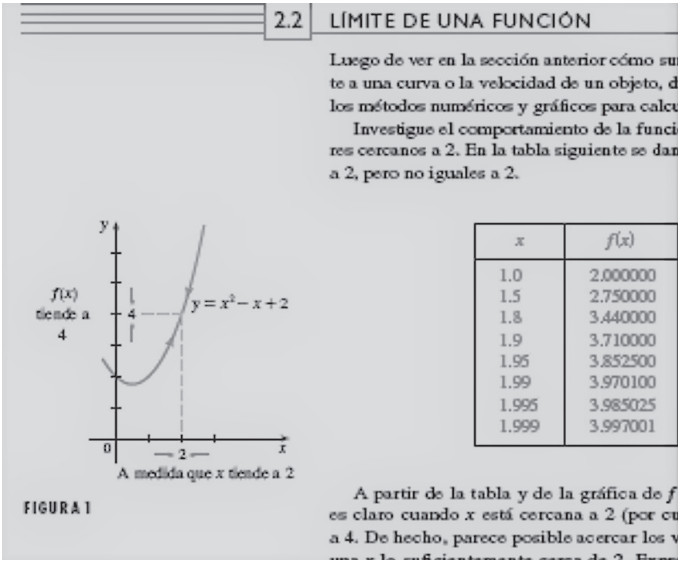
Mecanismo	***Presencia***		
	al-Khwârizmî	***Viète***	***Descartes***
Cohesión semiótica	X	X	X
Adopción semiótica	X	X	X
Mezcla semiótica			
Yuxtaposición y espacialidad	X	X	X
Transición semiótica	X	X	X
Metáfora semiótica	X		X

FUENTE: Elaboración propia.

no se encuentran presentes todos los mecanismos reportados por O'Halloran (2005). No obstante, los discursos construidos muestran integración sistemática de los significados de sus recursos semióticos, permitiendo construir significados algebraicos articulados y robustos que cumplen deliberadamente con los objetivos de cada texto. En el caso de Viète y Descartes, ambos investigaban relaciones en las imágenes que los obligaban a destacar y representar distintos tipos de participantes, procesos y circunstancias. Esto es, el movimiento, en el caso de Descartes; por lo tanto, en el texto la intersemiosis se torna distinta pues se requiere otro tipo de recursos no presentes en los algebristas previos. Por ejemplo, el hecho de que se identifique más de un ítem, minigéneros y componentes es un reflejo de este hecho, lo cual implica que los mecanismos de intersemiosis disponibles sean empleados de manera sistemática.

Particularmente, la ausencia del mecanismo de mezcla semiótica dificulta construir en estos textos una mayor cohesión entre los tres sistemas, en especial en el caso de las imágenes, por no emplearse el simbolismo y el lenguaje natural dentro de las mismas como los textos matemáticos actuales (véase figura 2). La mezcla semiótica permite señalar aspectos relevantes que relacionen la imagen con el texto lingüístico, permitiendo al lector recuperar de manera inmediata los participantes, procesos y las ircunstancias relevantes detallados en el lenguaje natural sobre las imágenes.

Figura 5. *Ejemplo de mecanismo de mezcla semiótica en un texto actual*


2.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Luego de ver en la sección anterior cómo su
te a una curva o la velocidad de un objeto, d
los métodos numéricos y gráficos para calcu
Investigue el comportamiento de la funci
res cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan
a 2, pero no iguales a 2.

x	$f(x)$
1.0	2.000000
1.5	2.750000
1.8	3.440000
1.9	3.710000
1.95	3.852500
1.99	3.970100
1.995	3.985025
1.999	3.997001

A partir de la tabla y de la gráfica de f
es claro cuando x está cercana a 2 (por cu
a 4. De hecho, parece posible acercar los v

Fuente: Steward (2008, p. 88).

Por otro lado, es importante destacar que el simbolismo algebraico en estos textos no funciona como un recurso semiótico autónomo, sino más bien es adoptado en el recurso del lenguaje natural. Esto genera reflexiones importantes respecto del papel predominante del simbolismo en el quehacer algebraico, toda vez que, en términos semióticos, en estos textos es un recurso más que se ve articulado con la imagen y el lenguaje natural, y en conjunto los tres producen el significado algebraico completo.

Discusión

La investigación respecto del entendimiento del lenguaje matemático sin duda es vasta en la ME y, por lo tanto, los resultados han contribuido de manera importante a comprender cada vez mejor la forma en que el discurso matemático se inmiscuye en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. No obstante, como hemos argumentado, el estudio de la multimodalidad y la multisemiosis en el discurso matemático es un área poco explorada en el campo. Por ello, diversos autores han recomendado recientemente su inclusión en los estudios del lenguaje matemático (véase Morgan *et al.*, 2014; Moschkovich 2018). Asimismo, otro aspecto detectado en las investigaciones previas es la predominancia del estudio del discurso oral y la escasa atención al discurso escrito (Casa, Choppin, & Moschkovich, 2020), lo que deja clara una brecha en las investigaciones relativas al lenguaje matemático que es necesario ir reduciendo.

En este sentido, el estudio que reportamos es relevante en el contexto de las investigaciones actuales del lenguaje, puesto que para lograr reconocer estas potencialidades del discurso escrito y multisemiótico con fines pedagógicos debemos obtener descripciones robustas sobre los diversos recursos semióticos utilizados y la forma en que éstos se articulan (Doran, 2018).

Con estas ideas proponemos que dentro de las competencias lingüísticas que mencionan Morgan *et al.* (2014) es necesario considerar también competencias multisemióticas como los mecanismos de intersemiosis en la creación de los textos matemáticos escritos por parte de los estudiantes.

A partir de esta investigación estamos comenzando a encontrar elementos para atender estas problemáticas de nuestro campo, puesto que, dada esta ausencia de marcos de referencia en torno de la intersemiosis en los textos escritos, lo encontrado nos brinda una primera aproximación que permitirá estudiar los mecanismos que ponen en juego los estudiantes en sus producciones escritas. Esto generará un primer acercamiento respecto de qué elementos sería necesario considerar en el aprendizaje del lenguaje algebraico, no únicamente como un sistema de símbolos, sino desde una postura más holística que abarque su complejidad multisemiótica, es decir, como un lenguaje en toda su extensión.

En este tenor, consideramos que reducir los estudios relativos al aprendizaje del álgebra, en tanto lenguaje, a profundizaciones únicamente en su simbolismo, conducirá a formas limitadas de comprender la estructuración de los discursos algebraicos y del quehacer algebraico propiamente; pues el simbolismo algebraico sólo es uno de tres recursos semióticos que interactúan para conformar los significados algebraicos en su totalidad, como se identificó en los textos analizados.

Evidentemente, esta consideración implica que la didáctica del álgebra amplíe el rango del problema y, por lo tanto, esta consideración requiere mirar más allá de la ME, toda vez que las construcciones teóricas actuales no cuentan con la suficiente potencia para mirar estos fenómenos de intersemiosis.

Como hemos hecho en esta investigación, encontramos en la lingüística, y en las perspectivas multimodales asociadas, un campo fructífero y fértil para explorar, dialogar y recuperar construcciones teóricas que nos permitan en ME seguir profundizando en el entendimiento del lenguaje matemático desde una perspectiva multimodal.

Referencias

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (2001). A Model for Analyzing Algebraic Processes of Thinking. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell &y R. Lins, *Perspectives on School Algebra* (pp. 61-82). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_4

Austin, J., & Howson, A. (1979). Language and Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, 10,* 161-197.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3

Casa, T., Choppin, J., & Moschkovich, J. (2020). *Crafting a Research Agenda for Writing to Reason Mathematically*. https://s.uconn.edu/WritingInMath

Chico, J. (2018). Impacto de la interacción en grupo en la producción de la lengua del álgebra en clase de matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 14,* 31-47. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.243

Descartes, R. (1637). *Discours de la mèthode pour bien conduire sa raison & chercher la varité dans les sciences plus la diotrique, les meteores, et la geometrie, qui sont des essais de cete methode*. Leyden: Ian Marie.

Doran, Y. J. (2018). *The Discourse of Physics: Building Knowledge through Language, Mathematics and Image*. Nueva York: Routledge.

Drouhard, J.-P., & Teppo, A. (2004). Symbols and Language. En K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal, *The Future of the Teaching and Learning of Al-*

gebra (pp. 227-264). Boston: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_9

Halliday, M. A. (1975). Some Aspects of Sociolinguistics. En *Interactions between Linguistics and Mathematical Education* (pp. 64-73). Copenhagen: UNESCO.

Halliday, M. A. (1982). *El lenguaje como semiótica social: La interpretación social del lenguaje y el significado*. México: Fondo de Cultura Económica.

Halliday, M. A. (1993a). On the Language of Physical Science. En M. Halliday & J. Martin, *Writing Science: Literacy and Discursive Power* (pp. 59-75). Londres: Routledge.

Halliday, M. A. (1993b). Some Grammatical Problems in Scientific English. En M. A. Halliday, & J. R. Martin, *Writing Science: Literacy and Discursive Power* (pp. 69-85). Londres: Routledge.

Halliday, M. A. (1998). Language and Knowledge: The Unpacking of Text. En J. Webster (Ed.), *The Collected Works of M. A. K. Halliday* (pp. 24-48). Londres/Nueva York: Continuum.

Halliday, M. A., & Matthiessen, C. (2014). *An Introduction to Functional Grammar* (4ª ed.). Nueva York: Routledge.

Kieran, C., Forman, E., & Sfard, A. (Eds.) (2003). *Learning Discourse: Discursive Approaches to Research in Mathematics Education*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Press. https://doi.org/10.1007/0-306-48085-9

Kirshner, D. (1987). *The Grammar of Symbolic Algebra*. Canadá: The University of British Columbia.

Kirshner, D. (2001). The Structural Algebra Option Revisited. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 83-98). Dordrecht, Paísese Bajos: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_5

Kirshner, D., & Awtry, T. (2004). Visual Salience of Algebraic Transformations. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(4), 224-257. https://doi.org/10.2307/30034809

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. En N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to Algebra* (pp. 65-86). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5

Morgan, C. (1996). The Language of Mathematics: Towards a Critical Analysis of Mathematics Texts. *For the Learning of Mathematics, 16*(3), 2-10.

Morgan, C. (2014). Mathematical Language. En S. Lerman, *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 388–391). Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_99

Morgan, C., Craig, T., Schuette, M., & Wagner, D. (2014). Language and Communication in Mathematics Education: An Overview of Research in the Field. *ZDM Mathematics Education, 46,* 843-853. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0624-9

Moschkovich, J. (2018). Recommendations for Research on Language and Learning Mathematics. En J. W. Moschkovich, *Language and Communication in Mathematics Education* (pp. 37-47). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75055-2_4

Moschkovich, J., Wagner, D., Bose, A., & Rodrigues, J. (eds.) (2018). *Language and Communication in Mathematics Education: International Perspectives*. Alemania: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75055-2

O'Halloran, K. L. (2000). Classroom Discourse in Mathematics: A Multisemiotic Analysis. *Linguistics and Education, 10*(3), 359-388. https://doi.org/10.1016/S0898-5898(99)00013-3

O'Halloran, K. L. (2005). *Mathematical Discourse: Language, Symbolism and Visual Images.* Londres/Nueva York: Continuum.

O'Halloran, K. L. (2007). Systemic Functional Multimodal Discourse Analysis (SF-MDA) Approach to Mathematics, Grammar and Literacy. En A. McCabe, M. O'Donnell & R. Whittaker, *Advances in Language and Education* (pp. 75-100). Londres/Nueva York: Continuum.

O'Halloran, K. L. (2008). Inter-Semiotic Expansion of Experiential Meaning: Hierarchical Scales and Metaphor in Mathematics Discourse. En C. Jones & E. Ventola, *New Developments in the Study of Ideational Meaning: From Language to Multimodality* (pp. 231–254). Londres: Equinox. https://doi.org/10.1558/equinox.21991

O'Halloran, K. L. (2012). Análisis del discurso multimodal. *ALED, 12*(1), 75-97.

O'Halloran, K. L. (2014). Systemic Functional Multimodal Discourse

Analysis. En S. Norris & C. Maier (Eds.), *Interactions, Images and Text: A Reader in Multimodality* (pp. 137-154). Berlín: De Gruyter Mouton.

O'Halloran, K. L. (2015a). The Language of Learning Mathematics: A Multimodal Perspective. *The Journal of Mathematical Behaviour, 40,* 63–74. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.09.002

O'Halloran, K. L. (2015b). Mathematics as Multimodal Semiosis. En E. Davis & P. Davis (Eds.), *Mathematics, Substance and Surmise: Views on the Meaning and Ontology of Mathematics* (pp. 287-304). Heidelberg, Alemania: Springer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-319-21473-3_14

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms.* Londres: Routledge & Kegan Paul.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje: Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 12*(1), 45-56.

Rosen, F. (1831). *The Algebra of Mohammed Ben Musa*. Londres: The Oriental Translation Fund.

Schleppegrell, M. (2004). *The Language of Schooling: A Functional Linguistics Perspective*. Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Schleppegrell, M. (2007). The Linguistic Challenges of Mathematics Teaching and Learning: A Research Review. *Reading and Writing Quarterly, 23,* 139-159. https://doi.org/10.1080/10573560601158461

Sfard, A. (2003). There Is More to Discourse than Meets the Ears: Looking at Thinking as Communicating to Learn More about Mathematical Learning. En C. Kieran, E. Forman & A. Sfard, *Discursive Approaches to Research in Mathematics Education* (pp. 13-57). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Press. https://doi.org/10.1023/A:1014097416157

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourse, and Mathematizing.* Reino Unido: Universidad de Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944

Steward, J. (2008). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.

Thompson, P. (2017). Foreword. En S. Steward (Ed.), *And the Rest is Just Algebra* (pp. v-vi). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7

Sección 2

ESTUDIOS ACERCA DE LA COMPRENSIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Capítulo 6. Más de una década investigando hechos didácticos desde la teoría modos de pensamiento: Hallazgos y avances

Marcela Parraguez
https://orcid.org/0000-0002-6164-3056
Valeria Randolph
Samuel Campos
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)

Resumen

En este capítulo se presentan distintos hechos didácticos desde la perspectiva de la *teoría modos de pensamiento* (teórico y práctico), a través de investigaciones en didáctica de la matemática durante un periodo de más de 10 años de trabajo. Cada investigación que se relaciona con lo concreto o lo abstracto en matemática se "mira" con base en una variedad o adherencia a la *teoría modos de pensamiento*, en la que los "articuladores" entre los modos de pensar son los protagonistas principales de la mirada que se quiere establecer, en pro de la comprensión de conceptos matemáticos específicos en enseñantes y aprendices de la matemática, que se abordan en las investigaciones que se presentan aquí.

Palabras clave: modos de pensamiento, hechos didácticos, articuladores.

Introducción

Iniciaremos este apartado con la pregunta: ¿qué es un *modo de pensamiento*? O, mejor aún, ¿qué es un *modo de pensar* un fragmento *F* de la matemática? Seguramente si indagamos en la literatura especializada encontraremos descripciones e interpretaciones diversas; sin embargo, de acuerdo con el contexto que para este capítulo representa *F* —la matemática—, diremos que los modos de pensar *F* constituyen formas de ver y entender *F*. Por ejemplo, si pensamos en el objeto recta en el plano real y la etiquetamos como *L*, lo primero que se nos viene a la mente es la forma figural de *L*, y no su descripción como el lugar geométrico del conjunto de todos los puntos $(x,y) \in \mathrm{R}^2$ tales que $y=mx+n$, para algún $m,n \in \mathrm{R}$. De acuerdo con esto último, en lo figural, una línea recta se puede ver como un objeto preestablecido con una cierta forma que ocupa determinada parte en el espacio, con lo cual se podrá hablar de las propiedades de la línea recta pero, por otro lado, estas propiedades sólo la describirán pero no la definirán. En cambio, en la descripción como lugar geométrico la línea recta queda definida de acuerdo con ciertas relaciones específicas entre las coordenadas de los puntos o vectores en el espacio de dimensión dos.

Si nos situamos en el contexto de la Didáctica de la Matemática, los Modos de Pensar constituyen una *teoría cognitiva* (Sierpinska, 2000), la cual fue planteada con la finalidad de interpretar y describir el acto de comprensión de conceptos en un área de la matemática bien particular —el Álgebra Lineal— que etiquetaremos como AL.

La base de estos modos de pensar el AL se sustentó, en general, en el pensar teórico (PT) (que se produce en el hecho puro de pensar) y en el pensar práctico (PP) (que se genera con el fin de obtener algo en concreto) del conocimiento. Para que esta base del pensamiento tan amplia fuera llevada al dominio del AL, Sierpinska y sus colaboradores (Sierpinska, 2005; Sierpinska, Nnadozie & Oktaç, 2002) se dieron a la tarea de caracterizar ambos modos de pensar, para que fueran acogidos en el contexto de un fragmento matemático *F* cualquiera, y obtuvieron como resultado lo que se muestra en la tabla 1.

Una vez sustentados los modos de pensar teórico y práctico de *F*, la cuestión ahora es precisar cómo se interpreta la comprensión de *F*.

Desde la perspectiva de Sierpinska (1994), la comprensión es un acto que está relacionado con un proceso que se desarrolla conforme se validan ciertas suposiciones mediante la abstracción de objetos matemáticos. Para precisar lo que significa "acto de comprensión", Sierpinska (1994) recurre a la definición propuesta por Ajdukiewicz (1974), para quien la comprensión es un acto mental por medio del que un *objeto de comprensión* se

TABLA 1. *Caracterización del PT en contraposición del PP*

	PT	*PP*
Objetivo	Es pensar por el bien de pensar.	Es pensar en aras de hacer las cosas o hacer que las cosas sucedan.
	Es comprender la experiencia y reflexionar sobre los posibles resultados de una acción, no para llevar a cabo una acción.	Tiene por objetivo tomar decisiones relativas a la acción física inmediata.
Objeto	Los objetos de reflexión teórica son los sistemas de conceptos.	Es pensar en particular los "objetos" (las cosas, los asuntos, los eventos, las personas, los fenómenos).
Intereses	Significado de los conceptos. Se refiere a conexiones conceptuales. Se refiere a la coherencia conceptual y a la coherencia interna de los sistemas de representaciones simbólicas (validez epistemológica).	Importancia de las acciones. Se refiere a hechos. Se refiere a la validez de los hechos observables.
Resultados	Son las teorías y las anotaciones especializadas.	Son los cambios en los objetos de este pensamiento (construcción de algo nuevo, cambio del curso de los acontecimientos, cambio en el comportamiento de las personas, etc.).

FUENTE: Sierpinska, Nnadozie & Oktaç (2002).

relaciona con otro objeto que funge como *base de la comprensión* del primero, es decir, cuando el pensamiento teórico de *F* interactúa con el pensamiento práctico de *F*. Así, por ejemplo, en un caso común se puede decir que una persona ha comprendido la expresión "la multiplicación de los panes y los peces", cuando al escucharla dirige su pensamiento a un objeto distinto del que se menciona originalmente.

Desde la perspectiva de las operaciones mentales se puede afirmar que para que un fragmento matemático *F* se comprenda, éste supone ser *identificado*, *discriminado*, *generalizado* y *sintetizado*. Sin embargo, Sierpinska (1994) aclara que la abstracción también es una operación involucrada en todas y cada una de las cuatro operaciones mencionadas, debido a que por medio de ella se destacan las características del fragmento matemático *F*.

Con este escenario en mente, y dada la naturaleza abstracta del AL, Sierpinska se propuso explicitar y caracterizar los modos de pensar el AL.

Marco teórico: los modos de pensamiento

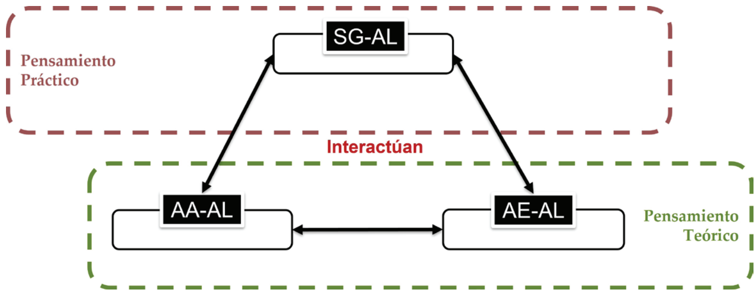
Después de muchos años de tratar de entender el razonamiento de los estudiantes en esta área de la matemática a nivel de pregrado, Sierpinska llegó a la conclusión de que una de las razones principales de las dificultades para el aprendizaje del AL es que los estudiantes comprenden muchos conceptos de la teoría del AL con un enfoque más práctico que teórico. Esa afirmación no es del todo obvia, ya que se precisa de un sustento teórico para que se transforme en un dato o una evidencia. Sin embargo, dada la naturaleza del AL, su aprendizaje no puede reducirse a la práctica y al dominio de un conjunto de procedimientos puramente aritméticos.

Para conseguir hacer explícito el pensar teórico del AL Sierpinska se basó en un estudio histórico y epistemológico de esa área del conocimiento y sustentó tres modos de pensar el AL (Sierpinska, 2000): *(1)* modo sintético-geométrico del AL (SG-AL), *(2)* modo Analítico-aritmético del AL (AA-AL) y *(3)* modo analítico-estructural del AL (AE-AL). En el Modo SG-AL, los objetos son dados directamente para ser descritos por la mente, la cual trata de describirlos de manera natural. Inversamente, en los otros modos, AA-AL y AE-AL, los objetos son dados indirectamente; de hecho, son construidos solamente por la definición de las propiedades de los elementos. Específicamente, en el modo AA-AL un objeto es definido por una fórmula que permite calcularlo; en cambio, en el modo AE-AL, un objeto es mejor definido por un grupo de determinadas propiedades.

Estos tres modos de pensar explicitan el pensar teórico del AL y, al interactuar, constituyen un modelo para describir la comprensión de conceptos del AL, como se muestra en la figura 1.

Desde una perspectiva histórica y epistemológica, la importancia de estos modos de pensar el AL radica en que vienen a conciliar dos posiciones dogmáticas opuestas que coexisten en el interior de este fragmento de

FIGURA 1. *Modelo teórico de los modos de pensar el AL*



FUENTE: Elaboración propia.

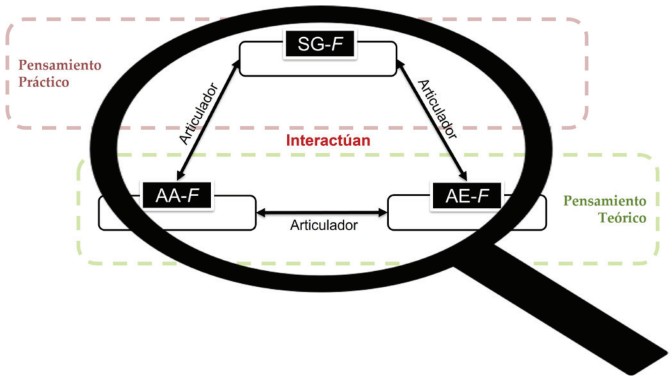
la matemática: una postura rechaza los números dentro de la geometría, mientras que la otra niega que la intuición geométrica pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético.

Entonces ahora, desde el punto de vista del investigador en didáctica de la matemática, la cuestión es preguntarse: ¿cómo aportan estos modos de pensar para interpretar la comprensión del AL? Lo primero es considerar los modos de pensar igualmente útiles, cada uno en su propio contexto. No obstante, adquieren especial importancia cuando estos interactúan entre sí. Esto último es justamente lo que se direcciona en este capítulo: mostrar adherencia (al estudiar tópicos del AL) y variedad (al estudiar tópicos diferentes del AL) a lo que realizó Sierpinska.

En lo que sigue vamos a considerar este marco teórico de los modos de pensar de Sierpinska como un lente, para interpretar la comprensión no sólo de conceptos del AL, sino que extendiéndola a otro fragmento *F* de la matemática. Para hacerlo vamos a introducir en el marco propuesto por Sierpinska un nuevo elemento, al que vamos a llamar *articuladores.* Los articuladores son elementos de la matemática que permiten el ir y venir de un modo de pensar *F* a otro; por ende, ahora el foco de la investigación se moviliza en saber cuáles son específicamente esos elementos que hacen que se produzca la interacción entre los tres modos de pensar *F*, como se muestra en la figura 2.

El hecho de haber realizado una variedad al marco teórico de Sierpinska, incorporando este elemento articulador al modelo, permitió al Grupo de Investigación y Estudios Cognitivos en Didáctica de la Matemática

FIGURA 2. *Incorporación del elemento articulador al modelo de los modos de pensar F*



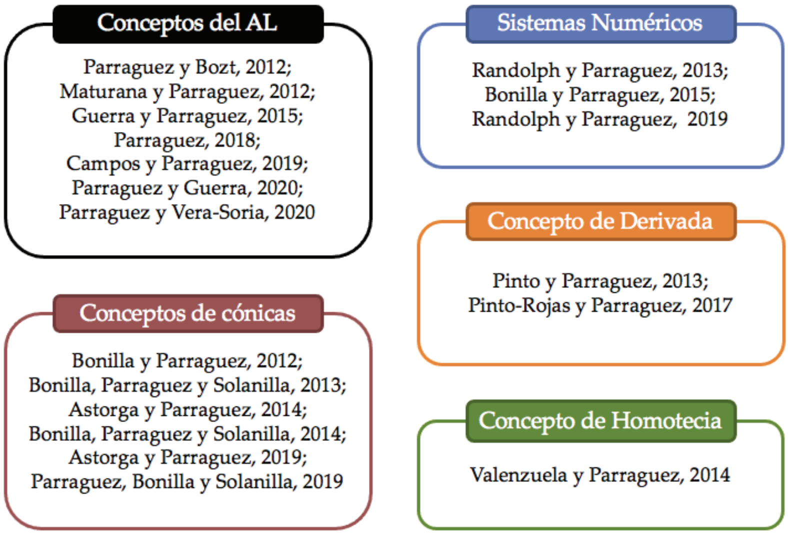
FUENTE: Elaboración propia.

(Grupo GIEC-DM) lograr grandes avances en cuanto a operacionalizar la *teoría modos de pensamiento* para interpretar la comprensión de otros fragmentos matemáticos que se alejan del AL. En la figura 3 presentamos las principales investigaciones realizadas por el GIEC-DM, con base en el modelo de la figura 2, agrupadas en distintos dominios matemáticos que hemos abordado durante los últimos 10 años.

Aspectos metodológicos

Las investigaciones realizadas con base en el modelo de la figura 2 han sido de tipo cualitativas, con una postura epistemológica interpretativa centrada en cómo se comprende un objeto matemático; es decir, se busca la comprensión de un fenómeno complejo donde los datos son *las palabras* de las personas y al mismo tiempo la matemática que se pone en juego. Para caracterizar los modos de pensar del objeto matemático en una investigación se realiza un estudio epistemológico y matemático de él. La técnica utilizada para hacerlo es la revisión bibliográfica (de libros, artículos, revistas, entre otros), para buscar distintas maneras de ver y entender el concepto matemático en su desarrollo histórico. Paso seguido, se realiza un estudio de casos y se diseña y aplican instrumentos que se estudian con base en un análisis *a priori* de las preguntas y las actividades.

FIGURA 3. *Investigaciones realizadas por el GIEC-DM*



Imbuidos en el ámbito cualitativo de más de una década de trabajo con el marco teórico de los modos de pensar, hemos seleccionado el *estudio de casos* como método. Éste corresponde "al estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes" (Stake, 2010, p. 11). Su propósito fundamental es *comprender a profundidad* el caso que interesa "tanto por lo que tiene de único como por lo que tienen de común" (Stake, 2010, p. 15). Se trata, entonces, de un estudio procesual, sistemático y lo más detallado posible de un caso que puede ser una persona, una organización, un programa, un acontecimiento, etc., y que no es un simple informe acerca de un suceso. Llamarlo *caso* es realizar una afirmación teórica: sostener que se trata del caso de algo o afirmar que se trata de un ejemplo de una clase de fenómenos más amplio (Shulman, 1999, p. 217).

Específicamente, en nuestras investigaciones utilizamos el estudio de casos múltiple, que define varios casos a la vez para estudiar y describir la realidad, preocupándonos por seleccionar aquellos que ofrezcan mejores y mayores oportunidades de aprendizaje del problema de estudio. A cada caso se realizan las mismas preguntas de investigación, comparando las respuestas para llegar a las conclusiones. Con base en varios casos de estudio, las evidencias se pueden considerar más sólidas, pues agregan validez interna a las investigaciones desarrolladas y, en consecuencia, a la teoría propuesta.

Operacionalización del modelo para un fragmento matemático *F*

En lo que sigue, para mostrar cómo opera el modelo de la figura 2 en una investigación, vamos a situarnos en dos hechos didácticos específicos: *(a)* en el concepto de *número complejo* y *(b)* en el concepto de *grupo*.

Los modos de pensar el concepto de *número complejo* y el concepto de *grupo*

Reportamos una síntesis de dos investigaciones que tienen por objetivo mostrar evidencias con sustento teórico de las diferentes maneras de pensar que profesores de matemática en ejercicio (en el caso del *sistema de los números complejos*) y estudiantes de pedagogía en matemática (en el caso del *concepto de grupo*) ponen de relieve para dar cuenta de su comprensión.

Caracterización de un modelo de comprensión para el sistema de los números complejos

En este primer ejemplo abordaremos la comprensión de un campo numérico avanzado: el del sistema de los números complejos ($\mathbb{C}$). Es preciso indicar que este fragmento de la matemática no sólo se interpreta como un conjunto de números, es decir, como una colección de elementos que poseen una característica común, sino que, más precisamente, es interpretado con base en su definición como un sistema —sistema numérico— en la medida en que está provisto de tres estructuras entrelazadas entre sí: una estructura algebraica, una estructura de orden y una estructura topológica. Esa distinción nos permite enfrentar la comprensión de estos números desde un punto de vista superior, considerándolos en todas sus dimensiones y no tan sólo como la adjunción de un conjunto de números (los *imaginarios*) a uno preexistente (los *reales*), cuyas propiedades y características no son explícitas.

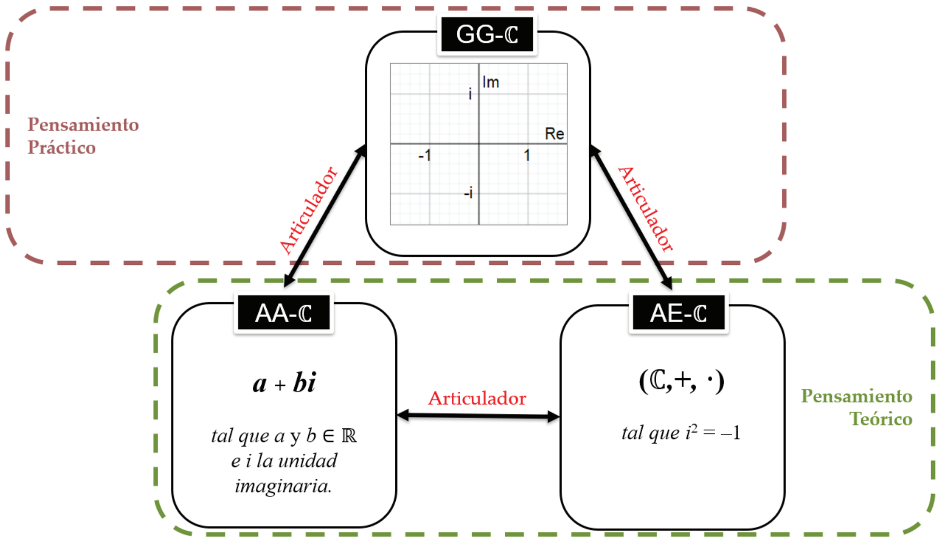
En este sentido, nos preguntamos: *¿qué significa comprender a profundidad este sistema numérico?* y *¿cómo se alcanza esa comprensión?* En este apartado abordaremos la caracterización de un modelo de comprensión para sustentado en una variedad de los modos de pensar de Sierpinska y situado en profesores de matemática en ejercicio para su validación. En específico, nos centraremos en los distintos modos de pensar $\mathbb{C}$ que son priorizados por los profesores y en la interacción entre dos de esos modos de pensamiento, en busca de la validación del elemento matemático *articulador* que favorece el ir y venir de un modo de pensamiento a otro.

Modos de pensar el sistema de los números complejos

Con base en la historia y la epistemología de $\mathbb{C}$ (Artigue & Deledicq, 1992; Randolph & Parraguez, 2019) identificaremos, en la génesis y el desarrollo de este fragmento de la matemática, cuatro momentos epistemológicos clave en los que subyacen distintas formas de pensamiento: algebraico, analítico, geométrico y formal. Esto nos permitió describir un modelo de comprensión desde una variedad de modos de pensar el AL, caracterizando tres formas de ver y entender para su comprensión profunda: como el plano complejo (pensamiento geométrico-gráfico, GG); como expresión algebraica $a + bi$, tal que a y b son números reales, e i la unidad imaginaria (pensamiento aritmético-algebraico, AA), y como estructura algebraica de cuerpo, tal que $i^2 = -1$(pensamiento analítico-estructural, AE) (véase figura 4).

El modo de pensar GG-$\mathbb{C}$ se evidencia a través de puntos y vectores del plano y desde lo que es posible realizar en él, ya sea en un registro de representación gráfico, geométrico o de lenguaje natural. El modo AA-$\mathbb{C}$, por su parte, se expresa al representar y operar con la expresión $a + bi$ con a y b números reales e i la unidad imaginaria, considerando la definición de fórmulas. Y, en el modo AE-$\mathbb{C}$, el pensamiento se dirige a la estructura algebraica y de orden del sistema, sus propiedades y sus axiomas.

Figura 4. *Modos de pensar C para su comprensión profunda*



De esta forma, un aprendiz *comprenderá a profundidad* ℂ *cuando sea capaz de transitar sin obstáculos por los distintos modos de pensar* ℂ*; a saber,* GG-ℂ*,* AA-ℂ *y* AE-ℂ. La riqueza de este modelo estará, por tanto, en la identificación y la validación de los elementos matemáticos *articuladores* que propician la interacción de los distintos modos de pensamiento. En este capítulo mostramos los modos de pensar que 10 profesores en ejercicio (P1, P2, P3, P4,…, P10) priorizan en la resolución de dos problemas de números complejos, observando, en lo particular, la interacción AA-ℂ ↔ GG-ℂ y posibles articuladores.

Modos de pensar evidenciados y articuladores en el tránsito AA-ℂ ↔ GG-ℂ

El análisis de las producciones realizadas por los profesores a ciertos problemas evidencia una falta de articulación de los modos de pensamiento, privilegiando el modo AA-ℂ para resolver y careciendo de tránsitos hacia los otros modos de pensar.

La figura 5 presenta, por ejemplo, la respuesta de P9 a la cuestión: *¿Qué números complejos cumplen con* $|z| = 5$? Aquí vemos que el profesor aborda el problema desde un modo de pensar AA-$\mathbb{C}$, listando casos particulares sin dar solución completa al problema.

FIGURA 5. *Respuesta de P9 con base en un modo de pensar* AA-$\mathbb{C}$

Los $z=a+bi$ que cumplen son los que al elevar al cuadrado su porte real y su porte imaginaria, y luego sacan raíz cuadrada da 5

$\boxed{3+4i \quad 3-4i \quad -3-4i \quad 5i \quad -5i}$

No obstante, una articulación entre los modos AA-$\mathbb{C}$ y GG-$\mathbb{C}$ permite a otro profesor, P8, resolver el problema correctamente, como muestra la figura 6. Identificamos en esta respuesta que el par (a, b) opera como un elemento que articula el tránsito de AA-$\mathbb{C}$ (ecuación $|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$) a GG-$\mathbb{C}$ (circunferencia en el plano complejo). Observamos, además, un trabajo en

Figura 6. *Respuesta de P8 con base en una articulación* AA-$\mathbb{C}$ $\leftrightarrow$ GG-$\mathbb{C}$

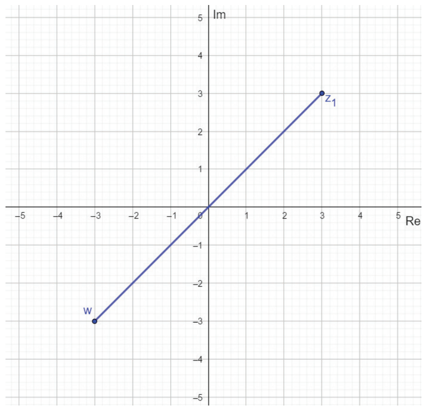
Sabiendo que en el plano complejo donde $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, es decir, la distancia del punto (a,b) al origen.

Por lo tanto, para que $|z|=5$ considerar todos los puntos (a,b) del 5 al origen, esto es, $a^2+b^2=25$. Circunferencia

el modo de pensar GG-$\mathbb{C}$ en relación con el concepto de módulo de un número complejo, que se concibe como la distancia de un punto *(a, b)* al origen del plano.

Una situación similar a la anterior se puede observar en las respuestas a otro problema que requiere determinar el número complejo z_2, tal que $w = z_1 \cdot z_2$, si se conocen w y z_1 en el plano complejo (figura 7).

FIGURA 7. *Problema del taller teórico-práctico de números complejos*



¿Qué estrategia utilizó para resolver la operación?

El profesor P5, por ejemplo, resolvió diciendo que $z_2 = -1 - i$, lo cual es incorrecto. Al preguntarle por la estrategia utilizada, respondió que lo hizo "algebraicamente", usando la definición de número complejo $a + bi$ y resolviendo la ecuación $w/z_1 = z_2$. De acuerdo con nuestro modelo de comprensión, interpretamos que P5 privilegió un modo de pensar AA-$\mathbb{C}$; sin embargo, hubo un error en sus cálculos algebraicos. La estrategia algebraica de multiplicar números complejos en su notación binomial fue aplicada por otros profesores que también llegaron a otros resultados incorrectos como $-18i$, $12 + 9i$ y $-6 - 6i$.

No obstante, observamos que algunos profesores sí lograron la solución del problema; por ejemplo, P2, quien respondió que era igual a (–1,0). A partir de la explicación de su estrategia, interpretamos desde el modelo que P2 realizó una articulación AA-$\mathbb{C}$ $\leftrightarrow$ GG-$\mathbb{C}$, trabajando principalmente en el modo GG-$\mathbb{C}$:

> Primero me fijé en los ángulos de z_1 y w para ver que la diferencia es de 180 grados. Luego vi que la distancia de ambos números es la misma al origen, por lo que el módulo de z_2 es de 1 y el punto (a, b) debe estar ubicado en un ángulo de 180 y en -1 en el eje x.

Interpretamos nuevamente que el elemento (*a, b*) actúa como un articulador que posibilita el tránsito desde AA-$\mathbb{C}$ (ecuación $w = z_1 \cdot z_2$) hacia GG-$\mathbb{C}$ (operación multiplicación como rotación en el plano complejo), así como de GG-$\mathbb{C}$ (ángulo de 180 grados y módulo 1) a AA-$\mathbb{C}$ ($z = (-\ 1{,}0)$).

Conclusiones en relación con el modelo de comprensión de $\mathbb{C}$

Con base en lo que hemos analizado, concluimos que los profesores que movilizan su pensamiento desde el modo de pensar AA-$\mathbb{C}$ hacia el modo de pensar GG-$\mathbb{C}$ (y viceversa) logran resolver con éxito los problemas. Para ello, transitan de un modo de pensar a otro a partir de la forma (*a, b*) de un número complejo, elemento de la matemática que validamos como *un articulador* en el modelo de comprensión de $\mathbb{C}$. A partir de las evidencias, concluimos que existe la necesidad de potenciar un trabajo en el modo GG-$\mathbb{C}$ en los profesores, quienes reflejan una priorización por el modo AA-$\mathbb{C}$, así como dificultades y errores en el modo de pensar GG-$\mathbb{C}$, obstaculizando el tránsito hacia los otros modos de pensamiento y, por lo tanto, la comprensión de este sistema numérico.

Caracterización de un modelo de comprensión para el concepto de grupo

De la misma manera que procedimos para construir los distintos modos de pensar, lo haremos para el caso del concepto de grupo, comenzando por el estudio del desarrollo histórico epistemológico de este fragmento de la matemática. Este estudio inicial tiene como finalidad indagar en las distintas maneras de entender este concepto que fueron apareciendo a lo largo de la historia. Estas maneras de ver y entender el concepto de grupo se caracterizaron por tres modos distintos de pensamiento cuya interacción, bajo la teoría, contribuye a la comprensión más profunda del concepto de grupo. Tal interacción se lleva a cabo gracias a los *articuladores* que permiten la interacción de dos o más modos de pensar. A continuación caracterizaremos los tres modos de pensar los grupos y aportaremos evidencia empírica sobre los modos que ponen en juego estudiantes de pedagogía en matemática durante su formación inicial.

Los modos de pensar la estructura algebraica de grupo

Varios matemáticos e historiadores de la matemática sostienen que Évariste Galois es uno de los principales fundadores del concepto de grupo. Sin embargo, se puede ver en los trabajos de otros matemáticos la identificación de propiedades directamente ligadas a esta estructura algebraica. Wussing (2007) plantea que el concepto de grupo tiene tres raíces históricas, la más conocida de las cuales es la raíz *algebraica* que asociamos con el trabajo de Galois y la resolución de ecuaciones de quinto grado. No obstante, existen otras dos raíces que permanecieron implícitas y que fueron visibilizadas hacia finales del siglo XIX. Estas dos raíces son la proveniente de la *teoría de números* y la proveniente de la *geometría*. Esto mismo es sostenido por Ortega Patiño (2011), quien declara que la estructura algebraica de grupo tuvo estas tres raíces históricas (las ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría), de cuya interacción surgió el reconocimiento de profundos fenómenos de isomorfismos que permitieron identificar la estructura algebraica de grupo.

A pesar de lo anterior, el análisis de algunos textos usados como bibliografía mínima de los cursos de estructuras algebraicas permite identificar un enfoque que prioriza lo aritmético y lo algebraico, dejando de lado la perspectiva geométrica o incluyéndola sólo como una aplicación del concepto de grupo. En este sentido, cabe preguntarse: ¿cómo los estudiantes de pedagogía en matemática están comprendiendo las diversas formas de ver y entender el concepto de grupo? Y, por otro lado, ¿es posible que la interacción de estos distintos modos de entender el concepto de grupo propicie una comprensión profunda en los estudiantes?

Modos de pensar los grupos

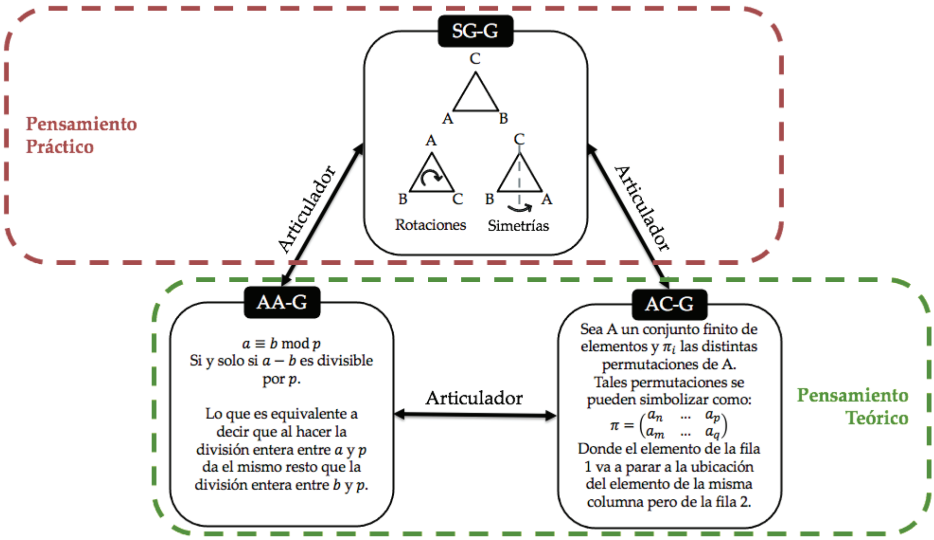
A partir del trabajo de Euler (1761) y de Gauss (1801) podemos caracterizar el modo analítico-aritmético de los grupos (pensamiento AA-G) como los restos de la división entera cuando se estudian situaciones aditivas o multiplicativas en $\mathbb{Z}$. Esto es lo que hoy conocemos como *aritmética modular*. Por otro lado, a partir de los trabajos de Ruffini (1799) y de Cauchy (1844) se pudo observar que la raíz del concepto de grupo desde las ecuaciones algebraicas llevaba implícita la idea de permutación. De hecho, durante varios años éste fue el sentido que se le dio al concepto de grupo: la composición de permutaciones de un conjunto dado. De este modo, la raíz desde las ecuaciones algebraicas confluyó en un modo analítico-combinatorio de los grupos (pensamiento AC-G), el cual podemos caracterizar como la composición de las permutaciones de un conjunto dado. Finalmente, a partir de las distintas geometrías que se desarrollaron principalmente durante el siglo XIX y de la posterior síntesis que propuso Klein (1872/2004) en su Programa Erlangen, podemos caracterizar el modo sintético-geométrico de los grupos (pensamiento SG-G) como la composición de los movimientos de las figuras en el plano que dejan *invariante* la figura original. Entendemos esta invariancia del modo que la figura resultante del movimiento sea congruente con la figura original. En el plano cartesiano estos movimientos se reducen a las isometrías; a saber, traslaciones, simetrías y rotaciones.

En el modo de pensar SG-G, los elementos que se deben manipular son las figuras en el plano cartesiano y las operaciones sobre estos elementos son los movimientos invariantes; en nuestro caso, las isometrías. Por otro lado, en el modo de pensar AA-G, el pensamiento se dirige a los números enteros y a los restos de la división entera. En particular, se estudian las congruencias en módulo entre los números enteros. Por último, en el modo de pensar AC-G el pensamiento se enfoca en las permutaciones que se pueden generar y, a su vez, componer en un conjunto finito de elementos. De esta manera, para lograr una comprensión profunda del concepto de grupo los estudiantes deberán transitar por los tres modos de pensar los grupos. Este tránsito será facilitado por los *articuladores* que se puedan identificar en las respuestas de los estudiantes. La figura 8 resume los tres modos de pensar los grupos.

Modos de pensar priorizados y elementos articuladores

Para buscar la caracterización de los modos de pensar los grupos y los posibles articuladores entre ellos se aplicó un cuestionario de ocho situaciones

FIGURA 8. *Modos de pensar los grupos*



a un grupo de estudiantes de pedagogía en matemática que no han cursado una asignatura sobre estructuras algebraicas. En particular nos enfocaremos en las situaciones que permitieron articular los modos AC-G y AA-G.

La situación 5 tenía como propósito estudiar los restos de la división entera cuando el divisor es 3. Específicamente, se analiza la siguiente operación: Sean $x, y \in \mathrm{Z}$ entonces $x \oplus y$ = resto de la división entera de $(x + y) \div 3$.

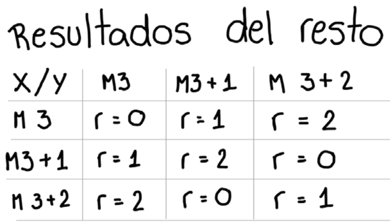
La situación 6 tenía como propósito estudiar las permutaciones (u ordenamientos) que se pueden hacer en un conjunto de tres elementos diferentes.

Uno de los estudiantes participantes en el estudio construyó los cuadros de doble entrada para cada una de esas situaciones (véase tabla 2).

Aparentemente ambas situaciones no están relacionadas. Sin embargo, un adecuado orden y coloración de una de estas tablas permite articular ambos modos de pensar (véase tabla 3).

Como se puede apreciar en la tabla 3, el adecuado orden y coloración del cuadro de la situación 6 permite relacionar el subcuadro conformado por las permutaciones A_0, A_1 y A_2 (coloreadas en amarillo) con el cuadro de la situación 5. De este modo, los cuadros y su eficiente gestión permiten articular los modos AA-G y AC-G. Cabe mencionar que, desde el punto de

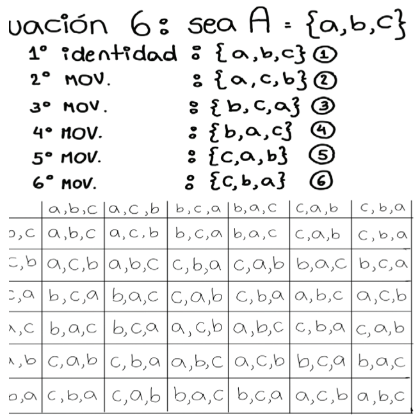
TABLA 2. *Respuestas de un estudiante en las situaciones 5 y 6*



Resultados del resto

X/Y	M3	M3+1	M 3+2
M 3	r = 0	r = 1	r = 2
M3+1	r = 1	r = 2	r = 0
M 3+2	r = 2	r = 0	r = 1

Cuadro de la situación 5



uación 6: sea A = {a,b,c}

1° identidad : {a,b,c} ①
2° MOV. : {a,c,b} ②
3° MOV. : {b,c,a} ③
4° MOV. : {b,a,c} ④
5° MOV. : {c,a,b} ⑤
6° MOV. : {c,b,a} ⑥

	a,b,c	a,c,b	b,c,a	b,a,c	c,a,b	c,b,a
,c	a,b,c	a,c,b	b,c,a	b,a,c	c,a,b	c,b,a
,b	a,c,b	a,b,c	c,b,a	c,a,b	b,a,c	b,c,a
,a	b,c,a	b,a,c	c,a,b	c,b,a	a,b,c	a,c,b
,c	b,a,c	b,c,a	a,c,b	a,b,c	c,b,a	c,a,b
,b	c,a,b	c,b,a	a,b,c	a,c,b	b,c,a	b,a,c
,a	c,b,a	c,a,b	b,a,c	b,c,a	a,c,b	a,b,c

Cuadro de la situación 6

TABLA 3. *Cuadros coloreados de las situaciones 5 y 6*

Situación 5
El resto de la suma al dividirla por 3

$x \oplus y = Resto\ de\ (x+y) \div 3$

	$3m$	$3m+1$	$3m+2$
$3n$	0	1	2
$3n+1$	1	2	0
$3n+2$	2	0	1

Situación 6
Permutaciones del conjunto de 3 elementos

$A_0 = \{a,b,c\}$
$A_1 = \{c,a,b\}$
$A_2 = \{b,c,a\}$
$A_3 = \{a,c,b\}$
$A_4 = \{c,b,a\}$
$A_5 = \{b,a,c\}$

$A = \{a,b,c\}$

$\circ$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_0	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	A_1	A_2	A_0	A_4	A_5	A_3
A_2	A_2	A_0	A_1	A_5	A_3	A_4
A_3	A_3	A_4	A_5	A_2	A_1	A_0
A_4	A_4	A_5	A_3	A_0	A_2	A_1
A_5	A_5	A_3	A_4	A_1	A_0	A_2

vista SG-G, las permutaciones A_0, A_1 y A_2 se pueden interpretar como las rotaciones a un triángulo equilátero de vértices *a, b, c*.

Conclusiones respecto del modelo de comprensión para los grupos

Algunas conclusiones locales a partir de los datos recolectados por el instrumento es que los estudiantes que construyeron correctamente los cuadros de doble entrada de cada situación presentada lograron identificar las similitudes entre dos o más situaciones diferentes (geométrica, aritmética o combinatoria). Estas similitudes no sólo apuntaban a una identificación entre los elementos de una y otra situación, sino que justificaban esta similitud basándose en propiedades de los elementos en cada una de las situaciones; por ejemplo, la regularidad al componer un mismo elemento consigo mismo sucesivamente. Esto nos permite evidenciar el reconocimiento de parte de los estudiantes de una estructura implícita común en dos o más situaciones diferentes, estadio previo, desde la perspectiva histórica, de la formalización del concepto de grupo.

Conclusión

En más de una década de trabajo, las investigaciones desarrolladas en didáctica de la matemática con base en esta variedad teórica de los modos de pensamiento contienen un análisis epistemológico y matemático de los tópicos estudiados, a través del cual se identificaron diferentes enfoques (analíticos y sintéticos) que permitieron interpretar y sustentar los modos de pensar un fragmento de la matemática *F*, cuyo centro es interpretar la comprensión profunda de *F*, de acuerdo con la operacionalización que se presenta en la tabla 4.

TABLA 4. *Operacionalización de los modos de pensar un fragmento matemático F*

Elementos	***Finalidad***
Problemática que atiende	Abordar obstáculo(s) epistemológico(s) de *F*
Fenómeno didáctico	Alcanzar la comprensión profunda de *F*
Problema didáctico	Determinar los articuladores entre los modos de pensar *F*
Pregunta de investigación	Sobre los modos de pensar *F* y sus articuladores
Evidencia empírica	Diseño de instrumentos e implementación
Resultado	Reinterpretación del fenómeno didáctico

Agradecimientos

Este capítulo ha sido financiado parcialmente por ANID a través del Proyecto Fondecyt Nº 1180468.

Referencias

Ajdukiewicz, K. (1974). *Pragmatic Logic*. Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

Artigue, M., & Deledicq, A. (1992). *Quatre étapes dans I'histoire des nombres complexes: quelques commentaires épistémologiques et didactiques*. París: Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Université de Paris.

Astorga, M., & Parraguez, M. (2014). Comprensión de las cónicas a través de los modos de pensamiento. Avance de investigación. *Revista Chilena de Educación Científica, 13*(2), 19-24.

Astorga, M., & Parraguez, M. (2019). Las cónicas en métricas no euclidianas: una mirada desde la teoría de los modos de pensamiento. *Revista Transformación, 15*(1), 39-51.

Bonilla, D., & Parraguez, M. (2012). La elipse desde la perspectiva de la teoría de los modos de pensamiento. *Revista Chilena de Educación Matemática, 6*(1), 101-111.

Bonilla, D., & Parraguez, M. (2015). Los números racionales: Una mirada desde la teoría. Los modos de pensamiento en la formación inicial de profesores. *Revista Chilena de Educación Matemática, 9*(1), 77-83.

Bonilla, D., Parraguez, M., & Solanilla, L. (2013). Las cónicas: Una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento. *Revista Chilena de Educación Matemática, 7*(1), 89-96.

Bonilla, D., Parraguez, M., & Solanilla, L. (2014). Al fin de cuentas, ¿qué es una recta en la geometría del taxista? *Revista Tumbaga, 2*(10), 53-68.

Campos, S., & Parraguez, M. (2019). Comprensión de sistemas de ecuaciones lineales: Un estudio de caso en el contexto escolar en Chile. *Revista Educação Matemática Pesquisa, 21*(3), 347-368.

Cauchy, A. L. (1844). Mémoire sur les arrangements que l'on peut former avec des lettres données, et sur les permutations ou substitutionsa l'aide desquelles on passe d'un arrangementa un autre. *Exercises d'Analyse et de Mathématiques Physiques,* 3, 151-242.

Euler, L. (1761). Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta. *Novi Commentarii acade miae scientiarum Petropolitanae*, 49-82.

Gauss, C. F. (1801). *Disquisitiones arithmeticae*. Leipzig: Apud G. Fleischer.

Guerra, R., & Parraguez, M. (2015). Comprensión del producto vectorial desde los modos de pensamiento a partir de un análisis histórico-epistemológico. *Revista Chilena de Educación Matemática, 9*(1), 51-56.

Klein, F. (2004). *Consideraciones comparativas sobre las investigaciones geométricas modernas* (Trad. de J . Bauzá & M. J. Muñoz; obra original publicada en 1872). http://88.27.249.81/psico/sesion/ficheros_publico/ficheros.php?opcion=textos

Maturana, I., & Parraguez, M. (2012). Los modos de pensamiento en que el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real es comprendido por estudiantes universitarios. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 227-234. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ortega Patiño, V. E. (2011). *Formación de la noción abstracta de estructura algebraica: a partir del estudio histórico-epistemológico de los aportes de Cantor y Dedekind* (Tesis doctoral). Universidad del Valle-Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia.

Parraguez, M. (2018). Comprensión del concepto subespacio vectorial en R3 desde los modos de pensamiento. *Revista Visiones Científicas de la Universidad de Playa Ancha de Ciencias de la Educación, 13*(1), 27-42.

Parraguez, M., Bonilla, D., & Solanilla, L. (2019). Aprendizaje de las cónicas en la geometría del taxista mediante una secuencia didáctica basada en los modos de pensamiento de Sierpinska. En R. Olfos, E. Ramos & D. Zakaryan (Eds.), *Aportes a la práctica docente desde la didáctica de la matemática: Formación docente* (pp. 165-202). Barcelona, España: Graó.

Parraguez, M., & Bozt, J. (2012). Conexiones entre los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde los modos de pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación en Ciencias, 7*(1), 49-72.

Parraguez, M., & Guerra, R. (2020). Comprensión del producto vectorial desde los modos de pensamiento: el caso de profesores en formación inicial. En Y. Morales-López & A. Ruíz (Eds.), *Educación matemática en las Américas 2019*. República Dominicana: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Parraguez, M., & Vera-Soria, G. (2020). Los modos de pensamiento sintético y analítico en la comprensión del concepto de base en el espacio vectorial R2: Un estudio de casos en un contexto universitario. *Revista Paradigma, 41,* 600-635.

Pinto, I., & Parraguez, M. (2013). Una comprensión de la derivada desde los modos de pensamiento. *Revista de Educación Matemática, 7*(1), 118-123.

Pinto-Rojas, I., & Parraguez, M. (2017). Articulators for Thinking Modes of the Derivative from a Local Perspective. *IEJME: Mathematics Education, 12*(10), 873-898.

Randolph, V., & Parraguez, M. (2013). Comprensión de los números complejos desde los modos de pensamiento en base a un estudio histórico epistemológico. *Revista Chilena de Educación Matemática, 7*(1), 275-282.

Randolph, V., & Parraguez, M. (2019). Comprensión del sistema de los números complejos: un estudio de caso a nivel escolar y universitario. *Revista Formación Universitaria, 12*(6), 57-82.

Ruffini, P. (1799). *Teoria generale delle equazioni: In cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grad superiore al quarto.* Boloña: Nella Stamperia di S. Tomasso D'Aquino.

Shulman, L. S. (1999). Foreword. En J. Gess-Newsome & N. G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge: The Construct and Its Implications for Science Teaching* (pp. IX-XII). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Londres: The Falmer Press.

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic.

Sierpinska, A. (2005). On Practical and Theoretical Thinking and Other False Dichotomies in Mathematics Education. En M. H. G. Hoffmann,

J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 117-135). Nueva York: Springer Science & Business Media.

Sierpinska, A., Nnadozie, A., & Oktaç, A. (2002). *A Study of Relationships between Theoretical Thinking and High Achievement in Linear Algebra* (Reporte de investigación). Montreal, Canadá: Concordia University.

Stake, R. E. (2010). *Investigación con estudio de casos* (5ª ed.). Barcelona: Labor.

Valenzuela, C., & Parraguez, M. (2014). La homotecia en el plano, mirada desde la teoría los modos de pensamiento. *Revista Chilena de Educación Científica, 13*(1), 21-26.

Wussing, H. (2007). *The Genesis of the Abstract Group Concept: A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory*. Nueva York: Dover.

Capítulo 7. Un estudio comparativo del entendimiento de estudiantes universitarios sobre el concepto vector en una y dos dimensiones

Viana Nallely García Salmerón
Flor Monserrat Rodríguez Vásquez
https://orcid.org/0000-0002-9596-4253
Universidad Autónoma de Guerrero (México)

Resumen

El *vector* es un objeto matemático sobre el cual los estudiantes de nivel superior tienen dificultades cuando se enfrentan a situaciones que lo involucran, lo que se refleja en un endeble entendimiento. Este artículo ofrece un análisis comparativo sobre el entendimiento de estudiantes universitarios acerca del concepto vector, considerando el entendimiento en el sentido de Trowbridge y McDermott. Para la recolección de datos se aplicó un instrumento denominado *prueba de entendimiento de vectores* (TUV por su acrónimo en inglés) a 111 estudiantes universitarios de ingeniería y matemáticas de 18 a 22 años de edad. Para el análisis de los datos se usó estadística básica. Los resultados reflejan los indicadores en los cuales los estudiantes tienen altos, medios y bajos niveles de entendimiento. En conclusión, el estudio comparativo proporciona información sobre los indicadores del entendimiento que hay que enriquecer para soslayar las dificultades sobre el concepto vector.

Palabras clave: concepto vector, entendimiento, comparación.

Introducción

El concepto vector es un tema común en el currículo mexicano de las carreras de ingeniería, matemáticas, física y ciencias, entre otras, y se presenta a través de sus representaciones gráfica y algebraica y de su operatividad, por lo cual es importante que los estudiantes logren un entendimiento óptimo sobre este concepto, ya que en estas carreras la mayoría de las magnitudes con las que se trabaja son vectoriales (Martínez & Benoit, 2008). Sin embargo, hay estudiantes que ingresan al nivel universitario con escasos conocimientos básicos sobre vectores (Barniol & Zavala, 2014b; Sussac *et al.,* 2018). Asimismo, se han reportado dificultades de los estudiantes cuando resuelven problemas relacionados con el concepto vector; entre ellas, confusión entre escalar y vector, para sumar y restar vectores, para determinar la magnitud y la dirección de un vector, para representar gráficamente un vector (Barrera *et al.,* 2015; Bogatinoska *et al.,* 2013; Flores-García *et al.,* 2008; Flores-García *et al.,* 2007; Heckler & Scaife, 2015; Knight, 1995; Mora, 2011; Nguyen & Meltzer, 2003), atribuyéndose estas dificultades al entendimiento sobre el concepto (Flores-García *et al.,* 2008; Knight, 1995; Nguyen & Meltzer, 2003). No obstante, que los estudiantes entiendan el concepto vector les ayudará a aprender conceptos nuevos en diversas áreas del conocimiento (Arredondo *et al.,* 2020; Barniol & Zavala, 2014b; Leithold, 1998; Sussac *et al.,* 2018; Watson *et al.,* 2003); por ejemplo, en ingeniería, conocer conceptos físicos como electricidad, magnetismo, momento, etc., y en matemáticas, calcular áreas y volúmenes y representar planos y superficies de forma vectorial, espacios vectoriales, entre otros.

Ahora bien, una de las herramientas para recolectar datos sobre el entendimiento de los estudiantes son los tests de opción múltiple, los cuales tienen la ventaja de que pueden ser aplicados a poblaciones grandes de estudiantes y los datos pueden ser analizados mediante métodos estadísticos (Dominguez *et al.,* 2019). La implementación de pruebas de opción múltiple permite analizar el dominio de un estudiante sobre un tema, concepto o contenido, en comparación con el dominio de otros estudiantes (Kantrov, 2000). Asimismo, permite comparar el desempeño de estudiantes de diferentes contextos (Escudero, 2018). De acuerdo con Sadler (2005) los resultados de una comparación pueden tomarse como punto de partida para evaluar cambios conceptuales, diseñar estrategias de enseñanza e incluso aportar ideas para el rediseño de planes de estudio.

Con base en lo anterior, el objetivo de este estudio es comparar el entendimiento de estudiantes universitarios sobre el concepto vector. Para lograrlo, se aplicó una prueba de opción múltiple y se analizaron los datos en términos de porcentajes de respuestas correctas.

Marco conceptual

Entendimiento conceptual

Existen diferentes caracterizaciones acerca de cómo lograr el entendimiento de un objeto matemático; por ejemplo, Haji y Yumiati (2019) consideran que un individuo logra entender un concepto si puede definirlo de manera verbal y por escrito, formular ejemplos y contraejemplos, usar varias formas de representación, identificar las características del concepto y compararlo con otros conceptos. Por su parte, Al-Mutawah *et al.* (2019) sostienen que un individuo entiende un concepto cuando puede demostrar que es capaz de identificarlo y generar ejemplos sobre él; además, puede usar, reconocer y relacionar diferentes representaciones del concepto, así como reconocer y aplicar sus signos o su simbología, entre otras acciones.

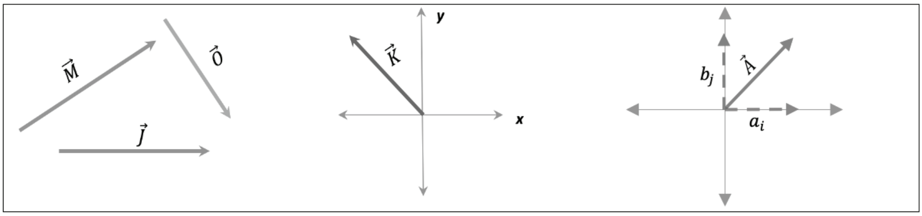
Particularmente, en este estudio consideramos, al igual que Trowbridge y McDermott (1980), que se logra el entendimiento de un concepto si se demuestra capacidad sobre los siguientes indicadores: *(i)* definir un concepto de forma operacional, *(ii)* distinguir un concepto de otros conceptos relacionados y *(iii)* aplicar un concepto de manera correcta.

Concepto vector

El concepto vector tiene diferentes acepciones. Desde el punto de vista de la mecánica, un vector está definido por tres características: magnitud, dirección y sentido (Tippens, 1996). De acuerdo con Hibbeler (2004), un vector es representado gráficamente por una flecha y se denota usando cualquier letra mayúscula con esa flecha sobre ella, por ejemplo , y analíticamente cualquier vector se puede expresar en términos de *i* y *j* (notación de vectores unitarios, de acuerdo con su dimensión) (véase figura 1).

Para entender el concepto vector es necesario considerar, al menos, las siguientes propiedades básicas: dirección, magnitud, representación gráfica,

FIGURA 1. *Representación de un vector gráfica y analíticamente*



componentes, vector unitario, suma, resta, multiplicación por escalar, producto punto y producto cruz.

Materiales y métodos

La investigación adoptó el método comparativo, ya que se realizó el contraste de resultados sobre el entendimiento de estudiantes universitarios acerca del concepto vector en tres momentos: *(1)* resultados generales, *(2)* comparación de los resultados generales con los de otras investigaciones que han implementado el TUV y *(3)* comparación de los resultados del entendimiento de los estudiantes que participaron por carrera.

Muestra

Participaron 111 estudiantes mexicanos de nivel universitario (de 18 a 22 años de edad) matriculados en dos universidades, una pública y otra privada, las cuales denominaremos U1 y U2, respectivamente (véase tabla 1).

TABLA 1. *Estudiantes examinados según la carrera y universidad*

Universidad	*Carrera*	*Estudiantes*
	Matemáticas	23
Universidad 1 (U1)	Ingeniería civil	23
	Ingeniería en construcción	29
Universidad 2 (U2)	Ingeniería civil	36
Total		111

La selección de los estudiantes se realizó de acuerdo los siguientes criterios: *(i)* que ya hubieran visto operaciones básicas de vectores, o *(ii)* que hubieran cursado asignaturas en las que se trabajó con el concepto vector, como física general, mecánica, dinámica, cálculo vectorial, álgebra lineal, geometría analítica, etc. Además, se tuvo en cuenta que, desde que ingresan a las carreras antes mencionadas, los estudiantes tienen conocimientos elementales sobre el concepto vector, adquiridos durante su formación tanto en nivel básico secundaria como en el nivel medio superior, de acuerdo con los currículos mexicanos.

Instrumento

Para recolectar los datos se aplicó la *prueba de entendimiento de vectores* (TUV), debido a su confiabilidad y alto poder discriminatorio, aspectos que fueron validados por sus creadores Barniol y Zavala (2014a) mediante las pruebas estadísticas índice de dificultad, índice de discriminación, coeficiente de punto biserial, Kuder Richarson y delta de Ferguson. Asimismo, es importante mencionar que el TUV considera en los ítems los tres indicadores para el logro de entendimiento, de acuerdo con Trowbridge y McDermott (1980).

El TUV consta de 20 ítems de opción múltiple y cada ítem cuenta con cinco opciones de respuesta, donde únicamente una opción es la correcta y las otras cuatro son distractores. Los distractores se fundamentan de acuerdo con los errores más comunes que cometen los estudiantes cuando trabajan con el concepto vector y los cuales fueron identificados mediante la implementación de problemas abiertos a 2 067 estudiantes de una universidad privada mexicana. Asimismo, en los ítems se involucra alguna de las siguientes 10 propiedades de vector, en una o dos dimensiones: dirección, magnitud, representación gráfica, componentes, vector unitario, suma, resta, multiplicación por escalar, producto punto y producto cruz (véase tabla 2).

Recolección y análisis de datos

Los datos fueron recolectados durante el primer bimestre de 2020. La aplicación del TUV se llevó a cabo en un tiempo de 25 minutos en el aula

TABLA 2. *Ejemplos de descripción de ítems de acuerdo con la propiedad que involucra*

Propiedad	***Número de ítem***	***Descripción***
Dirección	5	Elección de vectores con la misma dirección en una gráfica.
	17	Cálculo de la dirección de un vector escrito en notación de vectores unitarios.
Magnitud	20	Cálculo de la magnitud de un vector escrito en notación de vectores unitarios.
Componente	4	Representación gráfica de la componente *y* de un vector.
Vector unitario	2	Representación gráfica de un vector unitario.

FUENTE: Adaptado de Barniol y Zavala (2014a).

respectiva de los estudiantes, quienes no tuvieron aviso previo de la aplicación. En una entrevista con los profesores encargados nos aseguramos que los estudiantes ya hubieran trabajado con el concepto vector.

Para identificar a cada estudiante, se les asignó un número consecutivo del 1 al 111 sin omitir la carrera ni la universidad a la que pertenecían. Los tests se calificaron manualmente y después se elaboró una matriz de respuestas en Excel, donde las filas representan a los estudiantes y las columnas representan a los ítems. En cada intersección fila-columna se registraron los puntajes de las respuestas de los estudiantes en cada ítem, asignando el valor de 1 si respondieron correctamente y de 0 si respondieron incorrectamente (véase tabla 3).

TABLA 3. *Ejemplo de la matriz de respuestas*

Estudiante	***Ítem***									
	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
3	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
4	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
5	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0

A partir de la matriz de respuestas se analizó, en términos de porcentajes de las que fueron correctas, el entendimiento de los estudiantes, de acuerdo con los indicadores de entendimiento de Trowbridge y McDermott (1980). Para ello se sumaron los puntajes en cada columna para determinar cuántos estudiantes respondieron correctamente a cada ítem. Con esta información se calcularon los porcentajes de respuestas correctas en cada ítem usando la expresión:

$$P^*_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{y_{ij}}{N} \times 100 , \quad j = 1, \ldots, N, i = 1, \ldots, 20$$

Donde P^*_i es el porcentaje de respuestas correctas en cada ítem i, N es el número de estudiantes, y_{ij} es la respuesta correcta o incorrecta del estudiante j en el ítem i. Primero se calcularon los porcentajes de respuestas correctas de todos los estudiantes y después para cada carrera.

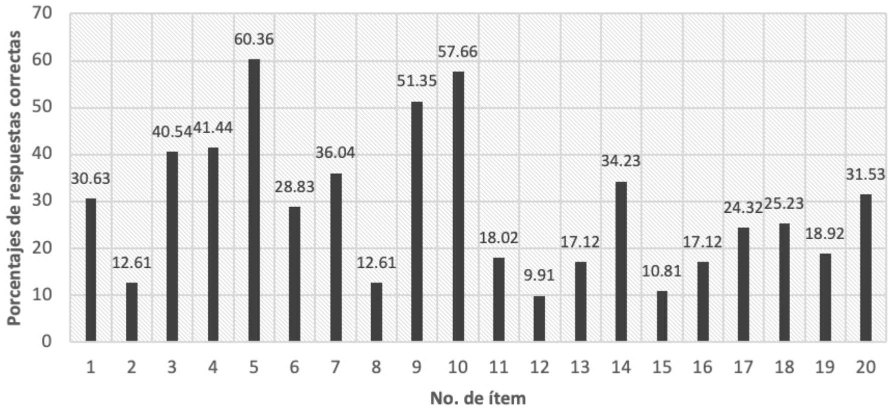
Resultados

En esta sección se mostrará la comparación del entendimiento de los estudiantes sobre el concepto vector, en los tres momentos dichos: *(1)* resultados generales, *(2)* comparación de los resultados generales con los de otras investigaciones que han implementado el TUV y *(3)* comparación de los resultados del entendimiento de los estudiantes que participaron por carrera.

Resultados generales

En la gráfica 1 se puede observar que en 17 ítems los estudiantes obtuvieron porcentajes de respuestas correctas inferiores a 50%, y sólo en los ítems 5, 9 y 10 obtuvieron porcentajes de respuestas correctas mayores a 50%. Debido a la constitución del TUV, esto es un indicador de que los estudiantes tienen un endeble entendimiento sobre el concepto vector en 17 de 20 ítems.

GRÁFICA 1. *Porcentajes de respuestas correctas en cada ítem del TUV*



Comparación de los resultados con los de otras investigaciones

Si se toma como referencia la clasificación de los ítems por nivel de dificultad de acuerdo con el porcentaje de aciertos en cada ítem, propuesta por Barniol y Zavala (2014a), y se realiza una clasificación de forma similar, según los porcentajes de respuestas correctas obtenidos en esta investigación, se observa que 17 ítems resultaron de dificultad alta, tres ítems de dificultad media y ningún ítem de dificultad baja (véase tabla 4).

TABLA 4. *Agrupación de los ítems por nivel de dificultad*

Porcentaje de respuestas correctas	***Nivel de dificultad***	***Ítems***	
		Barniol y Zavala (2014a)	***Resultados de esta investigación***
Menor o igual a 50%	Alto	2, 3, 8, 12, 13 y 17	1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20
Entre 50 y 75%	Medio	1, 11, 14, 15, 16, 18 y 19	5, 9 y 10
Mas de 75%	Bajo	4, 5, 6, 7, 9, 10 y 20	Ninguno

Para ejemplificar, se considera a los ítems 12 y 2 que fueron los que obtuvieron los menores porcentajes y al ítem 5 que obtuvo el mayor porcentaje de respuestas correctas, como se puede ver en la gráfica 1. En este estudio, el ítem 12 obtuvo el menor porcentaje de respuestas correctas (9.91%). Es un ítem que involucra la interpretación gráfica del producto cruz como un vector perpendicular según la regla de la mano derecha (véase figura 2); sin embargo, en los resultados de Barniol y Zavala (2014a) este ítem obtuvo 42% de respuestas correctas, en Barniol y Zavala (2014c) el 57% y en Rakkapao (2016) el 17%. Finalmente, en Sussac *et al.* (2018) este ítem fue clasificado como el segundo más difícil de todo el TUV.

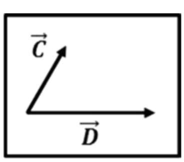
Estos resultados permiten fundamentar que el ítem 12 es el más difícil entre aquellos que involucran el producto cruz (12, 15 y 18) e incluso es uno de los más difíciles de todo el TUV.

En el ítem 2, en el cual se pide relacionar un vector unitario con su representación gráfica (véase figura 3), los estudiantes obtuvieron 12.61% de respuestas correctas. En Barniol y Zavala (2014a) se reporta que 39% de estudiantes respondió correctamente; en Barniol y Zavala (2014c) el 43%, y en Rakkapao *et al.* (2016) el 12%. Estas investigaciones coinciden en que este ítem es el más difícil de responder del TUV.

En el ítem 5 se obtuvo 60.36% de respuestas correctas. Este ítem involucra el concepto de dirección. Barniol y Zavala (2014a) y Barniol y Zavala (2014c) reportaron 84 y 86% de respuestas correctas, respectivamente. Estas investigaciones, junto con la de Sussac *et al.* (2018), identificaron a este

FIGURA 2. *Ítem 12 del TUV*

12. Abajo se muestran los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$. ¿Cuál de las siguientes opciones es la interpretación más adecuada del producto cruz ($\vec{C} \times \vec{D}$)?



(A) Un vector apuntando hacia la derecha y arriba, entre la dirección del vector $\vec{C}$ y la dirección del vector $\vec{D}$.

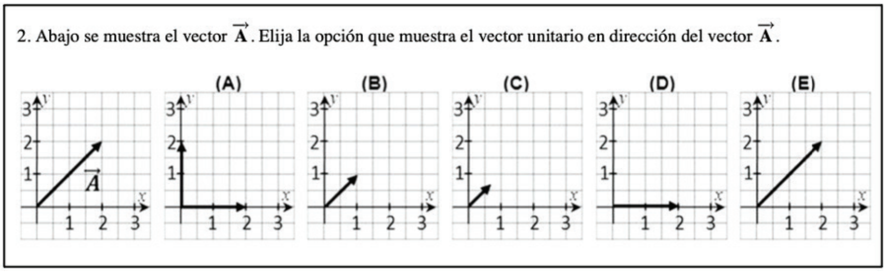
(B) Un vector perpendicular a los dos vectores y con una dirección que "sale" de la hoja.

(C) La magnitud de un vector apuntando hacia la derecha y arriba, entre la dirección del vector $\vec{C}$ y la dirección del vector $\vec{D}$.

(D) Una cantidad con una dirección a favor del movimiento de las manecillas del reloj.

(E) Un vector perpendicular a los dos vectores y con una dirección que "entra" a la hoja.

FIGURA 3. *Ítem 2 del* TUV

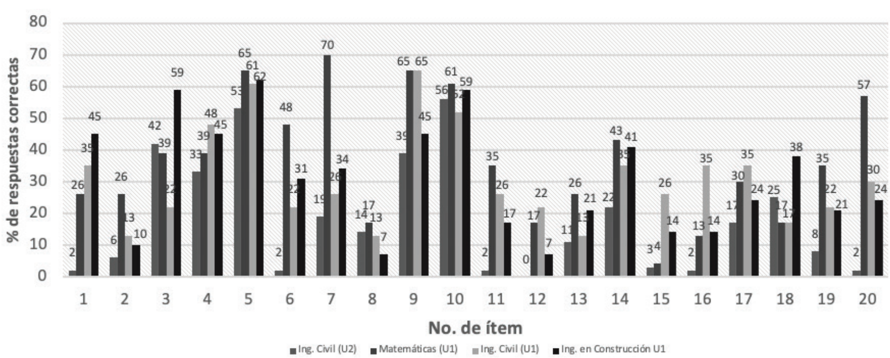


ítem como uno de los más fáciles de resolver en el TUV. Rakkapao *et al.* (2016) señalaron que este ítem es adecuado para estudiantes que tienen dificultades al trabajar con el concepto vector, ya que tienen 40% de probabilidades de responder correctamente, o bien, de adivinar la respuesta correcta.

Comparación de los resultados entre estudiantes de diferentes carreras

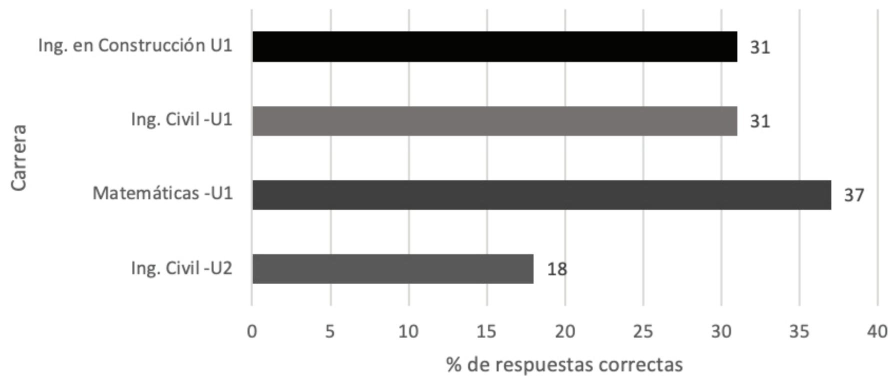
En la gráfica 2 se puede notar que los estudiantes de ingeniería civil-U2 obtuvieron los porcentajes más bajos de respuestas en 16 de 20 ítems. Incluso en los ítems 1, 6, 11, 16 y 20 sólo 2% de las respuestas fueron correctas, y en el ítem 12 no hubo respuestas correctas. En contraste, los estudiantes de matemáticas-U1 tuvieron el mayor porcentaje de respuestas correctas en 10 ítems.

GRÁFICA 2. *Porcentajes de respuestas correctas por carrera en cada ítem*



En la gráfica 3 se aprecia que los estudiantes de ingeniería civil-U2 y matemáticas-U1 fueron quienes obtuvieron de manera general el porcentaje de respuestas correctas más bajo y más alto, respectivamente. Mientras que los estudiantes de ingeniería en construcción-U1 e ingeniería civil-U1, presentaron 31% de respuestas correctas. Sin embargo, los resultados en las cuatro carreras muestran porcentajes de respuestas correctas por debajo de 50 por ciento.

GRÁFICA 3. *Porcentajes generales de respuestas correctas por carrera*



Específicamente, entre los estudiantes de ingeniería civil-U1 e ingeniería civil-U2, que tienen el mismo perfil de ingreso y egreso de los estudiantes, aunque son carreras que se imparten en instituciones diferentes, se puede observar, en la gráfica 4, que el porcentaje de respuestas correctas es mayor en los estudiantes de ingeniería civil-U1 en 17 ítems, excepto en los ítems 3, 10 y 18.

No obstante, si los ítems se clasifican por nivel de dificultad, como en Barniol y Zavala (2014a), para ambas carreras la mayoría de los ítems fueron de dificultad alta, y también se observa que en ambas carreras los ítems 5 y 10 fueron de dificultad media y ningún ítem resultó de dificultad baja (véase tabla 5).

GRÁFICA 4. *Porcentajes de respuestas correctas de los estudiantes de ingeniería civil*

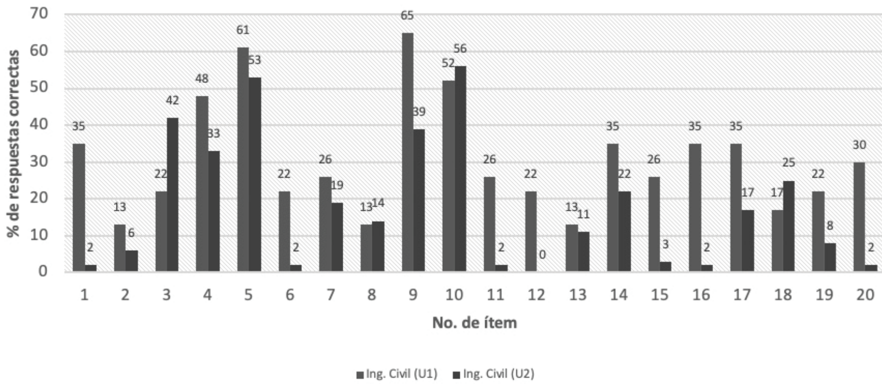


TABLA 5. *Clasificación de los ítems por nivel de dificultad*

Escala	*Nivel de dificultad*	*Ingeniería civil-U1*	*Ingeniería civil-U2*
		Ítems	
Menor o igual a 50%	Alto	1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20	1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20
Entre 50 y 75%	Medio	5, 9 y 10	5 y 10
Mayor a 75%	Bajo	—	—

Discusión y conclusiones

Esta investigación tuvo como objetivo comparar el entendimiento de estudiantes universitarios sobre el concepto vector, de acuerdo con los indicadores de entendimiento: *(i)* definir un concepto de forma operacional, *(ii)* distinguir un concepto de otros conceptos relacionados y *(iii)* aplicar un concepto de manera correcta (Trowbridge & McDermott, 1980). Entonces, se ha considerado que si un estudiante responde correctamente un ítem del test, pone en juego los tres indicadores mencionados.

En este sentido, considerando los resultados de la sección anterior, las acciones correspondientes a los indicadores de entendimiento para responder el ítem 12 se describen en la tabla 6.

Tabla 6. *Descripción de los indicadores de entendimiento en el ítem 12*

Indicadores de entendimiento	***Acciones requeridas***
1. Definir operacionalmente un concepto.	Operar geométricamente para obtener el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Esto es: *Área del paralelogramo* = $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\| \sin\theta$
2. Distinguir un concepto de otros conceptos relacionados.	Reconocer las características del producto cruz, así como la naturaleza vectorial de su resultado.
3. Aplicar un concepto de manera correcta.	Reconocer y aplica correctamente las características de un vector y determina correctamente la dirección del producto cruz.

Como se dijo, el ítem obtuvo 9.91% de respuestas correctas, lo que puede deberse a que, además de que el estudiante requiere conocimientos geométricos con vectores para calcular el producto cruz, necesita dominar reglas para determinar correctamente su dirección; por ejemplo, aplicar correctamente la regla de la mano derecha para determinarla. En este sentido, Barniol y Zavala (2014a), Barniol y Zavala (2014c) y Sussac *et al.* (2018) coinciden en que una posible causa de responder incorrectamente el ítem 12 es la aplicación incorrecta de la regla de la mano derecha. Se sugiere que durante la enseñanza se haga énfasis en la representación geométrica del producto cruz, sobre todo en el uso de mnemotecnias para favorecer el entendimiento de los estudiantes (Kustusch, 2016).

Por otra parte, el ítem 2 fue reportado en este estudio como el segundo ítem con porcentaje de respuestas correctas más bajo. Las acciones que corresponden a los indicadores de entendimiento para responderlo se describen en la tabla 7.

El error más común reportado por Barniol y Zavala (2014a) consistió en seleccionar como respuesta un vector con componentes *x* y *y* de una unidad. Rakkapao *et al.* (2016) asocian este error con la falta de conocimiento de matemáticas básicas para determinar la magnitud del vector dado. En este caso, para mejorar el entendimiento del concepto vector se

TABLA 7. *Descripción de los indicadores de entendimiento en el ítem 2*

Indicadores de entendimiento	***Acciones requeridas***
1. Definir operacionalmente un concepto.	Realizar correctamente el procedimiento de normalización para encontrar el vector unitario $\vec{U}$ con la misma dirección y sentido que el vector $\vec{A}$.
2. Distinguir un concepto de otros conceptos relacionados.	Distinguir la característica esencial del vector unitario, como aquel de magnitud 1.
3. Aplicar un concepto de manera correcta.	Aplicar las características del vector unitario para determinar la dirección de otros vectores no unitarios.

recomienda hacer hincapié en los indicadores de entendimiento 1 y 2 durante la enseñanza.

Por último, el ítem 5, al igual que en las investigaciones mencionadas, está dentro de los más fáciles de resolver, con 60.36% de respuestas correctas. Las acciones que corresponden a los indicadores de entendimiento para responderlo se describen en el cuadro 8.

TABLA 8. *Descripción de los indicadores de entendimiento en el ítem 5*

Indicadores de entendimiento	***Acciones requeridas***
1. Definir operacionalmente un concepto.	Calcula la dirección del vector como la tangente de 45.
2. Distinguir un concepto de otros conceptos relacionados.	Distingue la característica dirección de un vector, del sentido del mismo.
3. Aplicar un concepto de manera correcta.	Aplica correctamente la dirección de un vector, como el ángulo medido en sentido antihorario desde el eje *x* positivo.

Una de las causas de los errores de los estudiantes en este ítem es que eligen el vector que tiene componentes x y y positivas, o bien, el vector que apunta en el mismo sentido al vector dado (Barniol & Zavala, 2014a). En este sentido, se recomienda que durante la enseñanza se ponga énfasis en los indicadores de entendimiento 1 y 2.

Ahora bien, en los resultados se observó que en las cuatro carreras los porcentajes de respuestas correctas están por debajo de 50%, incluso a pesar de que ya habían tomado varios cursos donde se trabaja con el concepto vector. Por ejemplo, los estudiantes de ingeniería civil-U2 fueron quienes tuvieron el porcentaje de respuestas correctas más bajo, lo cual puede deberse a que al momento de aplicar la prueba sólo habían cursado la asignatura cálculo vectorial, a diferencia de los estudiantes de ingeniería Civil-U1 e ingeniería en Construcción-U1, quienes habían cursado asignaturas como física general, estática, dinámica y cálculo vectorial, lo que indica que estos estudiantes están más familiarizados en el trabajo con el concepto vector tanto en un contexto matemático como con sus aplicaciones. Asimismo, se reconoce que los estudiantes de matemáticas-U1 tuvieron porcentaje de respuestas correctas en la mayoría de los ítems (2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 19 y 20), lo que pudo deberse a que el TUV está diseñado en un contexto matemático. En cualquier caso, queda de manifiesto que los indicadores de entendimiento son endebles.

Por otra parte, cuando se compara el entendimiento, por ejemplo, entre estudiantes de ingeniería civil U1 y U2, carreras que persiguen el mismo perfil de ingreso y egreso de los estudiantes, la mayoría de los ítems fueron de alto grado de dificultad para los estudiantes de ambas carreras, 17 para la U1 y 18 para la U2. No obstante, el porcentaje general de respuestas correctas favorece a los estudiantes de la U1 (31%). Este resultado puede ser consecuencia de la flexibilidad del plan de estudios, ya que los estudiantes de U1 pueden elegir libremente las asignaturas que van a cursar cada semestre, mientras que un estudiante de U2 cursa asignaturas en el orden en están señaladas en su programa de estudios.

Finalmente, un bajo porcentaje de respuestas correctas en los ítems del TUV significa el bajo entendimiento de los estudiantes sobre el concepto vector. Lo que sugiere recurrir al fortalecimiento de los niveles de entendimiento. Reconocemos, además, que se abre la vía para profundizar en el diseño de estrategias de enseñanza y aprendizaje con base en los indicadores de entendimiento descritos en este estudio, sobre aquellas propiedades del concepto vector en las que se evidenció bajo entendimiento; por ejemplo, producto cruz y vector unitario.

Referencias

Al-Mutawah, M., Thomas, R., Eid, A., Mahmoud, E., y Fateel, M. (2019). Conceptual Understanding, Procedural Knowledge and Problem-Solving Skills in Mathematics: High School Graduates Work Analysis and Standpoints. *International Journal of Education and Practice, 7*(3), 258-273. https://doi.org/10.18488/journal.61.2019.73.258.273

Arredondo, E., García-García, J., & Torres, M. (2020). La modelación metafórica del movimiento por estudiantes universitarios. *Formación Universitaria, 13*(3), 55-64. https://doi.org/10.4067/S0718-50062020000300055

Barniol, P., & Zavala, G. (2014a). Evaluación del entendimiento de los estudiantes en la representación vectorial utilizando un test con opciones múltiples en español. *Revista Mexicana de Física E*, *60*(2), 86-102.

Barniol, P., & Zavala, G. (2014b). Force, Velocity, and Work: The Effects of Different Contexts on Students' Understanding of Vector Concepts Using Isomorphic Problems. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research, 10*(2), 1-15. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.10.020115

Barniol, P., & Zavala, G. (2014c). Test of Understanding of Vectors: A Reliable Multiple-Choice Vector Concept Test. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research, 10*(1), 1-14. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.10.010121

Barrera, A., Rivas, N., & López, O. (2015). Enseñanza del álgebra de vectores con enfoque por competencia a implementarse en física de educación secundaria. *Ciencia e Interculturalidad: Revista para el Diálogo Intercientífico e Intercultural, 16*(1), 7-19. https://doi.org/10.5377/rci.v16i1.2350

Bogatinoska, D., Stojanovska, L., & Janakievska, B. (2013). Simulations of Using Vectors in Natural Sciences Education. *Computer Technology and Application*, *4*(9), 454-458.

Dominguez, A., Barniol, P., & Zavala, G. (2019). Evaluación del entendimiento gráfico de derivada e integral definida mediante un examen en castellano de opción múltiple. *Formación Universitaria, 12*(6), 41-56. https://doi.org/10.4067/S0718-50062019000600041

Escudero, E. (2018). Evaluación estandarizada del logro educativo: contribuciones y retos. *Revista Digital Universitaria, 19*(6), 1-14. http://doi.org/10.22201/codeic.16076079e.2018.v19n6.a3

Flores-García, S., Gonzalez-Quezada, M., & Herrera-Chew, A. (2007). Dificultades de entendimiento en el uso de vectores en cursos introductorios de mecánica. *Revista Mexicana de Física E, 53*(2), 178-185.

Flores-García, S., Terrazas, S., González-Quezada, M., Chávez Pierce, J., & Escobedo Soto, S. (2008). Student use of vectors in the context of acceleration. *Revista Mexicana de Física E, 54*(2), 133–140.

Haji, S., & Yumiati (2019). NCTM's Principles and Standards for Developing Conceptual Understanding in Mathematics. *Journal of Research in Mathematics Trends and Technology, 1*(2), 56-65. https://doi.org/10.32734/jormtt.v1i2.2836

Heckler, A., & Scaife, T. (2015). Adding and Subtracting Vectors: The Problem with the Arrow Representation. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research, 11*(1), 1-17. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.11.010101

Hibbeler, R. (2004). *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*. México: Pearson Educación.

Kantrov, I. (2000). Assessing Students' Mathematics Learning. *Issues in Mathematics Education*. http://mcc.edc.org/pdf/iss_assm.pdf

Knight, R. (1995). The Vector Knowledge of Beginning Physics Students. *The Physics Teacher, 33*(2), 74-77. https://doi.org/10.1119/1.2344143

Kustusch, M. (2016). Assessing the Impact of Representational and Contextual Problem Features on Student Use of Right-Hand Rules. *Physical Review Physics Education Research, 12*(1), 010102. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.010102

Leithold, L. (1998). *El cálculo*. Universidad de Oxford.

Martínez, G., & Benoit, P. (2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: del cuaternión al análisis vectorial. *Latin-American Journal of Physics Education, 2*(2), 201-208.

Mora, L. (2011). La metodología indagatoria como herramienta para explicitar preconceptos sobre orientaciones espaciales en estudiantes de pedagogía en ciencias. *Revista Colombiana de Física, 43*(3), 577.

Nguyen, N., & Meltzer, D. (2003). Initial Understanding of Vector Concepts Among Students in Introductory Physics Courses. *American Journal of Physics, 71*(6), 630-638. https//doi.org/10.1119/1.1571831

Rakkapao, S., Prasitpong, S., & Arayathanitkul, K. (2016). Analysis Test of Understanding of Vectors with the Three-Parameter Logistic Model of Item Response Theory and Item Response Curves Technique. *Physical Review Physics Education Research, 12*(2), 1-10. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.020135

Sadler, P. (2005). The Relevance of Multiple-Choice Tests in Assessing Science Understanding. En J. Mintzes, J. Wandersee & J. Novak (Eds.), *Assessing Science Understanding: A Human Constructivist View* (pp. 249-278). https://doi.org/10.1016/B978-012498365-6/50013-5

Sussac, A., Planinic, M., Klemencic, D., & Sipus, Z. (2018). Using the Rasch Model to Analyze the Test of Understanding of Vectors. *Physical Review Physics Education Research, 14*(2), 1-6. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.023101

Tippens, P. (1996). *Física básica*. México: McGraw Hill.

Trowbridge, D., & McDermott, L. (1980). Investigation of Student Understanding of the Concept of Velocity in One Dimension. *American Journal of Physics, 48*(12), 1020-1028. https://doi.org10.1119/1.12298

Watson, A., Spyrou, P., & Tall, D. (2003). The Relationship Between Physical Embodiment and Mathematical Symbolism: The Concept of Vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education, 1*(2), 73-97.

Capítulo 8. Ampliación del modelo de conexiones entre sistemas de medidas con las actividades universales desde la etnomatemática

Camilo Andrés Rodríguez-Nieto
camiloarodriguez@mail.uniatlantico.edu.co
Universidad del Atllántico (Colombia)

Resumen

Con el uso de actividades universales se amplió el modelo de conexiones internas y externas entre sistemas de medidas. La metodología fue cualitativa-etnográfica desarrollada en tres etapas: *(1)* se seleccionaron los participantes y se hizo la observación no participante para la familiarización; *(2)* se aplicaron entrevistas semiestructuradas para recolectar la información partiendo de la pregunta: ¿cómo realizan su práctica cotidiana?, considerando videograbaciones y dibujos, y *(3)* se estudiaron los datos a través del análisis temático junto con la visión etnomatemática. Los resultados muestran que en las conexiones internas y externas entre sistemas de medidas evidenciadas en prácticas cotidianas (pelea de gallos, fabricación de cometas para la diversión y para la pesca, y elaboración del bollo de yuca) se usan medidas como el metro, la altura del ombligo, la cuarta, la braza, el jeme, el milímetro, entre otros. Además, se extendió el modelo de conexiones, puesto que la medición está conectada con otras actividades como estimar, contar, jugar, diseñar, localizar, en las cuales implícitamente está involucrada la actividad de explicar. Se concluye que estos resultados pueden ser útiles para promover conexiones en las clases de matemáticas contextualizadas.

Palabras clave: conexiones, etnomatemática, actividades universales.

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas centrados en hacer conexiones y relacionar la matemática con situaciones de la vida real podría permitir a los estudiantes comprender mejor los conceptos matemáticos (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Rodríguez-Nieto, Rodríguez-Vásquez & García-García, 2021). Esta visión de conexiones concuerda con herramientas de enfoques teóricos como la *teoría ampliada de las conexiones* (TAC) articulada con el enfoque ontosemiótico (EOS) donde son importantes las conexiones intramatemáticas y extramatemáticas, enriquecidas por las prácticas, los objetos, los procesos y las funciones semióticas (Rodríguez-Nieto, Font, Borji & Rodríguez-Vásquez, 2021; Rodríguez-Nieto, Rodríguez-Vásquez & Font, 2020).

Orey y Rosa (2020) conectaron la etnomatemática con la etnomodelación para contribuir a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, puntualizando en ideas de los procesos dialógicos que permiten usar y crear nuevas formas de aspectos *emic*, *etic* y *dialogical* en etnomodelación. Estos enfoques teóricos inician observando cómo los grupos culturales utilizan la matemática, lo cual se reconoce como la dotación humana básica que es la forma común de pensar que permite contar, modelar, medir, jugar, explicar, localizar, etcétera (Cortes & Orey, 2020).

Así como las conexiones son fundamentales en la investigación en educación matemática, también son relevantes en la escuela y en la vida cotidiana, y se han reconocido bajo la etnomatemática, en la exploración de conocimientos geométricos (García-García & Bernandino-Silverio, 2019), procesos de medición y análisis de artefactos. Particularmente desde la Antigüedad la medición es importante: el hombre usó su cuerpo para medir (Kula, 1980), se sugiere en los currículos de matemáticas (NCTM, 2000), se aborda en la investigación de Godino, Batanero y Roa (2002) sobre las magnitudes y sus implicaciones didácticas en la formación de maestros, así como en los contenidos sobre medidas en libros de texto (Mengual, Gorgorió & Albarracín, 2017). También, los sistemas de medidas se han investigado en la pesca (Chieus, 2009; Rodríguez-Nieto, Mosquera & Aroca, 2019), sobre todo la cuarta, el metro, el centímetro, el jeme, la braza, entre otras.

Otras investigaciones pusieron énfasis en medidas como la vara, la braza, la cuarta, el jeme, el codo y el paso, en la construcción de casas y la elaboración de mochilas, entre otras (Trujillo, Miranda & De la Hoz, 2018). Rodríguez-Nieto, Aroca & Rodríguez-Vásquez (2019) identificaron la cuarta, la braza, la altura del ombligo, el litro, el metro, el centímetro, el saco, la carga, etc., en la elaboración del bollo de yuca. Castro *et al.* (2020) exploraron las actividades universales de un mueblista, principalmente medidas como la tolerancia, el metro y el centímetro implícitas en los diseños y los cortes de madera. Según Ávila (2014), "las formas de medir o de localizar propias de la comunidad de referencia, así como los instrumentos de medición, en general juegan sólo el papel de motivación para aprender, o de elemento facilitador de la comprensión" (p. 44), sin atender relaciones con otras actividades cotidianas. Por su parte, Suprayo *et al.* (2019) señala que

> las matemáticas son una ciencia que se desarrolla con la sociedad, pero algunas personas no se dan cuenta de que han utilizado las matemáticas en sus vidas. Este punto de vista indica el supuesto de que las matemáticas no están relacionadas con la vida real, aunque las matemáticas están en las actividades diarias, por ejemplo, en juegos, transacciones de compra y venta, cálculo, medición, comparación, clasificación y diseño de edificios (p. 1).

Recientemente, Rodríguez-Nieto (2020) analizó las conexiones entre sistemas de medidas en diferentes prácticas cotidianas, pero no se concentró en valorar la importancia de las actividades universales (Bishop, 1999) que pueden vincularse con los procesos de medición. También, desde los currículos, la investigación y los libros de texto, la medición es importante para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pero se insiste en que debe estar conectada con el entorno sociocultural de los estudiantes. El NCTM (2000) manifiesta que la medición es una oportunidad que permite el aprendizaje y la aplicación de las matemáticas, considerando las operaciones numéricas, las nociones geométricas, la estadística, las funciones, los patrones, etc., y destacando el rol de las conexiones entre las matemáticas y entre éstas y otras áreas o asignaturas que se abordan en los entornos escolares, o bien las ciencias, el arte, la educación física, la tecnología, entre otras. Ante esta situación, surgen dos preguntas de investigación: ¿qué conexiones internas y externas se establecen entre los sistemas de medidas usados en prácticas cotidianas? y ¿cómo se relacionan las conexiones entre los sistemas de medidas o procesos de medición usados en prácticas cotidianas con otras actividades realizadas por los artesanos como contar, estimar, jugar, explicar, localizar…?

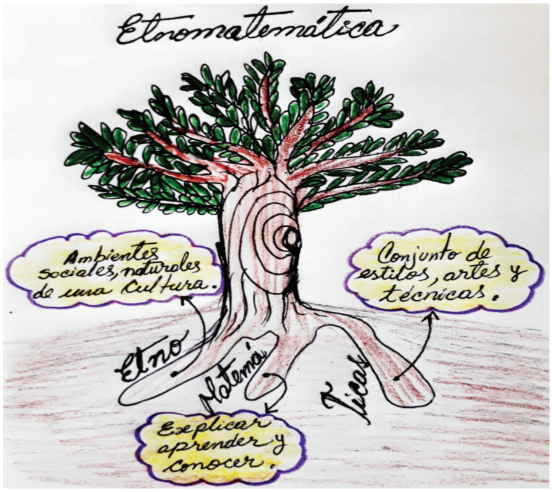
Fundamentación teórica

Etnomatemática

La etnomatemática es un programa de investigación que valora las matemáticas realizadas por grupos culturales. En este sentido, se reconoce como "la matemática practicada por grupos culturales, tales como comunidades urbanas o rurales, grupos de trabajadores, clases profesionales, niños de cierta edad, sociedades indígenas y otros grupos que se identifican por objetivos y tradiciones comunes a los grupos" (D'Ambrosio, 2001, p. 9).

Desde otra perspectiva, la etnomatemática es la matemática viva en las culturas e inserta en los objetos culturales (Oliveras & Albanese, 2012) y "propone una pedagogía viva, dinámica, para dar respuesta a nuevos estímulos ambientales, sociales, culturales y a nuevas necesidades" (D'Ambrosio, 2014, p. 107). Por ese motivo, en la figura 1 se muestra que la etnomatemática está viva en las actividades que realizan diversos grupos culturales; tanto así, que queda viva cuando se realizan análisis de objetos, artefactos y se encuentran figuras, diseños, etc., que han sido creados después de procedimientos y conocimientos empleados por una persona. Por eso, la etnomatemática es como un árbol que se sostiene de sus raíces, las cuales etimológicamente hacen referencia a "las ticas de matemá en un determinado etno" (D'Ambrosio, 2014, p. 103). Sus ramificaciones, sus hojas reverdecidas y sus frutos, representan las investigaciones, la formación de profesores y estudiantes y los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que se han conectado y fundamentado en las matemáticas desde una perspectiva sociocultural.

Figura 1. *Raíces etimológicas de la etnomatemática como una matemática viva*



Rosa y Orey (2016) afirman que existen otras *ticas,* como otras ideas de medir, comparar, contar, calcular y clasificar que pueden realizar las personas. Estas ticas están relacionadas con las actividades universales de Bishop (1999): contar, localizar, medir, diseñar, explicar y jugar (véase tabla 1).

Ahora bien, se sabe que la etnomatemática está ligada a las conexiones. Por ejemplo, Gerdes (2013) sostiene que esta disciplina es "el área de investigación que estudia las multifacéticas relaciones e *interconexiones* entre ideas matemáticas y otros elementos constituyentes culturales, como la lengua, el arte, la artesanía, la construcción, la educación" (p. 150). Asimismo, según Rosa y Orey (2018), el programa etnomatemático "enfatiza en la importancia de las comunidades en relación con el ambiente escolar, debido a que *conecta* la matemática con las prácticas culturales desarrolladas y utilizadas localmente" (p. 72).

Conexiones

Para los propósitos de esta investigación, una conexión es una relación verdadera entre dos ideas matemáticas A y B (Businskas, 2008), donde las ideas son los conocimientos matemáticos que surgen de las prácticas cotidianas;

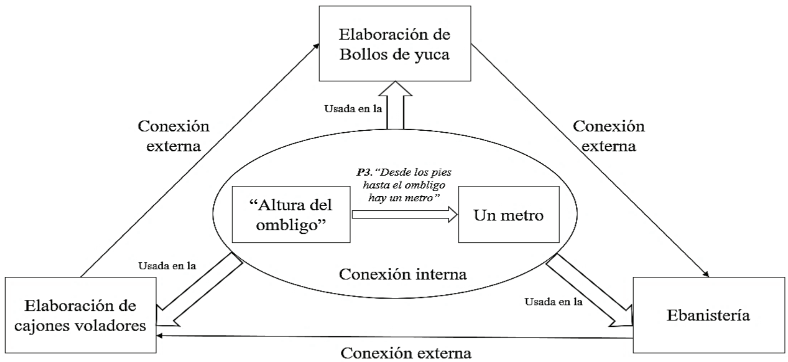
TABLA 1. *Actividades universales*

Contar	Comparar y ordenar objetos. Pone énfasis en el conteo corporal o digital, con marcas, uso de cuerdas u otros objetos para el registro, que dependerá del contexto de las personas donde se desarrolle esta actividad.
Localizar	Explorar el entorno espacial, conceptualizar y simbolizar el entorno con modelos, mapas, dibujos y otros recursos. En la localización, la postura geométrica se relaciona con la orientación, la navegación, la astronomía, la geografía y la cartografía del entorno.
Medir	Comparar, ordenar y cuantificar cualidades que tienen valor e importancia (Bishop, 1999). El hombre usó su cuerpo como el primer dispositivo para medir con la cuarta, el paso, la braza.
Diseñar	Imponer una estructura específica o transformar una parte de la naturaleza por otra cosa u objeto; por ejemplo, arcilla, madera o terreno y convertirlo en un artefacto: olla, mueble, entre otros. El diseño se refiere la tecnología, los artefactos y los objetos manufacturados que crean las personas.
Explicar	Indicación de aspectos cognitivos por investigar; conceptualizar el entorno y compartir estas conceptualizaciones. Eleva la cognición del ser humano para dar argumentos que estén por encima del nivel asociado a explicaciones basadas en la experiencia.
Jugar	Está vinculada con orden, reglas, procedimientos, estrategias, repeticiones, ingenio, valores, interacción social e imaginación. Permite desarrollar ideas matemáticas, pues en los juegos emergen conexiones matemáticas con vistas culturales.

FUENTE: Bishop (1999).

por ejemplo, relacionar dos significados, un concepto con su significado; representar una unidad de medida y equivalencias y conversiones entre unidades de medidas, así como relacionar dos o más actividades universales. Rodríguez-Nieto (2020) propuso un modelo de conexiones internas y externas para el estudio de sistemas de medidas. Una *conexión interna* se refiere a "las relaciones que hace un sujeto entre unidades de medidas (convencional o no convencional) de un mismo sistema de medida usado en una práctica cotidiana, considerando equivalencias y conversiones" (Rodríguez-Nieto, 2020, p. 12). Una *conexión externa* "se promueve cuando una unidad de medida (convencional o no convencional) es usada de manera similar en diferentes sistemas de medidas de prácticas cotidianas distintas" (Rodríguez-Nieto, 2020, p. 26) (véase figura 2).

FIGURA 2. *Ejemplo de conexión interna y externa*



FUENTE: Rodríguez-Nieto (2020, p. 27).

Por último, se reconoce que medir implica "comparar una cantidad con un estándar y expresar el resultado de la comparación a través de un número" (Secretaria da Educação, 2012, p. 43). Además, una unidad de medida es la cantidad usada como elemento de comparación reiterada (Godino *et al*., 2002).

Metodología

Esta investigación es cualitativa de estudio de caso con un enfoque etnográfico (Cohen, Manion & Morrison, 2018), desarrollada en tres etapas: *(1)* familiarización con los artesanos en sus lugares de trabajo, *(2)* aplicación de entrevistas semiestructuradas para conocer la práctica cotidiana que realizan y *(3)* análisis temático de datos (Braun & Clarke, 2006).

Participantes del estudio y contexto

Los participantes (P) fueron cuatro artesanos de tres localidades del departamento del Atlántico, en el norte de Colombia, cuyas actividades se describen en la tabla 2.

Tabla 2. *Información de los participantes del estudio*

<table>
<tr><th>P</th><th>Edad</th><th colspan="2">Práctica cotidiana</th><th>Localidad</th><th>Escolaridad</th></tr>
<tr><td>P1 (Arturo)</td><td>70 años</td><td colspan="2">Pelea de gallos finos</td><td>Sibarco</td><td>Bachiller</td></tr>
<tr><td>P2 (Omar)</td><td>60 años</td><td rowspan="2">Elaboración de cometas</td><td>Pescar</td><td>Bocas de Cenizas</td><td>Primaria</td></tr>
<tr><td>P3 (Pablo)</td><td>45 años</td><td>Diversión</td><td>Baranoa</td><td>Bachiller</td></tr>
<tr><td>P2 (José)</td><td>64 años</td><td colspan="2">Elaboración de bollos de yuca</td><td>Sibarco</td><td>Primaria</td></tr>
</table>

Recolección de los datos

Los datos fueron recolectados a partir de la etnografía (*ethnos* 'pueblo, gente' y *grapho* 'descripción'), la cual permite al investigador apropiarse y reportar la cultura y la realidad de las personas (Restrepo, 2016). Se usó la entrevista semiestructurada (Cohen *et al*., 2018), mediante la cual se establece un diálogo entre el entrevistador (E, autor de la investigación) y el entrevistado (P, participante del estudio). En este tipo de entrevista se procuró indagar a profundidad partiendo de la pregunta. ¿cómo realiza su práctica cotidiana? Con base en las respuestas de los participantes el entrevistador reformulaba otras preguntas con el fin de aclarar información que no hubiese quedado entendida. También se profundizó en datos relacionados con contenidos matemáticos (medidas, conteos, etcétera).

Análisis de datos

Los datos fueron estudiados por medio del análisis temático propuesto por Braun y Clarke (2006), el cual permite identificar y reportar patrones (temas) dentro de los datos. Para analizar e identificar las medidas, las actividades universales y la conexiones, se consideró el fundamento teórico y las seis fases de análisis.

Fase 1. Familiarización con los datos

Se organizaron y se transcribieron las entrevistas que habían sido videograbadas y se ordenaron con sus respectivas producciones fotográficas. En el caso del gallero los datos se organizaron como se muestra en el extracto de la entrevista y en el dibujo:

E: ¿Qué se tiene en cuenta cuando se va a iniciar una pelea de gallos?

P1: Primero van al peso. Los gallos se pelean con pesos iguales. Que ambos pesen lo mismo; por ejemplo, tres libras y tres libras, y sin que uno sea más grande que el otro, porque a veces no le conviene al contendiente (véase figura 3).

FIGURA 3. *Gallos de pelea con igual tamaño y peso*

Fase 2. Generación de códigos

Después de leer los datos transcritos, se identificaron las palabras y las frases (códigos) en las que los participantes usaron unidades de medidas o bien desarrollaron actividades universales. Por ejemplo, en la fase 1 se identificó el código en el que se interpretó que el gallero utiliza la *libra* como unidad de medida, lleva a cabo procesos de comparación para el tamaño de los gallos y reconoce las actividades de medir, contar, jugar y explicar, es decir, que al inicio de la pelea se establecen reglas de juego conectadas con la medición, los conteos y la explicación que permanecen durante todo el proceso.

Fase 3. Búsqueda de temas

Una vez identificados los códigos en los datos, se procedió a agrupar los que tuvieran características similares y que sugirieran algún tipo de medidas (convencionales o no convencionales; de longitud, masa, tiempo, capacidad) y actividades universales. Por ejemplo, en la pelea de gallos se evidenció el uso de la unidad de medida *libra* y también se identificó en la elaboración del bollo de yuca cuando el bollero afirma que un bollo pesa una libra, y un saco de yuca, 120 libras. En este sentido, se reconoce la unidad de medida *libra* en dos prácticas diferentes y se identifican conexiones internas y externas y actividades universales como medir, contar y explicar.

Fase 4. Revisando temas

Los temas fueron revisados con el fin de que los códigos que los conforman en realidad sugieran una unidad de medida o una actividad universal. Además, estos temas fueron triangulados con un investigador externo especialista en etnomatemática y procesos de medición.

Fase 5. Definiendo y nombrando temas

Se definieron los temas considerando tipos de medidas, es decir, de capacidad, longitud, masa y tiempo, y su clasificación en convencionales y no convencionales. Además, se nombraron las conexiones internas y externas entre sistemas de medidas.

Fase 6. Producción de un reporte

Se elaborará un reporte en el que puedan identificarse todos los sistemas de medidas de los participantes del estudio y las actividades universales que desarrollan. También, se mostrarán las conexiones entre actividades universales cuando se enuncien las internas y la externas.

Resultados

Conexiones en la práctica cotidiana de la pelea de gallos finos

Como se afirmó en la fase 1, antes de iniciar la pelea los gallos son evaluados para garantizar que tengan igual peso e igual tamaño. P1 señala que el tamaño (la estatura) del gallo se estima (la talla) en una jaula de dos entradas donde se comparan los gallos y al final los galleros dicen: "Va la pelea". Además, se debe tener en cuenta la medida de las espuelas, como se deduce del siguiente diálogo:

E: ¿A qué haces referencia cuando hablas de *líneas*?
P1: Al tamaño de la espuela, que debe ser de treinta y cinco líneas.
E: Pero, ¿cada línea a qué equivale?
P1: A un milímetro. Esta espuela tiene treinta líneas. La mayoría de los gallos usa espuelas de treinta, treinta y cinco y veinticinco. Los más grandes, para que los jueguen, de cuarenta líneas.
E: Y dependiendo del tamaño del gallo o del peso…
P1: El peso, por ejemplo, tres-cuatro, tres-cinco… Tres libras con cuatro onzas o tres libras con cinco onzas en adelante pelean con espuelas de cuarenta líneas máximo.
E: ¿Cuáles son los tipos de peso?
P1: Hay gallos dos-doce, dos-catorce, el más pequeño (peso pluma), dos quince, tres libras, tres-una, tres-dos, tres-tres, tres-cuatro, tres-cinco (usa los dedos para contar; véase figura 4a). Ya de cuatro libras es peso pesado.
E: ¿Y todos ustedes tienen sus medidores?
P1: Sí, todos tenemos estuches de espuelas de treinta y cinco, cuarenta y treinta. Nosotros medimos con esto (muestra un metro); véase figura 4b.

Con base en el diálogo anterior y la información de la figura 4b se evidenciaron diferentes unidades de medidas, como la línea, el milímetro, la libra, la onza, el metro y un lenguaje particular del gallero que utiliza "tres-tres" "tres-cuatro" para referirse a tres libras más cuatro onzas. En este sentido, el gallero está haciendo conversiones y equivalencias entre medidas. Por ejemplo, una línea es igual a un milímetro y tres-tres (lenguaje

FIGURA 4. *Conteos con los dedos representando medidas y medici*ón de la espuela

Figura 4a. Uso de los dedos para contar.

Figura 4b. Parrilla o zapatilla y medidas de las espuelas de 25 y 30 líneas.

Figura 5. *Ubicación y amarre de la espuela en la pata del gallo*

del gallero) equivale a tres libras más tres onzas (lenguaje matemático) (véase figura 5).

P1: A estas vainas se les llama parrillas o zapatillas; se ponen en la espuela, pero se fijan con esparadrapo para dar más seguridad. Eso va montado en la pata. Hay gallos que no tienen espuela: se le pone esto y reemplazan la espuela.

Además, P1 mencionó unidades de medida de tiempo como el minuto, puesto que dijo que la pelea tiene una duración de diez a quince minutos, dependiendo de las reglas de juego y de los acuerdos a los que lleguen los galleros y el juez (véase diálogo).

P1: Los gallos se presentan ante los jueces y se pican y después la pelea va con un tiempo, o sea, durante quince minutos, que es lo máximo. Se ponen de acuerdo los dos galleros: "Vamos a pelear quince, doce, diez minutos, lo que convenga".

Por otra parte, el investigador aprovechó para hacer énfasis en los instrumentos que usan los jueces y los galleros para medir el tiempo. Se descubrió que utilizan el reloj convencional, el cual lleva una graduación o alarma que suena a los cinco minutos para avisar que ya no habrá cambio de espuelas. También se identificó otro instrumento para medir el tiempo: "las botellas", la cual consiste en un par botellas unidas boca a boca con un separador que lleva una abertura por donde pasa arenilla durante un tiempo estipulado; por lo general, en las peleas de gallos, un minuto. Públicamente, a este instrumento se le conoce como reloj de arena, el cual ha sido sustituido por los relojes convencionales, cronometrados y digitales; pero aún se usa, por ejemplo, en la pelea de gallos:

E: ¿Qué instrumentos utilizan para medir el tiempo?

P1: Los jueces tienen un reloj que cuando marca los cinco minutos timbra para indicar que ya no habrá cambio de espuela. También utilizan el reloj, al que llaman “las botellas”, durante el transcurso de la pelea; o sea, los gallos están peleando, pero cuando hay un gallo que está muy herido y ya no tira y sigue recibiendo ataques del otro, le ponen las botellas.

E: ¿Podría hacer un dibujo?

P1: Tiene un separador y una botella con una determinada cantidad de arenilla finita que pasa hacia la otra botella en el transcurso de un minuto, de aquí para acá. Si en el transcurso de este tiempo el gallo que está herido no tira, pierde la pelea. Otra circunstancia: si un gallo tiró y se cayó y el otro gallo lo tiene encima, le ponen las botellas; si no se levantó, pierde la pelea. El tránsito de esta arena que está aquí hasta acá dura un minuto (véase figura 6).

Otra situación en la que se usa el reloj de arena es en la que se menciona en el siguiente diálogo de la entrevista. Cuado el gallero hace referencia a la riña, se refiere a la pelea de gallos.

P1: Cuando el juez pone las botellas y la arena empieza a caer y, antes de que se vacíe la botella de arriba, el gallo se levantó, la riña continúa.

E: ¿Qué es la riña?

P1: La pelea de ambos gallos.

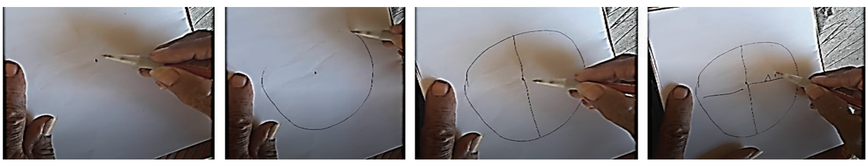
Por último, el gallero habló acerca de la valla, la cual tiene ocho metros de diámetro y tiene forma redonda. Aquí se evidencian conceptos geomé-

Figura 6. *Representación de la botella o reloj de arena.*

tricos como la circunferencia y el círculo (véase diálogo y figura 7). P1 dijo que la valla tiene ochenta centímetros de alto. En síntesis, se reconocen unidades de medidas como el metro, el centímetro y el diámetro. Y cuando P1 se refiere a que la valla es redonda, implícitamente hace referencia a conceptos como la circunferencia y el círculo.

E: ¿Cómo es la valla? Y de alto, para que el gallo no se salga, ¿cuánto mide?
P1: La valla tiene ocho metros de diámetro, cuatro hacia allá y cuatro hacia acá. Este es el centro de la valla. Es redonda. Y de altura de 80 cm a un metro.

Figura 7. *Representación de la valla para la pelea de gallos*



En la tabla 3 se resume toda la información de los sistemas de medidas y las conexiones internas y externas que se establecen entre ellos.

Aunadas al sistema de medida identificado en la pelea de gallos finos (véase tabla 3) se encuentran las actividades universales conectadas, puesto que en la actividad de *medir* se inscriben todas las medidas empleadas por el gallero, las cuales se hallan conectadas con procesos de *conteo* (treinta y cinco líneas, dos espuelas, tres libras, contar con los dedos). La *localización* tiene lugar en la ubicación de la espuela en la pata del gallo considerando la parrilla. Luego, se tiene en cuenta la actividad de *explicar*, puesto que todas las explicaciones y los argumentos que ofrece el gallero son para conceptualizar y proporcionar información profunda sobre un tema. Por ejemplo, cuando explicó la equivalencia de las líneas, la estructura del reloj de arena, la transición del lenguaje del gallero al lenguaje matemático, el significado de una riña, entre otros. Estas actividades universales surgieron durante la pelea de gallos, es decir, las conexiones entre actividades universales emergieron en el desarrollo de la actividad de jugar. De hecho, el juego permite el desarrollo de ideas matemáticas, pues en los juegos se producen conexiones matemáticas con vistas culturales (Bishop, 1999).

TABLA 3. *Conexiones en la pelea de gallos finos*

Unidades de medidas	***Magnitud***	***Equivalencias y conversiones***	***Conexiones internas***
Líneas		Una línea es igual a un milímetro	Relaciona una unidad de medida no convencional y otra convencional
Milímetro	Longitud	35 líneas es equivalente a tres centímetros y medio equivalente a 35 milímetros	Uso de las unidades de medidas milímetro, centímetro y línea, donde se establecen relaciones entre unidades de medidas convencionales y no convencionales (línea)
Metro, centímetro		El metro es igual a cien centímetros.	Uso de las unidades de medidas metro, centímetro
Libras, onza, tres-tres, tres-cuatro, tres-cinco	Masa	Tres-cuatro equivale a tres libras más cuatro onzas	Relaciona una unidad de medida no convencional (tres-tres) y otra convencional (libra y onza)
Minutos	Tiempo	Uso de la unidad de medida minuto	

Conexiones en la elaboración de cometas para diversión y pesca

Rodríguez-Nieto *et al.* (2019a) y Rodríguez-Nieto (2020) reportaron estos dos tipos de elaboración de cometas poniendo énfasis en los sistemas de medidas. Sin embargo, no se han estudiado las conexiones entre los sistemas de medidas y las actividades universales.

Cometas para diversión

P2 menciona que para elaborar una cometa necesita caña brava o de bambú, machete, pita o nylon, bolsa plástica o papel de cometa, tijeras, colbón o pegante y tela para la cola. El procedimiento para elaborar la comenta inicia con el corte de la caña para la obtención de las varillas, las cuales generalmente son tres: dos largas (parales) y una corta (central). Cuando se requieren zumbadores, se coloca un arco y cinco varillas: dos largas (parales), una central, una que sostiene el arco y otra delgada también para el arco. P2 explica que las varillas largas son las que definen el tamaño de la cometa, y la central, el ancho, las cuales se calculan con unidades de medidas no convencionales como la cuarta, el jeme, los dedos y, en algunas ocasiones, la pita (véase figura 8).

Cuando P2 amarra las varillas con la pita lleva a cabo un proceso de verificación mediante el cual realiza medidas de media cuarta y se cerciora de que la varilla central quede a la mitad y la cometa mantenga el equilibrio, o bien, emplea un flexómetro o una regla para que las varillas queden con las medidas exactas (véase figura 9).

En la figura 9 se muestran las conexiones internas establecidas por P2, cuando usa equivalencias y conversiones entre unidades de medidas no convencionales y convencionales. Por ejemplo, P2 menciona lo siguiente: "Como yo soy el que elabora la cometa, la cuarta de mi mano mide veintidós centímetros. *Midiéndola, yo marco aquí la cuarta mía (con el lápiz), con un metro mido aquí veintidós centímetros*". En la tabla 4 se sintetizan los tipos de medidas empleados por P2.

Además de las medidas identificadas, se reconocen otras conexiones entre actividades universales. Por ejemplo, P2 inició sus mediciones con el uso de reglas, puesto que fabricó una cometa para adultos de cinco cuartas que soporta vientos fuertes, por lo que requiera pita gruesa y es difícil de

FIGURA 8. *Uso de la cuarta, jeme, dedos y la pita*

FIGURA 9. *Uso de la pita, el metro y la regla para verificar medidas*

TABLA 4. *Sistema de medida usado en la elaboración de cometas para diversión*

Unidades de medidas	***Magnitud***	***Equivalencias y conversiones***	***Conexiones internas***
Cuarta, jeme, dedo, pita, metro y centímetro	Longitud	Una cuarta es equivalente a 22 centímetros	Conexión entre una unidad de medida no convencional (cuarta) con una unidad de medida convencional (centímetro)

manipular para los niños. P2 siguió con un diseño de la cometa que ha establecido con base en su experiencia (con la intención de transformar una madera o una caña en un artefacto [esto es, una cometa] con estructura pensada para diversión), lo cual conectó con la acción de medir la caña con la cuarta de su mano; particularmente, elaboró una comenta de cinco cuartas. Posteriormente, conectó la medición con el conteo (cinco cuartas), cuando cortó las cinco varillas que requiere para confeccionar una comenta con arco. Luego, hizo una conexión con la actividad de localizar, en la medida en que las varillas se deben ubicar a la misma distancia, considerando el eje central o de simetría de la cometa. En estas actividades se encuentra implícita la explicación; por ejemplo, cuando a P2 se le cuestionó: ¿qué es la cuarta? El respondió: "Es la medida que uno hace sobre la cometa, del dedo pulgar al meñique, abierta la mano" (Rodríguez-Nieto, 2020).

Cometas para pescar

P3 dijo que las cometas se fabrican con guadua, pita nylon y bolsa plástica, cuyo tamaño depende del tipo de viento que se presente en Bocas de Cenizas, y se clasifican en seis tipos. Para saber el tamaño de la comenta, con un machete P3 corta dos varillas largas y una corta y las mide usando la cuarta, el jeme y el dedo, como se muestra en la figura 10.

La figura 10 muestra la fabricación de dos tipos de cometas. Por su parte, la tabla 5 detalla la información sobre seis tipos de estos artefactos (Rodríguez-Nieto *et al.*, 2019a).

En la construcción de la cometa se utilizaron medidas no convencionales, pero P3 señala que cuando se emprender la pesca se emplean otras

FIGURA 10. *Elaboración de la cometa de pesca*

FUENTE: Rodríguez-Nieto *et al.* (2019a).

TABLA 5. *Tamaño de las cometas en función de medidas no convencionales*

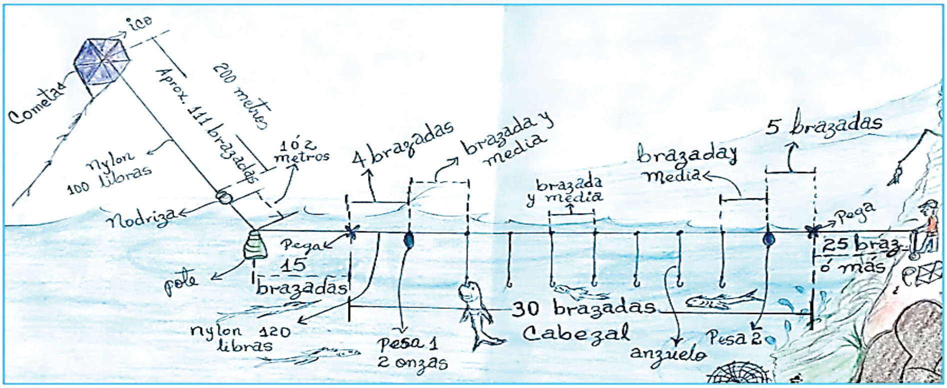
Tamaño de la cometa	*Varillas*	*Cuartas*	*Dedos*	*Jeme*
Pequeña 1	Larga	1		1
	Central	1	2	
Pequeña 2	Larga	2		
	Central	1	3	
Pequeña 3 ancha	Larga	2	5	
	Central	1		1
Mediana 1	Larga	2		1
	Central	1	9	
Mediana 2	Larga	3		
	Central	2		
Grande	Larga	4	6	
	Central	2	9	

unidades de medidas convencionales como el metro, la libra y la onza (para pesca de media agua se usa pesa de plomo de dos onzas y para pesca a fondo se usa pesa de tres o cuatro onzas), y no convencionales, como la braza, la media braza y el cabezal (véase figura 11), las cuales están conectadas por medio de las equivalencias y las conversiones.

En consecuencia, hay evidencia de que en el sistema de medida implementado en la pesca con cometas se establecen diversas conexiones internas, como se muestra en la tabla 6.

Después de identificar las conexiones internas en el sistema de medidas empleado por P3 se procedió a describir las conexiones entre actividades universales. Por ejemplo, P3 se decidió por un determinado modelo de

FIGURA 11. *Uso de medidas convencionales y no convencionales en la pesca*



FUENTE: Adaptado de Rodríguez-Nieto *et al.* (2019a).

TABLA 6. *Conexiones en la elaboración de cometas para pescar*

Unidades de medidas	***Magnitud***	***Equivalencias y conversiones***	***Conexiones internas***
Cuarta, jeme, dedo, braza, cabezal y metro	Longitud	111 brazas son aproximadamente 200 metros Un cabezal = 30 brazas	Conecta una unidad de medida no convencional y otra convencional. Conexión entre dos unidades de medidas no convencionales
Libra y onza	Masa		Uso de medidas convencionales

cometa que depende de la fuerza del viento; luego conectó con la medición de la caña para obtener las varillas de la cometa (con la cuarta, el jeme y el dedo) y al mismo tiempo realizó conteos (una, dos y tres varillas). Posteriormente, ubicó las varillas considerando el punto medio de las largas; las amarró y después colocó la varilla central. Estas actividades están conectadas a la actividad de explicar, puesto que P3 explica detalladamente, con argumentos, la clasificación de las cometas, separación ideal entre los anzuelos, el sistema para que no se enreden, etcétera (véase figura 11).

Conexiones en la elaboración de bollos de yuca

Para elaborar un bollo de yuca, P4 sigue 10 etapas: *(1)* arrancar la yuca; *(2)* empacarla y transportarla a la fábrica, donde se utilizan unidades de medidas como el saco, el bulto, el lao, el tercio, la carga y la libra*; (3)* pelarla, contando el tiempo en horas y minutos, cuando P3 asegura que para realizar esta operación en cada carga de yuca se tarda una hora; *(4)* lavarla, para lo cual P3 utiliza baldes de agua de 15 litros; *(5)* rallarla con el auxilio de una máquina para obtener la masa (aquí P3 puso énfasis en las medidas de la máquina que obtuvo por medio de un flexómetro y afirmó que un metro es equivalente a la altura del ombligo); *(6)* exprimir la masa en un saco con una piedra o con una pesa; *(7)* pelotear y limpiar la masa; *(8)* moldear la masa en forma de un elipsoide; *(9)* forrar y amarrar la masa con hojas de maíz verde y pita de saco con tamaño de una braza (bollo crudo), y, por último, *(10)* cocinar los bollos en un tanque con siete baldes de agua durante dos horas (Rodríguez-Nieto, 2020; Rodríguez-Nieto *et al.*, 2019b). En la figura 12 se muestra una síntesis de la elaboración del bollo.

En las diversas etapas de elaboración del bollo implícitamente P4 utiliza medidas y establece conversiones y equivalencias. Por ejemplo, cuando señala que la unidad de medida "altura del ombligo" es equivalente a un metro. También emplea instrumentos de medida como el flexómetro para ofrecer explicaciones exactas sobre la construcción de sus herramientas de trabajo. En la tabla 7 se presentan todas las medidas y conexiones internas usadas por P4.

FIGURA 12. *Etapas de elaboración del bollo de yuca*

Tabla 7. *Conexiones en la elaboración de bollos de yuca de Sibarco*

Unidades de medida	***Magnitud***	***Conversiones y equivalencias***	***Conexiones internas***
Bulto, saco, lao, carga, balde, litro y canasta	Capacidad	Una carga = dos bultos. Un bulto = un lao = un tercio = un saco. Un balde tiene 15 litros de agua.	Conecta unidades de medidas no convencionales equivalentes Conecta una unidad de medida convencional con otra no convencional
Braza, altura del ombligo, altura de la persona, jeme, metro, centímetro	Longitud	Una braza es igual a la altura de la persona. La altura del ombligo es igual a un metro.	Conecta dos unidades de medidas no convencionales Conecta una unidad de medida convencional con otra no convencional
		Un metro es igual a 100 centímetros.	Conecta dos unidades de medidas convencionales
Minuto y hora	Tiempo	Un bollo mide un jeme y pesa una libra.	Conecta una unidad de medida convencional con otra no convencional de diferentes magnitudes
Libra y onza	Masa		

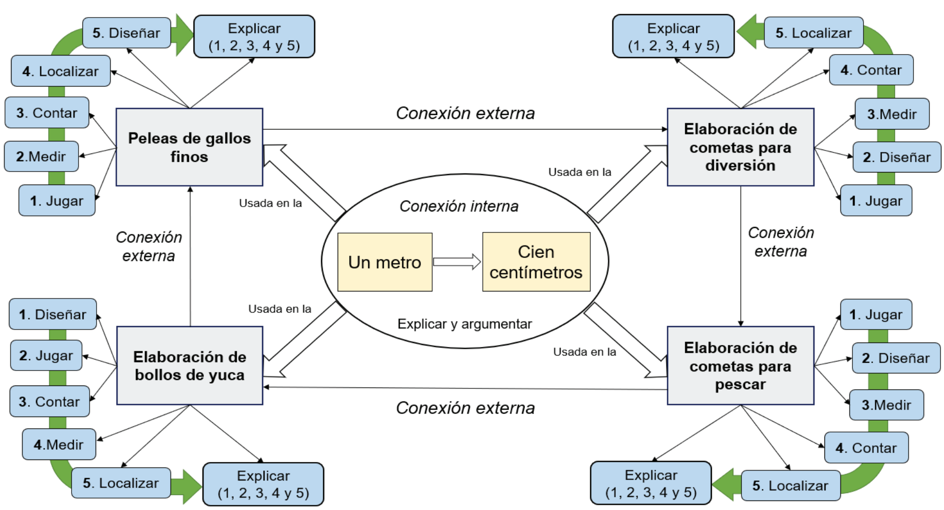
Fuente: Adaptado de Rodríguez-Nieto *et al.* (2019b).

Desde el inicio de la elaboración del bollo de yuca P4 ya tiene definido un diseño del bollo con forma elipsoidal (además, intentará pelar, rallar y moldear la yuca transformando la materia prima en un producto) (Rodríguez-Nieto *et al.*, 2019b). Posteriormente, P4 toma decisiones acerca de la cantidad de bollos que va a elaborar y de cuánto material necesitará (actividad de jugar). Luego, en las acciones de arrancar y empacar la yuca lleva a cabo procesos de conteo; específicamente, cuando arroja la yuca en el saco o cuando asegura que dos sacos son equivalentes a una carga. P4 realiza otros conteos cuando moldea la masa y le da forma, puesto que en ese momento se da cuenta cuántos bollos va a rendir la masa. También cuenta la cantidad de pitas o ataderos para amarrar los bollos (los cuales miden una braza cada uno). En la actividad de contar realizada por P4, la actividad de medir se conecta con unidades de medida como la carga, el metro, el balde, el saco, la libra, el litro, que mantienen una conexión interna porque se relacionan en una sola práctica. Posteriormente, cuando P4 moldea y amarra masa, coloca las pitas en un clavo para que no se enreden, pone los bollos en la mesa de trabajo (véase figura 12) y, en otras circunstancias, coloca los palos de leña para armar el fogón y conectar el tanque. Como es obvio, en estas actividades está involucrada la actividad de explicar.

Conexiones externas

Este tipo de conexiones se producen cuando una unidad de medida es utilizada de manera similar en diferentes prácticas cotidianas. En este sentido, en las prácticas cotidianas de elaboración de cometas y bollos de yuca se usa el jeme como la unidad de medida de la longitud, la cual comprende desde el dedo pulgar hasta el dedo índice (definido de la misma manera por los tres artesanos). Por lo tanto, P2, P3 y P4 establecen una conexión interna de significado desde una perspectiva etnomatemática en sus propias prácticas. Además, estos artesanos fijan una conexión externa porque usan el jeme para medir longitudes (véanse figuras 8, 10 y 12) Otra conexión externa se evidencia cuando los artesanos usan la unidad de medida metro, equivalente a cien centímetros (véase figura 13), poniendo énfasis en las conexiones internas y externas y entre actividades universales.

Figura 13. *Ampliación del modelo de conexiones internas y externas*



La figura 13 muestra la ampliación del modelo de conexiones internas y externas propuesto por Rodríguez-Nieto (2020), cuando los artesanos expresan que un metro equivale a cien centímetros. Posteriormente, esta equivalencia es utilizada en diferentes prácticas con el auxilio del flexómetro. Esto es, existe una conexión externa entre diversos sistemas de medidas. El uso de unidades de medida evidencia que los artesanos desarrollan la actividad de medir. Y al estudiar con detalle cada práctica cotidiana se descubrió que la medición está conectada a otras actividades universales *(diseñar, jugar, contar, localizar),* mediante las cuales se promueve la actividad de explicar, así como la argumentación.

Reflexiones finales

En esta investigación se reconocieron las conexiones internas y externas entre sistemas de medidas conectados a las actividades universales propuestas por Bishop (1999). Se reconoce que medir es un proceso fundamental propuesto en los currículos que ha sido sugerido en diversas investigaciones (Godino *et al.,* 2002; Mengual *et al.,* 2017; Rodríguez-Nieto, 2020; Rodríguez-Nieto *et al.,* 2019 & 2019b) y que contribuye a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues se involucra en otras actividades y en otras asignaturas y propicia el apropiamiento y la aplicación de operaciones numéricas para establecer conexiones entre las matemáticas y la vida real (NCTM, 2000). Por esta razón, en este estudio se muestra una red de conexiones entre medidas y actividades universales que podrían usarse para el diseño de tareas con el fin de promover conexiones matemáticas para que los estudiantes comprendan mejor los conceptos de esta materia. Se reconoce que Rodríguez-Nieto (2020) exploró las conexiones internas y externas, pero el presente estudio las detalla mediante el análisis temático, reconociendo los procesos de contar, jugar, diseñar, estimar, localizar y explicar asociados a la medición.

Cabe destacar que en esta investigación se tomaron en cuenta dos tipos de *dibujos* como un aporte metodológico para la recolección y el análisis de datos en el estudio cualitativo basado en la etnomatemática: *(1)* Los dibujos realizados por los artesanos durante y después de las entrevistas representan partes o la práctica cotidiana que se está explorando, o bien, son bosquejos de artefactos y herramientas empleados por el artesano (véase figuras 6 y 7). *(2)* Los dibujos elaborados por el investigador, producto de su imaginación e inspiración, se basan en la escucha de audios y en la observación de fotografías y videos tomados durante la entrevista (véase figuras 3, 5, 10 y 11), los cuales requirieron la validación o la revisión por parte de los artesanos. Esa validación le permitió al artesano agregar información, hacer correcciones de forma y ofrecer sugerencias y comentarios al investigador sobre el contenido del dibujo (matemático o no), para ganar coherencia entre la práctica cotidiana (realidad que vive el artesano) y el bosquejo del investigador (representación de la realidad).

Además, esta investigación proporciona un modelo ampliado de conexiones con principios etnomatemáticos que busca valorar las matemáticas que practican diversos grupos culturales para conectarlas con la matemática institucionalizada. Para futuros estudios se recomienda la implementación de este modelo de conexiones en otras prácticas cotidianas de diferentes países y el establecimiento de vínculos con los contenidos matemáticos sugeridos en los currículos y en las aulas de clase.

Agradecimientos

Agradezco a los participantes de esta investigación por compartir su información para los fines de este trabajo. También doy las gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por apoyar económicamente mis estudios de doctorado en ciencias con especialidad en matemática educativa en la Universidad Autónoma de Guerrero.

Referencias bibliográficas

Castro, A., Rodríguez-Nieto, C. A., Aravena, L., Loncomilla, A., & Pizarro, D. (2020). Nociones matemáticas evidenciadas en la práctica cotidiana de un carpintero del sur de Chile. *Revista Científica, 39*(3), 278-295.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Buenos Aires: Paidós.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using Thematic Analysis in Psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101.

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about Connections: How Secondary Mathematics Teachers Conceptualize and Contend with Mathematical Connections* (Tesis de doctorado inédita). Simon Fraser University, Faculty of Education, Canadá.

Chieus, G. (2009). A braça da rede, uma técnica caiçara de medir. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 2*(2), 4-17.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education*. Londres/Nueva York: Routledge.

Cortes, D. P. O., & Orey, D. C. (2020). Connecting Ethnomathematics and Modelling: A Mixed Methods Study to Understand the Dialogic Approach of Ethnomodelling. *Revemop, 2,* e202011.

D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomatemática: Elo entre las tradições e a modernidad* (Col. Tendencias en Educación Matemática). Belo Horizonte: Autêtica.

D'Ambrosio, U. (2014). Las bases conceptuales del Programa Etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 100-107.

García-García, J., & Bernandino-Silverio, N. (2019). Conocimientos geométricos en la elaboración de un artefacto en una comunidad ñuu savi. *IE: Revista de Investigación Educativa de la Rediech, 10*(19), 105-120.

Gerdes, P. (2013). *Geometría y cestería de los bora en la Amazonía peruana*. Lima: Ministerio de Educación.

Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Kula, W. (1980). *Las medidas y los hombres* (3ª ed.). Madrid: Siglo XXI.

Mengual, E., Gorgorió, N., & Gordo, L. A. (2017). Análisis de las actividades propuestas por un libro de texto: El caso de la medida. *Redimat,* 6(2), 136-163.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Oliveras, M. L., & Albanese, V. (2012). Etnomatemáticas en artesanías de trenzado: Un modelo metodológico para investigación. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 26*(44), 1315-1344.

Orey, D. C., & Rosa, M. (2020). Positionality and Creating Dialogue in Nepal: Connecting Ethnomathematics and Modelling: The Importance of Place through Ethnomodelling. *Social Inquiry: Journal of Social Science Research, 2*(1), 82-103.

Restrepo, E. (2016). *Etnografía: Alcances, técnicas y éticas*. Bogotá: Envión.

Rodríguez-Nieto, C. A. (2020). Explorando las conexiones entre sistemas de medidas usados en prácticas cotidianas en el municipio de Baranoa. *IE: Revista de Investigación Educativa de la Rediech, 11,* e857, 1-31.

Rodríguez-Nieto, C., Aroca, A., & Rodríguez-Vásquez, F. M. (2019b). Procesos de medición en una práctica artesanal del caribe colombiano. Un estudio desde la etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 12 (4), 61-88.

Rodríguez-Nieto, C., Font, V., Borji, V., & Rodríguez-Vásquez, F. M. (2021). Mathematical Connections from a Networking of Theories Between Extended Theory of Mathematical Connections and Onto-Semiotic Approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071

Rodríguez-Nieto, C., Mosquera, G., & Aroca, A. (2019a). Dos sistemas de medidas no convencionales en la pesca artesanal con cometa en Bocas de Cenizas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 12*(1), 6-24.

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Font, V. (2020). A New View about Connections: The Mathematical Connections Established by a Teacher When Teaching the Derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., & García-García, J. (2021). Pre-Service Mathematics Teachers' Mathematical Connections in the Context of Problem-Solving about the Derivative. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 12*(1), 202-220.

Rosa, M. (2018). Propondo um currículo trívium fundamentado nas perspectivas da etnomatemática e da modelagem. *Revista Educa*ção *Matemática en Foco, 7*(2), 63-98.

Rosa, M., & Orey, D. (2016). Polysemic Interactions between Ethnomathematics and Culturally Relevant Pedagogy. En M. Rosa, U. D'Ambrosio, D. C. Orey, L. Shirley, W. V. Alangui, P. Palhares & M. E. Gavarrete (Eds.), *State of the Art in Ethnomathematics* (pp. 11-13). Springer International.

Secretaria da Educação (2012). *Currículo do estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias*. São Paulo, Brasil: Secretaria da Educação.

Suprayo, T., Noto, M. S., & Subroto, T. (2019, marzo). Ethnomathematics Exploration on Units and Calculus within a Village Farmer Community. *Journal of Physics: Conference Series, 1188*(1), 1-7.

Trujillo, O., Miranda, I., & De la Hoz, E. (2018). Los sistemas de medida en la comunidad Arhuaca: Su uso en distintos contextos. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 11*(2), 31-51.

Sección 3

ESTUDIOS SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Capítulo 9. Creencias de profesores de primaria y secundaria sobre la evaluación del aprendizaje de las matemáticas

Freddy Martínez García
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
José Gabriel Sánchez Ruiz
https://orcid.org/0000-0002-4306-1431
Universidad Nacional Autónoma de México, campus Zaragoza (México)

Resumen

El presente trabajo de investigación de tipo exploratorio busca encontrar evidencia que permita entender el papel que juegan las creencias de los profesores en la práctica docente, particularmente en el proceso de evaluación del aprendizaje de sus alumnos. Para ello se aplicó la Encuesta sobre Marco Conceptual de la Evaluación (EMCE) a un grupo de 96 profesores que imparten clases en primaria o secundaria. Se presentan los resultados obtenidos referentes a distintos aspectos sobre la evaluación: lo que se debe evaluar, por qué evaluar a los alumnos, los instrumentos utilizados para evaluar, la dificultad que plantea la evaluación en la clase de matemáticas y qué entienden por evaluación los profesores. Los resultados muestran creencias similares entre profesores de primaria y secundaria. *Grosso modo*, se encontró que los profesores tienen como objeto de evaluación el conocimiento y el trabajo que realizan los alumnos para obtener información sobre la promoción de éstos. Las creencias sobre la evaluación de los profesores se inclinan a la verificación del logro de objetivos de aprendizaje a partir de mediciones realizadas por instrumentos que muestran lo alcanzado por los estudiantes.

Palabras clave: creencias del profesor, creencias sobre la evaluación en matemáticas, creencias sobre las matemáticas.

Introducción

Este trabajo se sitúa en el seno del tema denominado conocimiento profesional y pensamiento del profesor de matemáticas, en el que se ubica el estudio de las creencias y las concepciones del profesor. Específicamente, lo enfocamos en caracterizar las creencias y las concepciones referentes a la evaluación del aprendizaje en la clase de matemáticas.

Al abordar la evaluación del aprendizaje se toca un tema complejo y polisémico que además puede ser controversial y contradictorio. Sin embargo, la evaluación no es un tema aislado, sino un tema central a toda acción educativa, y es una actividad que está muy presente en cualquier proceso formativo en la educación. La evaluación del aprendizaje está adscrita al pensamiento y a la práctica del profesor, y en éste, la concepción de la evaluación ha tenido significados y sentidos muy diferentes en distintos tiempos y ámbitos geográficos (Martínez, 2013).

La evaluación es un componente de la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje y por lo tanto es el docente quien toma las decisiones sobre qué es importante enseñar y evaluar, así como el motivo y la utilidad de esa evaluación (Contreras, 2010). Pero ¿cómo realiza esta selección? Este proceso de toma de decisiones sobre cómo ejercer la práctica docente está influido por las creencias y las concepciones de los docentes (Álvarez, 2007; Martínez, 2013; Prieto, 2008; Prieto y Contreras, 2008; Vázquez, 2001). Esto hace posible que exista una diversidad de formas de tratar la evaluación.

Por consiguiente, la presente investigación pretende identificar y examinar las creencias sobre la evaluación de profesores de educación básica (primaria y secundaria) que enseñan matemáticas. Entre los aspectos específicos que se analizan acerca de la evaluación están los siguientes: qué evaluar, para qué y con qué instrumentos evaluar, explicando parcialmente el pensamiento sobre una actividad que tiene gran incidencia en el actuar diario de los docentes.

Desde nuestro punto de vista, en el proceso de enseñanza-aprendizaje suele confundirse la evaluación con la asignación de una calificación en una asignatura. Por esos planteamos las siguientes preguntas: ¿cómo consideran la evaluación los docentes de primaria y secundaria? y ¿qué creencias de los profesores de primaria y secundaria predominan acerca de la evaluación "en la clase de matemáticas"?

Consideramos, en concordancia con Prieto y Contreras (2008), que las concepciones sobre la evaluación representan una base relevante para la práctica profesional de los profesores, puesto que operan como el fundamento central que guía sus prácticas. Solís (2015) sostiene que las creencias de los maestros acerca de la enseñanza, del aprendizaje y de sus estudiantes afectan sus procesos de planificación, instrucción y evaluación en el aula.

Marco conceptual

La investigación educativa ha centrado uno de sus intereses en el pensamiento del profesor y, concretamente, en la investigación sobre el conocimiento, las concepciones y las creencias de los docentes como factores claves de su práctica profesional y de sus acciones en el aula (Eccius & Lara, 2016; Gil, Rico & Fernández, 2002; Prieto, 2008). Estudiar las creencias y las concepciones de una persona es una forma de intentar entender su comportamiento y sus actitudes hacia ciertas temáticas. Puesto que las creencias son privadas y, por lo tanto, ocultas de la mirada del investigador, sólo se pueden inferir partiendo de las acciones, incluidas las respuestas a cuestionarios y entrevistas (Lerman, 2002; Pajares, 1992).

En cuanto al origen de las creencias de los maestros, coincidimos con la explicación de Martínez-Sierra, Valle-Zequeida, García-García & Dolores-Flores (2019): resultan de experiencias sociales sustanciales. Se pueden citar tres categorías de experiencia que influyen en su desarrollo: las experiencias personales, las experiencias relacionadas con la educación y la instrucción, y las experiencias con el conocimiento formal y profesional (p. 98).

Consideramos que los profesores son reflexivos y racionales, capaces de tomar decisiones y emitir juicios. Cuando practican la enseñanza, de acuerdo con Estévez-Nenninger, Valdés-Cuervo, Arreola-Olivarría, y Zavala-Escalante (2014), lo hacen con apoyo de un conjunto de creencias sobre sí mismos como docentes, sobre la actividad de enseñanza, el aprendizaje y los estudiantes. Por lo tanto, los profesores pueden compartir creencias y concepciones de su práctica en el aula. Esto hace que estas creencias y estas concepciones de los docentes sean un tópico de interés para los investigadores.

Según Furinghetti y Pehkonen (2002) el ámbito emocional es uno de los campos en los que se han centrado diferentes investigadores, por lo cual existen variaciones en los conceptos de creencias y concepciones utilizados en estudios en el campo de la educación matemática. Las concepciones pertenecen al mismo grupo de conceptos que las creencias. Incluso, al realizar la revisión de la literatura se puede observar que los temas de creencias y concepciones aparecen frecuentemente relacionados. Algunos autores como Thompson (1992) señalan que las diferencias entre ambos conceptos son mínimas y no vale la pena tenerlas en cuenta; otros, por el contrario, consideran importante delimitar bien el ámbito de ambos conceptos (*e.g.,* Ponte, 1992, citados en Mora & Barrantes, 2008).

Centrándonos en el ámbito educativo, las concepciones de los profesores constituyen una red de creencias, ideas y opiniones que influyen directamente en la forma en que éstos entienden el proceso de enseñanza-aprendizaje y en la forma en que interactúan diariamente con sus estudiantes (Coll & Remesal, 2009; Remesal, 2011; entre otros, citados en Hidalgo & Murillo, 2017).

Aun cuando las creencias y las concepciones definen la práctica profesional de los docentes, estas creencias no son conformadas de forma explícita y consciente, sino que surgen de la práctica y tienen la virtud de relacionarse con la práctica de una manera compleja, donde las experiencias de vida, el contexto en el que trabajan, sus experiencias previas como estudiantes del sistema educativo y las presiones sociales y políticas el contexto desempeñan un papel importante (Hidalgo & Murillo 2017; Ramos & Font, 2005).

La concepción de la evaluación y su práctica ha evolucionado debido a los cambios de paradigmas, a las nuevas teorías psicológicas y del aprendizaje, al renovado concepto de educación, así como por el desarrollo de las instituciones educativas. El interés evidente mostrado por la investigación en las concepciones sobre la evaluación parte de la premisa de que estas concepciones, al igual que otros tipos de creencias de los profesores, influyen significativamente en sus decisiones y en su actividad profesional (Brown, 2008). Por lo tanto, si queremos comprender cómo realizan la evaluación los profesores es fundamental conocer sus creencias y sus concepciones.

La evaluación del aprendizaje puede ser concebida de distintas formas. Existen múltiples concepciones de evaluación, las cuales suelen estar influenciadas por muchos factores, incluyendo el contexto y la cultura en la que trabajan los profesores, su formación previa o sus experiencias escolares vividas.

En este sentido, la forma en que evalúa un docente refleja, en parte, sus ideas implícitas, construidas en interacción con otros sujetos, sobre cómo entiende la evaluación. Conocer las distintas direcciones que han tomado las investigaciones centradas en las concepciones sobre evaluación permite aprender de ellas. Al respecto, varios autores han realizado algunos planteamientos. Por ejemplo, según Gil (2000), en la evaluación se concreta una serie de reglas sociales de validación que tienen que ver con las disciplinas del conocimiento, la forma en que esas prácticas se concretan en la escuela y los fines de socialización que sirven de meta para la actividad escolar.

Moreno (2016) destaca que la evaluación debe servir para dos propósitos: informar para la toma de decisiones y motivar el aprendizaje. Por su parte, Pimienta (2008) considera que evaluar implica enjuiciar mediante un proceso sistemático de recopilación de datos y de comparación con unos criterios (o normas) claramente establecidos para facilitar la toma de decisiones.

De la Orden (1997), por su parte sostiene que la evaluación es un proceso sistemático de recogida, análisis e interpretación de información relevante y fiable para describir cualquier faceta de la educación y formular un juicio de valor sobre su adecuación a un criterio, que represente un valor aceptado, como base para la toma de decisiones oportunas.

La Secretaría de Educación Pública ha considerado la evaluación de diferentes maneras. Al respecto, en el documento *Aprendizajes clave para la educación integral: plan y programas de estudio para educación básica* (SEP, 2017) se describen dos tipos de evaluación:

> Evaluación del aprendizaje, conceptualizada como la emisión de un juicio basado en evidencia de las capacidades, habilidades y conocimientos del estudiante. Los resultados de la evaluación permiten tomar decisiones sobre los mejores modos de continuar un proceso educativo.
>
> Evaluación formativa, la cual consiste en una evaluación permanente de los avances del estudiante a través de la obtención variada de evidencias. Se considera que es parte del trabajo cotidiano del aula y que es útil para orientar y tomar las decisiones más oportunas para obtener el máximo logro de aprendizaje (p. 123).

El concepto de evaluación ha ido evolucionando y adaptándose de acuerdo con el proceso de enseñanza-aprendizaje; sin embargo, las creencias que usualmente poseen los profesores sobre la función de la evaluación remiten constantemente a la concepción sancionadora o de control (Gil, 2000; Martínez, 2013).

El interés por la evaluación en la educación ha aumentado en los últimos años. Si bien esta área de investigación tiene amplias implicaciones para la política y la práctica en las instituciones, poco se sabe acerca de las creencias de los profesores sobre los diferentes aspectos de la evaluación.

De acuerdo con Opre (2015), el interés en el estudio de las creencias de evaluación de los docentes es relativamente reciente y se produce debido al cambio de paradigma en el enfoque y la comprensión de la enseñanza y el aprendizaje.

Con base en lo mencionado arriba es necesario realizar estudios acerca de las creencias y las concepciones de los profesores acerca de la evaluación; además, porque en México ha sido un tema poco investigado (Dolores, 2016; Dolores & García, 2016; Estévez-Nenninger *et al.,* 2014; Martínez-Sierra *et al.,* 2019; entre otros).

Sostenemos, en concordancia con Prieto y Contreras (2008), que no es posible considerar la evaluación como un proceso neutro, no sólo por la influencia que tiene en la calidad de los procesos formativos y por el impacto que representa en los estudiantes, sino porque constituye un reflejo de las concepciones de los profesores, entre las que se ubican sus creencias y sus conocimientos especializados.

Método

La investigación realizada es de tipo exploratorio-descriptivo, de corte metodológico mixto.

Participantes

Participaron 96 profesores, de los cuales 50 laboran en educación primaria y 46 en educación secundaria. Los docentes fueron seleccionados mediante el procedimiento de disponibilidad de escuelas cercanas a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, como las secundarias técnicas números 42, 63 y 65, así como las primarias Cadete Juan Escutia y Blas Chumacero Sánchez. Las características de los participantes en cada grupo fueron las siguientes:

Profesores de primaria

Todos los participantes del grupo de primaria habían realizado estudios orientados al área de la educación, principalmente en el nivel de licenciatura. La distribución específica se muestra en la tabla 1.

TABLA 1. *Distribución en frecuencia y porcentaje de los profesores de primaria*

Formación profesional	*Frecuencia*	*Porcentaje*
Licenciatura en educación primaria	35	70
Licenciatura en educación básica	7	14
Formación pedagógica	5	10
Licenciatura en ciencias de la educación	2	4
Licenciatura en educación media superior	1	2

Profesores de secundaria

Los profesores que imparten la asignatura de matemáticas en secundaria tienen diferentes tipos de formación y no todos son especialistas en la materia (véase tabla 2).

TABLA 2. *Distribución en frecuencia y porcentaje de los profesores de secundaria*

Formación profesional	*Frecuencia*	*Porcentaje*
Licenciatura en matemáticas	12	26.1
Ingeniería	8	17.4
Licenciaturas diferentes a matemáticas	7	15.2
Con orientación en educación	19	41.3

Los 46 profesores de secundaria participantes contaban con una formación profesional variada, por lo cual los agrupamos de la siguiente forma:

- Licenciaturas en matemáticas o en ingenierías (diseño gráfico, administración, estadística, ingeniería en el área industrial, en alimentos, en ciencias de la computación y en bioquímica).
- Licenciaturas diferentes a matemáticas (educación secundaria con especialidad en español, en español, educación secundaria con especialidad en física).
- Con orientación en educación (educación primaria, educación secundaria con especialidad en matemáticas, educación matemática, y profesores normalistas).

Instrumentos

Para explorar las creencias y las concepciones de los profesores se utilizó el cuestionario Encuesta sobre Marco Conceptual de la Evaluación (EMCE) propuesto por Gil, Rico y Fernández (2002). La encuesta nos permitió evaluar el sistema de creencias del profesorado de primaria y secundaria sobre la evaluación en matemáticas. La EMCE, en su versión original, que plantea evaluar sin distinguir creencias y concepciones, está organizada de la siguiente manera:

- Los ítems 1 a 5 indagan acerca de cuestiones relativas a la evaluación en matemáticas. Los ítems 1 y 2 se refieren a objetivos y fines de la evaluación, y los ítems del 3 al 5 cuestionan sobre aspectos prácticos y técnicos.
- Los ítems del 6 al 9 buscan información más específica sobre la evaluación. El 6, respecto a objetivos y dificultades de la evaluación en matemáticas, y los 7, 8 y 9 acerca de propuestas para evaluar elementos del currículo de matemáticas.
- Finalmente, el ítem 10 recoge información no considerada en los ítems anteriores.

La escala original que se utiliza en la EMCE para cada opción de respuesta, en cada ítem, consiste en un puntaje de 1 a 9, donde 1 indica *muy en desacuerdo*, 9 *muy de acuerdo* y 5 *indiferente*. En este trabajo, partiendo de la escala original y conservando las etiquetas para los valores extremos y el intermedio, se complementaron las etiquetas para los valores que los autores de la ECME no especificaron. De este modo, la escala definitiva utilizada en el instrumento fue la siguiente: 1 *muy en desacuerdo*, 2 *bastante en desacuerdo*, 3 *algo en desacuerdo*, 4 *en desacuerdo*, 5 *indiferente*, 6 *de acuerdo*, 7 *algo de acuerdo*, 8 *bastante de acuerdo* y 9 *muy de acuerdo*.

En este trabajo únicamente se analizan las respuestas a los siguientes ítems, a los que se agregó la frase "en la clase de matemáticas":

- Ítem 1. ¿Qué debe ser objeto de evaluación en la clase de matemáticas? En evaluaciones es prioritario valorar:
- Ítem 2. ¿Por qué evaluar a los alumnos en la clase de matemáticas? Se evalúa para:
- *Ítem 4.* ¿Qué instrumentos se deben utilizar para evaluar en la clase de matemáticas? Para evaluar hay que utilizar:
- Ítem 6. ¿Qué dificultades plantea la evaluación en matemáticas? En matemáticas, las dificultades de la evaluación son debidas a:

La figura 1 muestra un ejemplo de uno de los ítems con sus opciones de respuesta y la escala para cada una de estas opciones.

También se incluyeron las siguientes preguntas abiertas:

FIGURA 1. Ítem 1 del *ECME con opciones de respuesta y escala de valoración*

1.- *¿Qué debe ser objeo de evaluación en la clase de matemáticas?* *En evaluaciones es prioritario* VALORAR*:*									
1. El conocimiento adquirido por los alumnos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2. El trabajo realizado por los alumnos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3. La actitud y el interés de los alumnos hacia la asignatura	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4. Las capacidades de los alumnos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5. La conducta de los alumnos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6. El currículo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7. La labor del profesor	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8. La madurez y formación del alumno	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9. Los contenidos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10. Los logros alcanzados respecto de los objetivos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11. Los medios y materiales	1	2	3	4	5	6	7	8	9
12. Las instituciones y el sistema educativo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Otra:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Otra:	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- ¿Para usted qué es la evaluación? (de forma general)
- ¿Para usted qué es la evaluación en la clase de matemáticas?

Con estos ítems y preguntas se busca explorar la concepción de la evaluación de los profesores, así como las creencias que guían esta práctica.

Análisis

En los dos grupos de profesores se realizó un análisis cuantitativo organizado en cuatro apartados: el primero, basado en procedimientos de estadística descriptiva: la media aritmética; las medidas de variabilidad: rango, valor mínimo y valor máximo y desviación típica (DS); en el segundo, para examinar la significancia de las diferencias entre los resultados obtenidos en los profesores de primaria respecto de los de secundaria, se realizó un análisis de varianza mediante la prueba estadística de Friedman en la segunda etapa. En el tercero, se llevó a cabo una prueba *post hoc* para identificar las diferencias estadísticas significativas entre las opciones de respuesta. Por último, se presenta la información obtenida mediante los ítems de respuesta abierta que se agregaron a la ECME. A continuación, se ofrecen los resultados obtenidos en cada uno de los análisis realizados.

Análisis descriptivo

Se analizaron las respuestas de cada grupo de profesores en cada uno de los ítems de la ECME. Las opciones de respuesta de cada ítem se muestran en orden decreciente, según el valor de la media aritmética obtenido. La media se calculó con los puntajes que asignaron los profesores a cada opción de respuesta. Cuando el valor de la media era el mismo en dos o más opciones de respuesta se ordenaron con base en el valor de la desviación típica, del menor al mayor. A continuación se presentan sucintamente los resultados obtenidos, solamente en algunos de los ítems del ECME.

Con respecto a lo que indaga el ítem 4, es decir, qué instrumentos se deben utilizar para evaluar, se encontró en los profesores un amplio consenso sobre una de las opciones. Ambos grupos de profesores, de primaria y secundaria, respondieron que lo mejor es utilizar exámenes, observaciones y actividades de aula; sin embargo, esta creencia se observó más en el grupo de profesores de secundaria (véase tabla 3).

Ítem 4. ¿Qué instrumentos se deben utilizar para evaluar en la clase de matemáticas? Para evaluar hay que utilizar:

TABLA 3. *Estadísticos descriptivos: profesores de primaria*

Opción de respuesta	*Rango*	*Mínimo*	*Máximo*	*Media*	*DS*
1. Exámenes, observaciones y actividades de aula	8	1	9	8.06	1.80
2. Test estandarizados y pruebas generales	8	1	9	6.32	2.10

Mientras que para la opción de respuesta que menciona tests estandarizados y pruebas generales se produjo una valoración menor. Podemos destacar que hay aceptación entre los profesores de primaria y secundaria en cuanto a los instrumentos que se deben usar al evaluar en clase de matemáticas (tablas 3 y 4).

TABLA 4. *Estadísticos descriptivos: profesores de secundaria*

Opción de respuesta	*Rango*	*Mínimo*	*Máximo*	*Media*	*DS*
1. Exámenes, observaciones y actividades de aula	4	5	9	8.52	1.00
2. Test estandarizados y pruebas generales	8	1	9	6.15	2.05

Análisis de varianza

Como ya se mencionó, para examinar si existían diferencias estadísticamente significativas en los resultados obtenidos en los profesores de cada grupo, de primaria y secundaria, se realizó un análisis de varianza con la prueba estadística de Friedman para cada pregunta de la ECME. Este estadístico se utilizó cuando las respuestas de los profesores se distribuían en varias opciones de respuesta. En caso de que las respuestas se hubieran concentrado solamente en dos de las opciones de respuesta, se aplicó la prueba U de Mann-Whitney, como en los ítems 3 y 4, para verificar la significancia entre respuestas.

Los resultados muestran que en los ítems 1 y 6 existen diferencias estadísticamente significativas entre las opciones de respuesta elegidas por los profesores para responder dichos ítems. El ítem 4 no se muestra ya que sólo tenía dos categorías de respuesta y una de ellas difería significativamente de la otra, comprobando lo que se mostraba en el análisis descriptivo de este ítem. Mientras que en el ítem 2 sólo el grupo de secundaria muestra diferencias significativas (véase tabla 5).

Análisis estadístico *post hoc*

Los resultados del análisis mostrado en el apartado anterior determinaron los ítems que se someterían a un tercer análisis, el cual consistió en aplicar

TABLA 5. *Análisis de las diferencias entre las distintas opciones de respuesta en los ítems de la ACME en el grupo de profesores de primaria y secundaria*

Ítem	*Profesores de primaria*	*sig.*	*Profesores de secundaria*	*sig.*
1	(F = 4.01, gl = 11/588)	$p < .001$	(F = 8.38, gl = 11/540)	$p < .001$
2	(F = 2.54, gl = 2/147)	$p > .05$	(F = 10.48, gl = 2/136)	$p < .001$
6	(F = 2.99, gl = 3/196)	$p < .05$	(F = 4.77, gl = 3/180)	$p < .005$

una prueba *post hoc* (HSD de Tukey) para identificar entre qué opciones de respuestas, en cada ítem, había diferencias estadísticamente significativas y, principalmente, para identificar la creencia más destacada en lo que se evaluaba en cada ítem. No se aplicó en los ítems con dos opciones de respuesta, ni tampoco en los que no se encontraron diferencias significativas.

En los bloques de resultados, los cuales son significativos con $p < .05$, se omitieron los resultados de algunas opciones de respuestas significativas para evitar redundancias en la lista de resultados. Por ejemplo, si se reporta la diferencia significativa de la opción 4 con la 6, se omite la de 6 con 4, porque los resultados son los mismos. También se omitieron las opciones en las que no hubo diferencias significativas.

Los resultados obtenidos con la prueba *post hoc* HSD de Tukey se presentan a continuación, indicando sus opciones de respuesta, con el propósito de facilitar la lectura de los resultados. Como ejemplo, se presenta el ítem 6.

Ítem 6: "¿Qué dificultades plantea la evaluación en matemáticas?"

Opciones de respuesta para el ítem	
1. La insuficiente preparación del profesor	*3.* El instrumento utilizado
2. El alumno	*4.* La complejidad del proceso

La creencia que se destaca en este ítem en ambos grupos es la insuficiente preparación del profesor, contrariamente a lo indicado por sus valoraciones en el análisis descriptivo previamente realizado (véanse tablas 6 y 7).

Tabla 6. *Resultados en los profesores de primaria*

Opción	***Diferencia significativa con la opción***
1	4

Tabla 7. *Resultados en los profesores de secundaria*

Opción	***Diferencia significativa con la opción***
1	3, 4

Con base en lo anterior, se puede concluir que los profesores tienen arraigadas o más consolidadas algunas creencias que otras, como se refiere en la literatura. También se observa que los profesores tienen más de una creencia sobre la evaluación, pero con diferente grado de firmeza.

Análisis de las respuestas en los ítems de respuesta abierta

En relación con el tema "¿cómo consideran los docentes la evaluación?" se formularon dos preguntas que se incorporaron a la ECME:

- ¿Para usted qué es la evaluación? (de forma general)
- ¿Para usted qué es la evaluación en la clase de matemáticas?

Las respuestas de los dos grupos de profesores se sometieron a un análisis de contenido. utilizamos las abreviaciones PP para referirnos a los profesores de primaria y PS para referirnos a los profesores de secundaria como identificadores.

Con respecto a la primera pregunta, se encontraron diferentes respuestas. Pero se observa una tendencia a considerar que la evaluación es una forma de medir el nivel de los logros y el avance de los alumnos y que esta medición puede ser cualitativa o cuantitativa. Un ejemplo de lo anterior está en un fragmento de la respuesta de los profesores PP-85 y PS-39:

PP-85: Es un proceso que tiene por objeto medir los aprendizajes, habilidades, destrezas y la forma cualitativa del propio alumno…

PS-39: Es una forma de medir o valorar ciertas características que posee una persona, un grupo de personas, uno o varios objetos, un servicio, etc. Por ejemplo, actitudes, conocimientos, desempeño o rendimiento, etcétera…

Otros profesores ven la evaluación como un proceso que les permite conocer el avance de los alumnos referente a los objetivos; reflejo de lo cual son los siguientes testimonios:

PS-44: Es el proceso de recabar información acerca de los avances programáticos…

PP-58: El proceso que mide el avance del aprendizaje de los alumnos…

También hubo profesores, como PP-61, que indicaron que la evaluación les permite emitir un juicio de valoración que puede ser cuantitativo o cualitativo respecto de un objetivo:

PP-61: La evaluación implica emitir un juicio de valor, ya sea cualitativo o cuantitativo, para analizar el nivel de logro de los estudiantes…

La respuesta de PS-55 es muy similar pues menciona algunos aspectos que deben tomarse en cuenta para evaluar:

PS-55: Es la valoración de conocimientos, actitudes, habilidades y destrezas que desarrolla un individuo en los objetivos establecidos para su logro...

Otros profesores creen que la evaluación es un proceso en el que están involucrados diferentes factores que permiten tener retroalimentación, la cual consideran parte del trabajo diario. Por ejemplo, los dos siguientes participantes:

PP-91: Es un proceso cuyo enfoque considera la evaluación como parte del trabajo cotidiano del aula. Se utiliza principalmente para orientar el proceso

> enseñanza-aprendizaje y tomar decisiones oportunas que beneficien a los estudiantes…
>
> PS-53: Sirve para retroalimentar a los alumnos en los aprendizajes que carecen. A partir de la evaluación se modifica para que los alumnos aprendan significativamente…

Las respuestas de los profesores acerca de la evaluación coinciden con lo que plantean Vázquez (2001) y Prieto (2008), confirmando que tienen la creencia de que la evaluación consiste en la verificación del logro de objetivos de aprendizaje a partir de mediciones realizadas por instrumentos.

Por otra parte, acerca de la segunda pregunta: ¿qué es la evaluación en la clase de matemáticas?, se observaron coincidencias entre las respuestas de los dos grupos de profesores. Entre las respuestas que caracterizan la creencia de que la evaluación consiste en una forma de medir el desempeño y el logro del alumno de manera cualitativa o cuantitativamente están las de los siguientes participantes:

> PS-60: Medir el logro de los alumnos en el área de matemáticas y saber si ellos han adquirido los conocimientos…
>
> PP-112: Es un medio para medir la capacidad intelectual de los alumnos y las alumnas…

Se observaron otras respuestas cuyo contenido refería que la evaluación es una forma de identificar cuánto aprendió el alumno respecto de los objetivos, como las de los siguientes participantes:

> PS-100: Un instrumento que permite conocer los avances y conocimientos del alumno…
>
> PP-70: Es el registro de avances o deficiencias que se pueden presentar en la asignatura y así modificar si es necesaria nuestra labor de enseñanza…

También se expresó, en PS-54 y PP-61, la creencia referente a que la evaluación les permite a los docentes valorar las capacidades y el conocimiento del alumno, asignando un valor numérico a dichos conocimientos:

> PS-54: Emitir un valor, de acuerdo con los conocimientos adquiridos por los educandos, con base en los contenidos, perfiles y parámetros que el plan de estudios y los programas de la materia nos solicita que nuestros estudiantes logren al concluir la secundaria…
>
> PP-61: Es la valoración que se realiza a cada alumno para conocer su nivel de desempeño conceptual y procedimental…

En las respuestas de los profesores se puede advertir la creencia alusiva a que la evaluación es un proceso que les permite medir, valorar e identificar los conocimientos de los alumnos respecto de unos objetivos y esto puede darse de manera cuantitativa o cualitativamente. El análisis de las concepciones sugiere que aun cuando algunos profesores conocen el término de *evaluación formativa* no la aplican de manera correcta.

Según Rosales (2014), para admitir que los profesores consideran que están evaluando de manera formativa, deben realizar la evaluación durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, con el propósito de localizar las deficiencias de los alumnos cuando aún existe la posibilidad de remediarlas e introducir sobre la marcha rectificaciones y tomar las decisiones pertinentes y adecuadas para optimizar el proceso de logro del éxito por el alumno.

La evidencia debe ser utilizada efectivamente para adaptar la enseñanza de modo que responda mejor a las necesidades de aprendizaje de los alumnos (Moreno, 2016). Retomando el planteamiento de la SEP (2017), donde hace una diferenciación entre evaluación formativa y la evaluación del aprendizaje, y recomienda a los profesores utilizar la evaluación formativa, podemos decir, de acuerdo con los resultados, que aun cuando algunos profesores conocen el término de *evaluación formativa*, la evaluación más utilizada por los profesores es una evaluación del aprendizaje y parecen llevarla a cabo al final del curso cuando los tiempos ya son muy cortos y ya no pueden modificar su práctica.

Conclusiones

La presente investigación permitió indagar y recopilar información para caracterizar las creencias y las concepciones de profesores de primaria y secundaria sobre la evaluación. En cuanto a los ítems que guiaron la investigación, presentamos en resumen lo que se encontró, mencionando los resultados para los dos grupos de profesores.

Sobre la pregunta: "¿qué creencias de los profesores predominan acerca de la evaluación?", los profesores de primaria consideran como "objeto de evaluación" el conocimiento adquirido y el trabajo realizado por los alumnos. De acuerdo con los resultados del análisis efectuado, no existen diferencias estadísticamente significativas entre las opciones referentes a la pregunta: "¿para que evalúan a sus alumnos?" Los profesores consideran que deben ser ellos y no otros maestros los que realicen este proceso o, incluso, hacer partícipe al alumno de esta etapa. Principalmente, "para evaluar utilizan" exámenes, trabajos y la observación. La creencia que domina en relación con la pregunta "¿a qué se deben las principales dificultades en la evaluación" consiste en la insuficiente preparación del profesor seguida de la complejidad del proceso.

En los profesores de secundaria las creencias que están más arraigadas en cada una de las cuestiones de la evaluación son las siguientes: que el "objeto de evaluación" es el conocimiento adquirido y el trabajo realizado por los alumnos; "¿para que evalúan a sus alumnos?", para obtener información sobre los alumnos y su aprendizaje y poder tomar decisiones sobre su promoción y orientación. Principalmente, "para evaluar utilizan" exámenes, observaciones y actividades de aula. Los profesores creen que la principal "dificultad que tiene la evaluación" es la insuficiente preparación del profesor y el instrumento utilizado.

Como se mencionó inicialmente, los profesores tienden a disponer de diferentes creencias y concepciones sobre la evaluación, pero siempre identificándola como la verificación del logro de objetivos de aprendizaje a partir de mediciones realizadas por instrumentos que muestran el logro alcanzado por los alumnos (Prieto, 2008; Vázquez, 2001). Las creencias que usualmente poseen los profesores sobre la función de la evaluación remiten constantemente a la concepción sancionadora o de control (Gil, 2000; Martínez, 2013).

Los resultados obtenidos evidencian que los profesores manifiestan creencias que visualizan al aprendizaje y al alumno como elementos centrales de la evaluación, permitiéndoles obtener información sobre el aprendizaje de sus alumnos, lo cual es normal en la educación pues los estudiantes y el aprendizaje son los entes típicamente sujetos de la evaluación. De acuerdo con la evidencia encontrada, en los profesores prevalece una creencia de la evaluación del aprendizaje como una acción de cuantificar el conocimiento adquirido por el estudiante, haciendo referencia a una medición o un cálculo matemático. Esto podría deberse, como mencionan Estévez-Nenninger, Valdés-Cuervo, Arreola-Olivarría y Zavala-Escalante (2014), a que el trabajo de los profesores y su práctica puede estar influida por diferentes factores acerca del pensamiento de los docentes respecto del aprendizaje y la enseñanza, impactando en sus decisiones y en sus prácticas didácticas ya que, en gran medida, lo que los docentes realizan es consecuencia de lo que piensan.

Los resultados de esta investigación son muy similares a los reportados por Gil Rico y Fernández (2002). En este trabajo se constató que los enunciados planteados en el cuestionario fueron aceptados por los profesores y valorados como alternativas posibles. Asimismo, se pudo establecer la presencia de creencias sobre la evaluación en matemáticas. Aun cuando el estudio de estos autores se llevó a cabo en cuatro ciudades de España con 166 profesores, específicamente de secundaria, se evidencia una preocupación diversificada por el alumno y por el currículo como sujetos de la evaluación en matemáticas y se establecen distintos criterios para determinar el objeto de la evaluación. También se destaca que los fines de la evaluación son tomar decisiones y controlar el proceso de aprendizaje, se rechazan las pruebas estandarizadas y se priorizan los criterios para establecer el objeto de la evaluación. Si bien existe variabilidad entre las creencias frecuentemente se observa predominancia de una creencia en cada ítem.

Cabe mencionar que nuestros resultados señalan la necesidad de abrir nuevas líneas de investigación acerca del tema, ya que es necesario explicar, entre otros aspectos, la relación de las creencias con la formación pedagógica y la experiencia de los profesores. Puesto que en México los estudios sobre esta temática sobre todo se han llevado a cabo en profesores de educación básica, como mencionan Estévez-Nenninger *et al.* (2014), juzgamos interesante realizar un estudio con base en la interrogante: ¿existe diferencia entre las concepciones de profesores con estudios de maestría en educación matemática en comparación con profesores que no tienen una formación académica especializada en la enseñanza de las matemáticas? Asimismo, podrían realizarse estudios enfocados en responder preguntas derivadas del interés de conocer si estas creencias pueden diferir en función del tipo de población participante en el estudio y de características como antigüedad docente, formación académica y género, entre otras. El presente trabajo es descriptivo e interpretativo y no abordó la conexión entre las creencias y las concepciones sobre la evaluación y el discurso del profesor en su práctica. También consideramos de interés conducir trabajos futuros mediante estudios de caso con instrumentos que permitan una exploración más libre sobre el discurso del profesor.

Referencias

Álvarez, J. M. (2007). Evaluación: Entre la simplificación técnica y la práctica crítica. *Novedades Educativas, 18*(195), 8-10.

Brown, G. T. L. (2008). *Conceptions of Assessment: Understanding What Assessment Means to Teachers and Students*. Auckland: Nova Science.

Contreras, G. (2010). Diagnóstico de dificultades de la evaluación del aprendizaje en la universidad: un caso particular en Chile. *Educación y Educadores, 13*(2), 219-238.

De la Orden, A. (1997). Evaluación y optimización educativa. En H. Salmerón (Ed.), *Evaluación educativa* (pp. 13-28). Grupo Editorial Universitario.

Dolores, F. C. (2016). La evaluación según las creencias de profesores de matemática. *Revista Tlamati, 7*(2), 31-41.

Dolores, F., & García, J. (2016). Concepciones de profesores de matemáticas sobre la evaluación y las competencias. *Revista de Didáctica de las Matemáticas. Números, 92,* 71-92.

Eccius Wellmann, C., & Lara-Barragan, A. (2016). Hacia un perfil de ansiedad matemática en estudiantes de nivel superior. *Revista Iberoamericana de Educación Superior, 7*(18), 119-129.

Estévez-Nenninger, H., Valdés-Cuervo, A., Arreola-Olivarría, G., & Zavala-Escalante, G. (2014). Creencias sobre enseñanza y aprendizaje en docentes universitarios. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación, 6*(13), 49-64.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking Characterizations of Beliefs. En G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 39-58). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic.

Gil, F. (2000). *Marco conceptual y creencias de los profesores sobre la evaluación en matemática*. Universidad de Almería.

Gil, F., Rico, L., & Fernández A. (2002). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre evaluación en matemáticas. *Revista de Investigación Educativa, 20*(1), 47-75.

Gil, F. & Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(1), 27-47.

Hidalgo, N., & Murillo, F. J. (2017). Las concepciones sobre el proceso de evaluación del aprendizaje de los estudiantes. *REICE: Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 15*(1), 107-128.

Lerman, S. (2002). Situating Research on Mathematics Teachers' Beliefs on Change. En G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 233-243). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic.

Martínez, N. (2013). Las creencias de los profesores universitarios sobre evaluación del aprendizaje. *Diálogos, 7*(12), 45-66.

Martínez-Sierra, G., Valle-Zequeida, M., García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2019). "Las matemáticas son para ser aplicadas": Creencias matemáticas de profesores mexicanos de bachillerato. *Educación Matemática, 31*(1), 92-120.

Mora, F., Barrantes H. (2008). ¿Qué es matemática?: Creencias y concepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 3*(4), 71-81.

Moreno, O. T. (2016). *Evaluación del aprendizaje y para el aprendizaje: Reinventar la evaluación en el aula*. México: Universidad Autónoma Metropolitana.

Opre, D. (2015). Teachers' Conceptions of Assessment. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 209,* 229-233.

Pajares, M.E. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning up a Messy Construct. *Review of Educational Research, 62*(3), 307-332.

Pimienta, P. J. H. (2008). *Evaluación de los aprendizajes*. México: Pearson Educación.

Prieto, M. (2008). Creencias de los profesores sobre evaluación y efectos incidentales. *Revista de Pedagogía, 29*(84), 123-144.

Prieto, M., & Contreras, G. (2008). Las concepciones que orientan las prácticas evaluativas de los profesores: Un problema a develar. *Estudios Pedagógicos, 34*(2), 245-262.

Ramos, B. A., & Font, V. (2005). Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales: El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. *Revista de Educación, 338,* 309-345.

Rosales, M. (2014). *Proceso evaluativo: Evaluación sumativa, evaluación formativa y assesment su impacto en la educación actual.* Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Buenos Aires, Argentina.

Secretaría de Educación Pública (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral: plan y programas de estudio para educación básica*. México: SEP.

Solís, C. (2015). Creencias sobre enseñanza y aprendizaje en docentes universitarios: Revisión de algunos estudios. *Propósitos y Representaciones, 3*(2), 227-260.

Thompson, A. G. (1992). *Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research*. Nueva York: MacMillan.

Vázquez, A. (2001). Las evaluaciones del sistema educativo. *Educación y Cultura, 14,* 247-274.

Capítulo 10. Las videograbaciones como recurso para la formación docente temprana: Análisis de su uso para fomentar la reflexión sobre la práctica en el aula

Nicolás Fernández Coronado
https://orcid.org/0000-0002-9613-3144
Elizabeth H. Arredondo
Isaac Imilpán Rivera
https://orcid.org/0000-0001-5882-5505
Jaime I. García-García
https://orcid.org/0000-0002-8799-5981
Universidad de Los Lagos (Chile)

Resumen

En este estudio se aborda la inserción de un grupo de profesores de matemáticas en formación a una secuencia de aprendizaje que tiene como objetivo provocar instancias de reflexión temprana e introductorias a la práctica docente, apoyada en el uso de videograbaciones de la gestión de profesores en servicio, facilitando un espacio donde sus saberes disciplinares, didácticos y didácticos-disciplinares pueden converger. Para ello, nos apoyamos en el constructo de *mirar profesionalmente* para observar y analizar la reflexión desarrollada por una pareja de profesores en formación chilenos de pedagogía en matemáticas. Para desarrollar una reflexión de la práctica, estos sujetos hicieron uso de la observación de videograbaciones y de la *teoría de las situaciones didácticas* de Guy Brousseau. Entre los resultados de este estudio se observa la utilidad del uso de videograbaciones para fomentar la reflexión docente y como instrumento de mediación que permite articular la teoría didáctica y matemática con la práctica docente. En el tipo de destrezas que se evidencian al *mirar profesionalmente* los profesores en formación logran identificar elementos importantes de la situación de enseñanza, en particular una serie de paradojas didácticas de la gestión del profesor; sensibilizarse frente a las necesidades del contexto en el que se desarrolla la videograbación y hablar del tipo de interacciones que se están produciendo en el aula, y establecer conexiones entre los sucesos analizados, la teoría asumida para desarrollar el análisis y propuestas de mejora.

Palabras clave: práctica temprana, formación docente, práctica reflexiva, profesores en formación, videograbación de aula.

Introducción

En las últimas décadas, la formación del profesorado ha sido un tema predominante en la investigación en matemática educativa por estar directamente relacionada con la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, evidenciable en elementos como el material pedagógico (generado o seleccionado), el discurso en el salón de clases, la gestión de clases, las tareas puestas en práctica y las secuencias de aprendizaje, y el papel esencial del profesor en el salón de clases (Montiel, 2010). En particular, parte de la investigación sobre el profesor trata de las necesidades que debe cumplir con el propósito de asegurar un proceso de enseñanza-aprendizaje significativo en el salón de clases, siendo algunas de éstas: la reflexión inicial y continua de la práctica docente; la unificación de la teoría, la práctica y la investigación; la conexión de ideas matemáticas para la enseñanza; el acercamiento temprano al salón de clases, y la continua actualización de los programas de formación (Montiel, 2010; Solar *et al.,* 2014). Respecto de esta línea de investigación, en el contexto chileno se han identificado debilidades en el proceso de formación de profesores que se relacionan con los siguientes aspectos: la desarticulación general entre los cursos matemáticos y aquellos de naturaleza didáctica o pedagógica, la escasez de cursos de didáctica, y la necesidad de instituir prácticas tempranas y espacios constantes de reflexión (Pino-Fan *et al.,* 2018).

Recientes líneas de investigación señalan a las videograbaciones como un material de apoyo con potencial para la resolución de esas debilidades que permiten generar espacios de reflexión temprana y la puesta en práctica de la teoría didáctica (Sherin & Han, 2004). En particular, se identifica que el uso de material videograbado, dentro de un marco adecuado de trabajo, permite la observación de los distintos fenómenos áulicos, su profundiza-ción y su socialización. Esto conlleva una mayor interacción entre los integrantes del grupo de estudio y su familiarización con lo que sucede en el salón de clases; además, se abordan los saberes disciplinares y didácticos involucrados desde la articulación de la enseñanza instructiva y el entorno que presentan las videograbaciones (Seidel *et al.,* 2013), fomentando habilidades esenciales como el análisis y la reflexión sobre el razonamiento de los estudiantes, la discusión respecto de conceptos o teorías y su aplicación, y los aspectos sociales que se identifican en el aula. Además, se tiene la ventaja de que se puede repasar o pausar momentos grabados y realizar una transcripción precisa y completa (Llinares *et al.*, 2008; Santagata *et al.,* 2007).

En este capítulo se realiza una aproximación a un entorno de aprendizaje diseñado con base en el uso videograbaciones por profesores de matemáticas en formación para *mirar profesionalmente*. Para el desarrollo de esta competencia, el profesor en formación enlaza la observación, como método de análisis, y la *teoría de situaciones didácticas* (TSD) de Guy Brousseau (2007), como marco teórico que le permite reflexionar e identificar situaciones presentes en un salón de clases de matemáticas.

Antecedentes

A continuación se presentan algunos antecedentes que relacionan aspectos clave de la formación docente con el uso de videograbaciones.

Llinares *et al.* (2008) señalan que el conocimiento del profesor de matemáticas posee diversas dimensiones enfocadas en la enseñanza; entre ellas, las matemáticas adecuadas para el aprendizaje (el conocimiento disciplinar situado en el salón de clases), el conocimiento sobre los aprendices (la forma en que piensan las matemáticas) y la enseñanza realizada en distintos contextos. Lo anterior involucra la interpretación y la gestión de situaciones de enseñanza, así como la capacidad de usar instrumentos técnicos y conceptuales para construir nuevo conocimiento desde la práctica. Zapatera (2015) identifica como una habilidad central *mirar profesionalmente*, que corresponde a centrar la atención en fenómenos importantes y considerarlos para la toma de decisiones en el salón de clases, situando la atención en los siguientes aspectos: *(1)* identificar lo significativo y sus aspectos importantes, *(2)* utilizar los conocimientos para tomar decisiones sobre las interacciones presentes y *(3)* conectar aspectos específicos con principios teóricos de la didáctica.

Abordando estas dimensiones, las videograbaciones permiten analizar fenómenos que ocurren en el salón de clases durante la resolución de problemas matemáticos por parte de los estudiantes; facilitan una mayor comprensión de la matemática escolar y del potencial que tienen distintos tipos de tareas y procedimientos para el aprendizaje, así como la interpretación del razonamiento matemático de los estudiantes y la toma de decisiones del profesor. Por ello, a lo largo de los últimos 10 años ha aumentado el uso de las videograbaciones para la observación y el análisis de situaciones en el aprendizaje por parte de profesores en formación.

Gaudin y Chaliès (2015) realizan una revisión sistemática de la literatura y conceptualizan aspectos ventajosos del uso de videograbaciones:

- *La naturaleza activa y perceptiva de los procesos involucrados.* Los profesores realizan procedimientos perceptivos con un enfoque profesional mediante la percepción sensorial o la percepción cognitiva. Éstos poseen dos componentes clave que se relacionan entre sí y que son esenciales para la interpretación de lo que ocurre en el salón de clases y para la toma formativa de decisiones; esos componentes son la atención selectiva y el razonamiento basado en el conocimiento. El primero, también conocido con términos como *call out* (Frederiksen, 1992) y *noticing* (Van Es & Sherin, 2008), hace referencia a la habilidad de identificar ciertos eventos en el salón de clase, a pesar de su multiplicidad, simultaneidad y complejidad; mientras que el segundo consiste en la habilidad de describir aspectos del salón de clase, interpretarlos (generando juicios o buscando justificaciones) e imaginar sus consecuencias.

Respecto de esto, se ha identificado que los profesores en formación tienden a enfocarse en cosas superficiales como las características físicas del estudiante o la realización de juicios generales.

- *Permite generar objetivos con base en un marco de trabajo en particular.* Los objetivos de una secuencia de aprendizaje basada en videograbaciones pueden ser generados desde el marco teórico que se desea abordar, el contexto en que se realiza y los aprendizajes esperados. De éstos, seis son los principales (mostrar buenos ejemplos de práctica docente, evidenciar situaciones características del ambiente en el salón de clases, analizar desde distintas perspectivas la diversidad de prácticas en un salón de clases, estimular la reflexión personal, propiciar la enseñanza guiada y estimular la evaluación de competencias) que abordan el desarrollo de saberes sobre cómo interpretar y reflexionar acerca de las prácticas en el salón de clases (perspectiva desarrollista) y qué se debe hacer en una de ellas (perspectiva normativa). Respecto de la perspectiva desarrollista, el uso de videograbaciones permite a los profesores en formación develar, clarificar y refinar teorías personales sobre el aprendizaje y la enseñanza, para lo cual es esencial el aprendizaje basado en problemas. Mientras que, respecto de la perspectiva normativa, el uso de videograbaciones permite generar consciencia de las distintas formas de abordar un concepto o situaciones en un salón de clases, así como de los posibles resultados que éstas pueden tener.

- *Permite el estudio de la práctica desde distintos grados de cercanía.* La posibilidad de usar una variedad de videograbaciones permite abordar prácticas realizadas desde distintos enfoques. Por ejemplo, el uso de videograbaciones de la actividad docente de un profesor desconocido facilita al observador la apropiación de métodos para analizar la práctica docente y promueve la participación en discusiones y reflexiones, pero debilita la cercanía con el contexto de la práctica en caso de que éste no se introduzca. Las videograbaciones de la actividad docente de un profesor colega generan un menor aislamiento y una mayor cercanía, permitiendo un trabajo más familiar, útil para el razonamiento crítico y comparativo, y ponerse en el lugar de otro docente. Finalmente, el uso de videograbaciones propias fomenta el desarrollo de la autorreflexión crítico-descriptiva, por ser la que presenta una mayor inmersión, resonancia, autenticidad y motivación, fomentando el reconocimiento y el saber del propio hacer docente, la identificación de elementos débiles o la disonancia entre la práctica realizada y lo que se cree haber realizado.

Con base en lo anterior se puede concluir que el uso de videograbaciones para la formación docente temprana registra resultados positivos, no sólo en el desarrollo del conocimiento disciplinar, sino también respecto de los recursos de acción, comunicación y razonamiento necesarios para realizar de manera efectiva las funciones que ejerce el docente; principalmente, una mayor motivación y un mayor interés, el desarrollo de la atención selectiva, el análisis interpretativo de las razones y las consecuencias de fenómenos en el salón de clases, la familiaridad respecto de la profesión docente y lo que ocurre en el aula, el establecimiento de relaciones entre la práctica observada y la teoría, la comparación de experiencias o situaciones, y la proyección en el futuro del trabajo reflexivo. Sin embargo, para lograr los resultados esperados se consideran necesarios cinco aspectos metodológicos que se relacionan con los mencionados antes, resumidos en el trabajo de Blomberg *et al.* (2013), cuya heurística se presenta a continuación (véase figura 1).

Con base en lo anterior se analizan los resultados que profesores en formación entregan al participar en una secuencia de aprendizaje generada con base en estos principios. Esta secuencia pretende que observen la videograbación de una clase y la asocien con elementos pertenecientes a una teoría de la didáctica de la matemática, poniendo en reflexión los aspectos mencionados por Gaudin y Chaliès (2015).

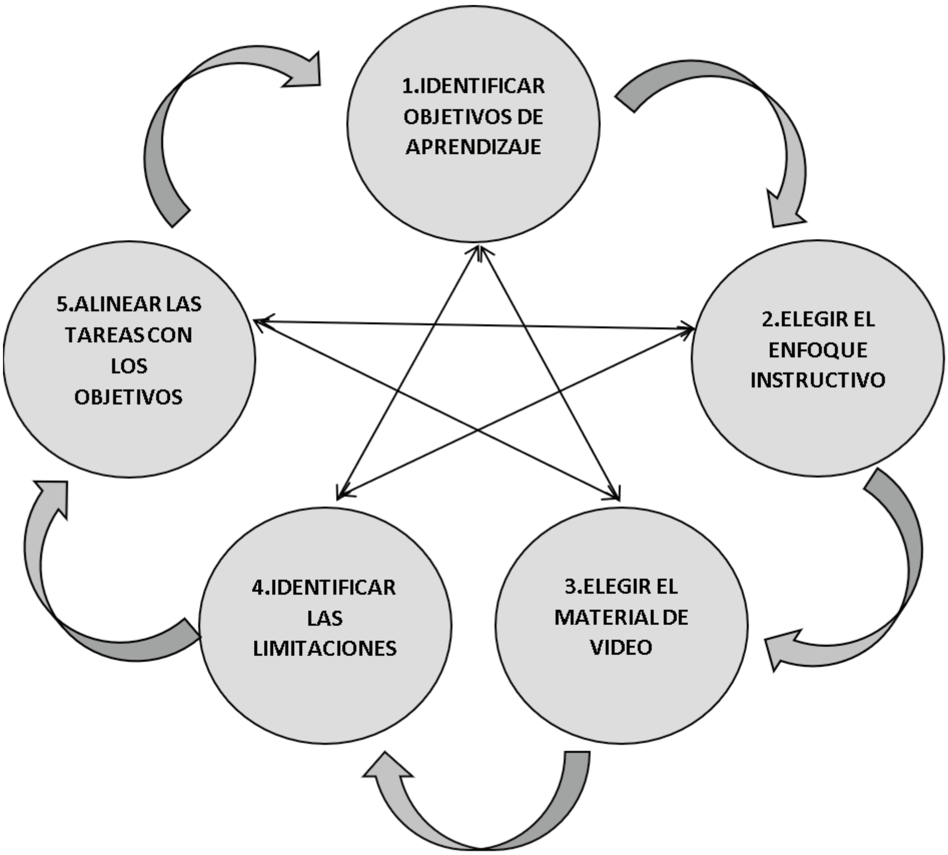
Metodología

Este trabajo es de carácter cualitativo (Pérez Serrano, 1994), con un carácter exploratorio-reflexivo (Aguiar & Pi, 2019), debido a que se centra en el análisis y la reflexión de los resultados que entrega un grupo de estudiantes en las distintas etapas de una secuencia de aprendizaje.

Participantes

Las respuestas recolectadas corresponden a una pareja de estudiantes de cuarto año de la carrera de pedagogía en educación media en matemáticas y computación, seleccionada por cumplir con los requisitos a lo largo de la secuencia de aprendizaje y por haber asistido a la mayoría de las sesiones de retroalimentación. Este trabajo fue generado en el marco de una asignatura paralela a la primera práctica docente de los estudiantes (enfocada en la

FIGURA 1. *Heurística para la formación de profesores basada en el uso de videograbaciones*



FUENTE: Traducido de Blomberg *et al.* (2013).

observación y la reflexión) que también consistió en su primer acercamiento al salón de clases.

Descripción de la secuencia de aprendizaje

La secuencia de aprendizaje tiene objetivos enfocados en la relación entre la teoría (investigativa, didáctica y matemática) y su puesta en práctica en un primer acercamiento a lo que ocurre en el salón de clases.

Esta secuencia fue realizada considerando las necesidades identificadas por investigadores enfocados en la formación docente; en particular: *(1)* la formación docente tardía de profesores en lo que respecta a la realización de prácticas y la inmersión en lo que ocurre en el salón de clases (Poblete & Erices, 2013); *(2)* la falta de contextualización de cátedras de naturaleza didáctica que van de la mano de la enseñanza de la matemática (Springer & Graus, 2017), y *(3)* el auge del uso de las tecnologías de la información y la comunicación para el aprendizaje (Avello, 2020).

A continuación se presentan las fases en las que se divide la secuencia de aprendizaje.

1. Nivelación de conocimientos previos y aspectos actitudinales

Se comenzó abordando aspectos esenciales para que los profesores en formación entendieran la relación entre la investigación, la teoría y la práctica docente. En particular, se abordó la importancia de la investigación educativa, el uso del método científico y algunos aspectos protocolares para la realización de una reflexión (por ejemplo, generación de preguntas y síntesis de ideas). Aunque esta etapa no se relaciona directamente con el uso de videograbaciones, toma en consideración aspectos esenciales mencionados en los antecedentes: los saberes previos y la generación de conciencia acerca del potencial formativo de la investigación en el salón de clases.

2. Introducción del marco teórico de referencia

Para alcanzar de manera eficaz los objetivos propuestos fue necesario introducir la teoría en la que se basa el trabajo apoyado en videograbaciones. En particular, en el aspecto investigativo se introdujo la observación como método de análisis, mientras que en el aspecto didáctico se abordó la *teoría de situaciones didácticas* (TSD) con un documento bibliográfico facilitado por la docente a cargo.

El conocimiento de la TSD permitió la instrumentalización para observar y analizar distintas situaciones de clase, las cuales se evidenciarían mediante el desarrollo de algunas tareas y trabajos en equipo (por ejemplo, identificar y resumir aspectos conceptos clave de la teoría), mismos que fueron enviados a la profesora encargada para su valoración y puesta en común en una de las sesiones de aula con el propósito de abordar posibles confusiones. Además, se familiarizó a los estudiantes con la estructura investigativa básica (introducción, objetivos, metodología, resultados, análisis y conclusiones) a partir de la lectura de artículos y documentos investigativos que presentan la observación como método de análisis.

3. Trabajo final de la secuencia de aprendizaje

Esta fase consistió en la puesta en práctica de los elementos teóricos de la TSD para el análisis de una clase videograbada con duración de seis minutos, seleccionada por conveniencia, en la que se desarrollan ejercicios con números enteros mediante el uso de regletas *cuisenaire* (bloques de aprendizaje utilizados para representar números enteros). Primero, los estudiantes identificaron segmentos interesantes y adecuados para el análisis. Después, reconocieron situaciones y elementos de la TSD en los segmentos seleccionados para el análisis, la reflexión y la interpretación de éstos. El resultado final de este procedimiento fue entregado por cada pareja de estudiantes (profesores en formación) en forma de póster y expuesto con el resto del grupo, con tal de llegar a consensos y generar nuevos espacios de aprendizaje.

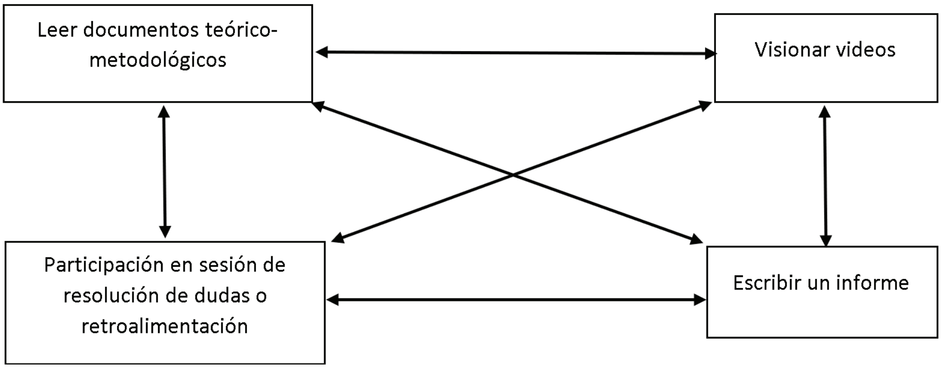
Es importante mencionar que para cada una de estas etapas se realizó al menos una sesión previa, una en paralelo y otra posterior, en las que se realizó seguimiento y retroalimentación de manera colectiva (profesora encargada y estudiantes). Esto, en su totalidad, queda representado en la figura 2, adaptada de la estructura metodológica de Llinares *et al.* (2008).

A continuación, se reporta el trabajo realizado por la pareja de estudiantes del estudio.

Resultados de la introducción del marco teórico de referencia

La pareja de estudiantes generó un resumen del método de análisis de la observación, un resumen general de la TSD y un cuadro con conceptos clave y su explicación. A continuación se presentan de manera sintetizada

FIGURA 2. *Secuencia de aprendizaje*



las acciones desarrolladas por esta pareja de estudiantes. En relación con el resumen, se indica la temática abordada por estos estudiantes en cada párrafo usando la sigla PX (por ejemplo, P1 corresponde al párrafo 1):

Resumen del método de observación

- P1: Definición de *observación* y su importancia en ciencias sociales.
- P2: La observación en la vida cotidiana (como proceso informal) y en el ámbito científico (de manera formal), así como sus características principales (objetivo de investigación, acceso al campo, muestra, observador y técnicas).
- P3: Descripción del objetivo de investigación, los elementos que definen el método de observación (por ejemplo, objetivos) y su relación con otras áreas investigativas (por ejemplo, generación de nuevos métodos).
- P4: Descripción del acercamiento al campo de estudio, que consiste en constantes renegociaciones en la interacción observador-campo.
- P5: Descripción del control sobre el campo de estudio y aspectos por considerar que hacen alusión al tiempo, las personas y el contexto (manejo de tiempo y espacio, objetos, actores sociales, interacciones, rutinas, etcétera).
- P6: Los tipos de observador según su nivel de participación en el entorno de estudio (totalmente participativo, parcialmente participativo y no participativo).
- P7: Las técnicas según el tipo de observador (participación directa, obser-

vación directa sin participación y observación indirecta).

Resumen de la TSD

- P1: Aborda la corriente investigativa (Escuela Francesa de Didáctica) que dio origen a la TSD; en particular, el área que necesitaba resolver y sus principios respecto de los procesos de adquisición y transmisión del conocimiento matemático.
- P2: Definición de la TSD, sus principios y sus supuestos.
- P3: Definición (por el creador de la teoría) de su concepto principal (situación) y los dos tipos existentes (la didáctica y la adidáctica), así como los aspectos importantes que la diferencian una de la otra (centrados en una situación de clases).

Conceptos clave

Los conceptos indicados y definidos mediante una tabla son los siguientes: situación, situación didáctica, situación de acción, situación de formulación, situación de validación, situación adidáctica, carácter de necesidad de los conocimientos, sanción/retroacción, no intervención, devolución, variable didáctica, valor de la variable didáctica, institucionalización, contrato didáctico, efecto, efecto Topaze, efecto Jourdain, deslizamiento metacognitivo, uso abusivo de la analogía, paradojas en situaciones didácticas, transmisión de las situaciones, inadaptación a la exactitud e inadaptación a una situación ulterior, en ese orden.

El estudio previo y la identificación de las ideas principales del marco teórico propuesto facilitaron a los estudiantes el enlazamiento de la teoría didáctica con los fenómenos presentes en el salón de clases; en específico, con lo observable en la práctica realizada por un docente.

Resultados del trabajo final de la secuencia de aprendizaje

El póster realizado por los estudiantes aborda la identificación de los conceptos clave, mencionados en el apartado anterior, en tres segmentos de la videograbación de la clase. En particular, se divide en seis secciones: problemática, objetivo, metodología, análisis y resultados, conclusiones, y pensamientos finales. Como el enfoque de nuestra investigación está en la puesta en práctica de la teoría para el análisis de los fenómenos en el salón de clases, abordaremos particularmente las últimas dos secciones.

Análisis y resultados de la secuencia de aprendizaje

En este apartado, los estudiantes presentan el análisis de los segmentos escogidos con base en la TSD. Esto lo realizan con ayuda de un cuadro de tres columnas: el lapso analizado (identificado por minuto y segundo del video), la transcripción del diálogo y los fenómenos observados, y el análisis de éstos, acompañados por una descripción general del segmento completo, como se presenta en las tablas 1, 2 y 3, los cuales fueron socializados durante una sesión de retroalimentación, permitiendo a los estudiantes complementar y justificar los elementos identificados.

Conclusiones y pensamientos finales de los estudiantes de la secuencia de aprendizaje

En este apartado los estudiantes realizan conclusiones con respecto al uso de la TSD para el análisis de fenómenos en un salón de clases. A continuación se presentan de manera textual las conclusiones elaboradas por la pareja de estudiantes:

> Podemos concluir que la práctica docente de la profesora presenta bastantes debilidades; entre las más importantes: la ausencia de una etapa clave validación (formulación) y la constante presencia de fenómenos de resonancia

TABLA 1. *Análisis con base en la TSD del primer segmento seleccionado*

Descripción segmento 0:33-1:44	***Los alumnos y las alumnas trabajan en la resolución del problema utilizando las regletas, llegando a la misma solución en la mayoría de los casos***	
Tiempo	***Transcripción***	***Análisis usando TSD***
0:33-0:38	–Profesora (P): ¿Preparados, clase? –Clase (CL): Sí... –P: Por equipos, ¿eh? ¡A trabajar! ¡Vamos!	La profesora, luego de dar la instrucción de iniciar con la actividad (*situación adidáctica).*
0:38-0:57		La profesora recorre el salón verificando que los alumnos trabajan de manera individual *(situación de acción) e*n la resolución del problema usando regletas de *cuisenaire*.
0:57-1:04 1:04-1:06	*P observa el trabajo de un alumno, Pablo* –P: No estoy de acuerdo, Pablo	Observa una respuesta incorrecta del estudiante y le indica: "No estoy de acuerdo, Pablo" y sigue caminando sin abordar la equivocación del estudiante y sin indicarle el origen fundamental de su error *(fenómeno de resonancia débil)* **(**Efecto Jourdain).
1:06-1:15	*La profesora observa los resultados de los compañeros del grupo de Pablo* –P: ¿Qué te da, Mohammed (M)? –M: 38 *La profesora no dice nada.* –Niño 1 (exaltado, le habla a M): ¡Oh, 37! *La profesora se retira sin hacer comentarios de ese grupo para ver el trabajo realizado por los otros.*	Posteriormente, sigue recorriendo el salón y verificando las respuestas. Al preguntar: "¿Cuánto les dio?" es posible escuchar 38 (correcta) y 37 (incorrecta). La profesora hace caso omiso del 37 y sigue recorriendo el salón *(resonancia débil)* poniendo en peligro la actitud de trabajo del estudiante para el cual parecería resultar un poco más difícil la idea matemática, en comparación con el resto de sus compañeros.

débil y efectos Topaze. Todos éstos relacionados con la ausencia de un trabajo de carácter dialógico que asegure la participación de todos los estudiantes.

Con respecto a esto, a la profesora se le presenta el desafío de enfocar su trabajo en los alumnos con respuestas y procedimientos erróneos en lugar de

TABLA 2. *Análisis con base en la TSD del segundo segmento seleccionado*

Descripción segmento 1:45-2:37	***Se da por terminado el tiempo de resolución y de trabajo en equipo, para dar paso inmediato a la revisión colectiva y a la comparación de los resultados obtenidos por los niños y las niñas.***	
Tiempo	***Transcripción***	***Análisis usando TSD***
1:45-1:55	–P: ¡Silencio, silencio! ¡Sssh! ¡Vale, se acabó el tiempo! –P: ¡Toca la… toca la campana por favor…! ¡Tócala! *Se escucha el sonido de campana.* –P: ¡Se acabó el tiempo! A ver… ¡Equipos que hayan terminado…! *Toda la CL levanta la mano.*	La docente consulta sobre avances del trabajo realizado y fuerza una fase de validación sin una etapa explícita previa de trabajo en grupo (formulación), algo necesario en este nivel educativo.
1:56-2:24	–P: Muy bien. ¿Quién quiere explicarme cómo lo ha hecho? *Nuevamente todos en la CL levantan la mano.* –P: Va…No se puede todos a la vez… ¡Por equipo! –P: ¿Cuánto les da…? ¿Cuánto le da a ese equipo? *La profesora señala con el dedo hacia un grupo.* –Alumna 1: 38 –P: 38 –P (Señalando al grupo de al lado): ¿Están de acuerdo? –Grupo de niños 1: Sí… –P (Señalando al grupo de Pablo): ¿Están de acuerdo vosotros? *Repite la misma acción con el resto de los grupos de la CL.*	Luego, la profesora pregunta a un grupo su respuesta (38) y a continuación les pregunta a los demás grupos si están de acuerdo o no. Esto, si bien valida el aprendizaje hecho en grupos, no tiene sentido sin que antes los estudiantes hayan realizado una socialización y una formulación del trabajo en grupos. Por esto va a haber estudiantes (tal como se ve en el video) que no han comprendido el razonamiento matemático detrás del problema y que simplemente se "dejarán llevar" por el pensamiento en grupo.

concentrarse en la búsqueda de escuchar (dicha por algún representante de cada grupo, sin asegurar que el resto de éste esté de acuerdo o no) la respuesta correcta. Se recalca, entonces, el papel pasivo que identificamos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, puesto que la profesora exigía una respuesta y un procedimiento específicos y no aseguraba la reconstrucción del objeto y el concepto matemático por parte de los estudiantes.

Tabla 3. *Extracto del análisis con base en la TSD del tercer segmento seleccionado*

Descripción segmento 2:38-5:03	***Los alumnos y las alumnas trabajan en la resolución del problema utilizando las regletas, llegando a la misma solución en la mayoría de los casos***
Transcripción	***Análisis usando TSD***
–P: ¿Quién quiere explicarme BIEN cómo lo ha hecho…? *Algunos niños de la CL levantan la mano para participar, entre ellos Agustina (Ag).* –P: Por ejemplo… Agustina, pero Agustina, limpia la mesa y explícame cómo lo has hecho, y el resto de los compañeros va a estar en silencio… A ver… –Ag: Lo que he hecho… –P: Shhh... por favor… –Ag: …He, he sumado… he, he sumado 12 + 16, con… –P: Pero no, no, no, no me lo… Yo quiero verlo. ¡Hazlo! Con regletas. A ver… constrúyeme el 12, que tú dices. *Ag saca las regletas correspondientes a 12 y las ordena en su mesa para que la profesora las vea.* –P: Bien. Sigue tú, dime lo que estás haciendo. –Ag: Lo que estoy haciendo es, es… sumar 12 + 26… –P: Vale, construye el 26. *Ag rápidamente construye el 26 con regletas.* –P: ¿Cómo podemos llamar a este número también? –Ag: Eh… diez y dos.	La profesora elige a una alumna voluntaria (Agustina) para que le explique el procedimiento correcto para el curso *(etapa de validación)*. Apenas la estudiante empieza a comentar su procedimiento la profesora demuestra su reprobación a la forma en que responde. Esto, además de interrumpir a la estudiante, la hace entender que lo principal de la respuesta es el uso de las regletas *(deslizamiento meta-cognitivo)* y no el razonamiento cognitivo. Durante la explicación de Agustina la profesora la interrumpe en reiteradas ocasiones, por ejemplo, para preguntarle qué número es el que acaba de representar con regletas (12), a lo que la alumna responde con una forma, para luego seguir siendo interrogada por la profesora con el objetivo de que nombre otras dos formas. Esta validación es realizada en cámara y no se presta al nivel de atención del resto del grupo. Además, no finaliza con el curso estando de acuerdo con la respuesta o el procedimiento, sino que empieza con el curso estando de acuerdo.

También podemos señalar que el uso de la TSD para la observación de clases se enfocó en “lo que faltaba” del proceso de enseñanza y aprendizaje y no en lo que sí estaba presente, que era la manera en la que la investigación resultaba más eficaz para el efecto formativo.

Finalmente, podemos señalar como áreas a investigar y de interés: *(1)* la búsqueda de elementos o fenómenos presentes en la práctica de la profesora

> o de la formación docente que tuvieron como resultado las dificultades identificadas, pues todas cumplen con ser de un mismo carácter (falta de interacción significativa con los estudiantes), y *(2)* el análisis de otros videos de clases o prácticas en vivo con tal de comprobar si estas deficiencias son de carácter general (lo cual fomentaría la generación de un trabajo o un curso formativo para tratarlas) o la situación estudiada resultó una situación más particular, lo cual significaría la interferencia de aspectos individuales del docente.

Análisis y reflexión de mirar profesionalmente

Con respecto a la observación, la pareja de estudiantes identificó la importancia de este método de análisis tanto a nivel investigativo como en el contexto social, al señalar que "como personas, somos observadores del comportamiento y el material que nos rodea; esto es, observamos, evaluamos, generamos conclusiones y hacemos comentarios o interactuamos con los demás sujetos o con el entorno".

Además, establecen una relación entre la teoría de esta práctica (la observación) con el resto de la teoría investigativa (TSD), pues indican que

> la observación puede ser el método de investigación principal o uno complementario, el resultado del proceso puede dar inspiración para otros temas específicos, las impresiones y las experiencias pueden ayudar a trabajar una problemática y, finalmente, generar métodos o teorías adicionales con las cuales explorarla de mejor manera.

Asimismo, fundamentan la descripción de las características del método de la observación en los componentes metodológicos como objetivo, campo, muestra, observador y técnica, lo cual demuestra que la abordan de una manera que les facilita compararla y analizarla con respecto a otros métodos de análisis cualitativos. No se proporcionan definiciones formales de la terminología científica utilizada, probablemente porque se asume que se pueden inferir. A pesar de que la respuesta está completa, en lo que incumbe a formalidad teórica, los estudiantes no hacen una asociación explícita entre el método de la observación y lo que sucede en el salón de clases, es decir, no abordan el potencial de este método ni tampoco lo relacionan con lo que sucede en su ambiente de práctica.

En relación con la TSD, los estudiantes abordan la teoría desde su origen, mencionando las bases que la sustentan y la definición de sus conceptos clave (situación, situación didáctica y situación adidáctica). Esto refleja los constructos que consideran importantes al abordarla: “Bajo el supuesto de que los conceptos matemáticos no se construyen de manera espontánea, y una concepción constructivista (piagetiana) del aprendizaje bajo la cual el alumno aprende adaptándose a un medio que le presenta contradicciones, se generan respuestas nuevas” .

Cabe destacar que consideran las diferencias entre los conceptos *situación didáctica* y *situación adidáctica,* al describirlas de la siguiente manera:

> La situación didáctica es aquella construida intencionalmente con el fin de que los alumnos adquieran un saber determinado (con su conjunto de condiciones y relaciones correspondientes), y la situación adidáctica corresponde a toda situación que no puede ser dominada de manera conveniente en la puesta en práctica de conocimientos o del saber que se pretende y que sanciona las decisiones del alumno sin intervención del profesor en lo que concierne al saber en juego.

A pesar de lo anterior, los estudiantes no abordan el potencial de esta teoría para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por ejemplo, indicando posibles aplicaciones para diseñar secuencias de aprendizaje. De forma similar, señalan la definición de los conceptos clave y cómo identificarlos en los fenómenos del salón de clases. Sin embargo, no se aborda ni se hipotetiza sobre la importancia de éstos para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En relación con el trabajo final de la secuencia de aprendizaje, se pudo identificar que los estudiantes son capaces de señalar elementos de la TSD en los segmentos escogidos y, algunas veces, reconocer más de uno en un lapso o en un mismo fenómeno. Esto significa que, con la guía de la profesora encargada de la asignatura, se logra aplicar la teoría en situaciones reales relacionadas con la práctica docente y, además, la consideración de las situaciones en el salón de clases como complejas, compuestas por diversos elementos que muchas veces se relacionan entre sí. Sin embargo, el análisis por segmentos se enfoca en elementos negativos y no posee un carácter formativo para los segmentos en específico, por ejemplo, agregando una retroalimentación o posibles formas de mejorar cada uno de los fenómenos identificados.

Con respecto a las conclusiones de los estudiantes, se identifica que ellos las generan enfocándose en las debilidades del docente, cuya práctica fue analizada con un enfoque en la gestión discursiva. Esto refleja que los alumnos prefieren priorizar las debilidades de la gestión del docente, en lugar de realizar una reflexión acerca de cuál de ellas sería la más significativa y qué otros conflictos podrían generarse en el aprendizaje; es decir, la puesta en un segundo plano de la reflexión y la crítica con un carácter formativo.

Finalmente, los estudiantes son capaces de identificar limitaciones de la secuencia de aprendizaje en la que participaron (por ejemplo, el enfoque en los aspectos insuficientes de la práctica del docente mencionado antes), generando nuevas interrogantes y áreas en las cuales se puede extender el trabajo realizado. Por ejemplo, la búsqueda del origen de los conflictos identificados y el análisis de otras videograbaciones de clase con el propósito de realizar conclusiones generales; es decir, asumen que la práctica estudiada es un caso seleccionado por conveniencia para la secuencia de aprendizaje, el cual puede complementarse.

Conclusiones

El análisis y la reflexión de la secuencia de aprendizaje, así como los resultados entregados por los estudiantes, evidencian la efectividad de la observación como método de análisis de videograbaciones de clases para la formación de futuros profesores, debido a dos razones principales: permite aplicar la teoría en la práctica, relacionándolas, y facilita al futuro profesor comenzar a familiarizarse tanto con la labor docente como con lo que ocurre dentro del salón de clases, en particular, las matemáticas que se enseñan, la forma en que los reaccionan estudiantes y otros fenómenos importantes; todo lo cual corresponde al conocimiento necesario para la labor del profesor, mencionados por Llinares *et al.* (2008), Zapatera (2015), Poblete y Erices (2013) y Pino-Fan *et al.* (2018).

También se presentó un ejemplo de secuencia de aprendizaje que, siguiendo con los pasos heurísticos de Blomberg *et al.* (2013) (aunque no se mencionan todos de manera explícita), logra los objetivos seleccionados con la intención de resolver necesidades de la formación docente, evidenciando un análisis complejo de los fenómenos. Además, abordar un marco teórico antes de realizar el análisis de las videograbaciones ayudó a los estudiantes a establecer la relación entre la TSD y la práctica docente, como menciona Santagata *et al.* (2007). Sin embargo, el hecho de que los estudiantes en la segunda fase no le otorguen un carácter pedagógico a la teoría abordada indica que es importante fomentar tareas que requieran su aplicación en entornos cercanos a la labor docente, o bien, la necesidad de profundizar más en la observación como método de análisis hasta que los estudiantes adopten dicho enfoque profesional, es decir, *mirar profesionalmente*.

Consideramos que el presente escrito presenta un aporte teórico y práctico respecto de la introducción del uso de las videograbaciones para la formación de profesores en matemáticas, al presentar y poner en práctica consideraciones esenciales para su aplicación y al evidenciar sus beneficios. Fue realizado con la intención de fomentar este tipo de método de análisis, no como uno superior a otros, sino como un complemento adecuado para abordar debilidades que se han estado evidenciando en la formación docente.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del Proyecto Fondecyt 1200005 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Referencias

Aguiar Cau, L., & Pi, V. L. (2019). *Un abordaje exploratorio-reflexivo en el marco de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales* (Tesis de licenciatura). Universidad Nacional de Córdoba.

Avello, I. Q. (2020). Covid-19 y cierre de universidades: ¿Preparados para una educación a distancia de calidad? *Revista Internacional de Educación para la Justicia Social, 9*(3), 1-11.

Blomberg, G., Sherin, M. G., Renkl, A., Glogger, I., & Seidel, T. (2014). Understanding video as a tool for teacher education: Investigating instructional strategies to promote reflection. *Instructional Science, 42*(3), 443-463.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to Study the Theory of Didactic Situations: Didactico/Didactic to Algebra Study* (vol. 7). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Frederiksen, J. R. (1992). *Learning to "See": Scoring Video Portfolios or "Beyond the Hunter-gatherer in performance assessment.* Trabajo presentado en la reunión anual de la American Educational Research Association, San Francisco.

Gaudin, C., & Chaliès, S. (2015). Video Viewing in Teacher Education and Professional Development: A Literature Review. *Educational Research Review, 16,* 41-67.

Llinares, S., Valls, J., & Roig, A. I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, 20*(3), 59-82.

Montiel, G. (2010). Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 69-84.

Pérez Serrano, G. (1994). *Investigaciones cualitativas: Retos e interrogantes.* La Muralla.

Pino-Fan, L., Guzmán-Retamal, I., Larraín, M., & Vargas-Díaz, C. (2018). La formación inicial de profesores en Chile: "Voces" de la comunidad chilena de investigación en educación matemática. *Uniciencia, 32*(1), 68-88.

Poblete, M. R., & Erices, L. V. (2013). Reflexiones en torno a la inducción profesional docente en Chile: Problemas y desafíos para los nuevos profesores del sistema educacional. *Diálogos Educativos, 13*(25), 42-51.

Santagata, R., Zannoni, C., & Stigler, J. W. (2007). The Role of Lesson Analysis in Pre-Service Teacher Education: An Empirical Investigation of Teacher Learning from a Virtual Video-Based Field Experience. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(2), 123-140.

Seidel, T., Blomberg, G., & Renkl, A. (2013). Instructional Strategies for Using Video in Teacher Education. *Teaching and Teacher Education, 34,* 56-65.

Sherin, M. G., & Han, S. Y. (2004). Teacher Learning in the Context of a Video Club. *Teaching and Teacher Education, 20*(2), 163-183.

Solar, H., García-Quiroga, B., Rojas, F., & Coronado, A. (2014). Propuesta de un modelo de competencia matemática como articulador entre el currículo, la formación de profesores y el aprendizaje de los estudiantes. *Educación Matemática, 26*(2), 33-67.

Springer, R. Y. B., & Graus, M. E. G. (2017). Influencia de los organizadores del curriculum en la planificación de la contextualización didáctica de la Matemática. *Revista Boletín Redipe, 6*(1), 90-112.

Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics Teachers' "Learning to Notice" in the Context of a Video Club. *Teaching and Teacher Education, 24*(2), 244-276.

Zapatera, A. (2015). *La competencia "mirar con sentido" de estudiantes para maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de educación primaria* (Tesis de doctorado). Universidad de Alicante.

Sección 4

ESTUDIOS SOBRE PROBLEMAS Y TAREAS MATEMÁTICOS

Capítulo 11. Efecto del tiempo en la solución de problemas que implican triángulos degenerados

Joseph Xolocotzi Villalva
Josip Slisko Ignjatov
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

Resumen

Este documento presenta el análisis de las respuestas que estudiantes ofrecen al resolver un acertijo matemático que implica calcular el área de un triángulo que no puede ser construido sobre un plano debido a que esa figura no tiene área. El estudio permite observar la relación entre las respuestas proporcionadas por los alumnos y el tiempo que transcurre desde que estudian los criterios de existencia de un triángulo. Investigaciones similares prueban que los estudiantes suelen asumir que la figura podrá ser construida y recurren a la fórmula del área o del perímetro de un triángulo para resolver el acertijo. Se procura observar cómo esta conducta se modifica una vez que los alumnos conocen los criterios de existencia de los triángulos y si sus respuestas cambian conforme pasa el tiempo. Se seleccionó una muestra de estudiantes de secundaria, separándolos en grupos dependiendo del tiempo transcurrido desde que estudiaron el tema de criterios de existencia de triángulos, y luego se les solicitó que resolvieran el acertijo para analizar sus respuestas. Los resultados indican que la conducta de los alumnos cambia solamente durante un periodo de tiempo, para luego regresar a su conducta original. Por eso es importante proponer estrategias que favorezcan aprendizajes más duraderos.

Palabras clave: acertijos matemáticos, obstáculos de aprendizaje, errores, curva del olvido, figuras degeneradas.

Introducción

El filósofo y matemático Martin Gardner, en su libro *Entertaining Mathematical Puzzles* (1986), planteó un acertijo en el que se solicitaba calcular el área de un triángulo cuyos lados midiesen 17, 35 y 52 m. El reto del acertijo consiste en percibir que un triángulo con esas medidas no puede construirse en un plano.

Gardner (1986), al dar la solución al acertijo, menciona que un "triángulo" con esos lados sería una línea recta, ya que los tres vértices son colineales, por lo que podría considerase un *triángulo degenerado* que ha perdido su forma de triángulo para degenerar en una línea recta, por lo cual no tiene área. En matemáticas, un caso degenerado es una situación límite en la que un objeto cambia su naturaleza para aproximarse a un objeto de naturaleza distinta, usualmente más simple (Weisstein, s. f.); por ejemplo, un pentágono en que uno de sus lados tiende a cero puede degenerar en un cuadrilátero.

En una investigación más reciente, Sánchez (2020) planteó a un grupo de alumnos de bachillerato el acertijo propuesto por Gardner y observó que sólo un porcentaje muy pequeño de ellos era capaz de percibir que el triángulo no podía ser construido. En su investigación, Sánchez implementó el acertijo como parte de una prueba para determinar y, hasta cierto punto predecir, el desempeño que tendrían los alumnos en la asignatura de matemáticas.

Otra observación, realizada en el mismo estudio, fue que no existían diferencias significativas entre las respuestas de los alumnos de los últimos semestres de bachillerato y aquellos que cursaban los primeros semestres. Esto parecía contradecir la idea popular de que si una persona pasa más años estudiando una asignatura será más competente en la misma.

Ahora, el contenido *Criterios de existencia y unicidad en la construcción de triángulos* forma parte de los planes y programas de estudio de la asignatura de matemáticas de secundaria propuestos por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011 & 2017), por lo que no debería ser ajeno a los estudiantes que participaron en el experimento de Sánchez. Entonces, ¿por qué no son capaces de percibir que ese triángulo no tiene área?

Analizar las respuestas que los alumnos plantean a problemas geométricos que implican conocer los criterios de existencia y unicidad de triángulos permite determinar qué variables tienen mayor influencia en las estrategias y los conocimientos que emplean. Con base en las variables que resulten más significativas es posible diseñar estrategias que favorezcan un aprendizaje más profundo en los estudiantes.

Objetivo. Determinar si existe una relación en la forma en que alumnos de secundaria proponen respuestas a problemas que implican los criterios de existencia y unicidad de triángulos y el tiempo transcurrido desde que estudiaron dicho tema.

Preguntas específicas:

- ¿Cuál es la relación que existe entre el tiempo transcurrido desde que se estudiaron los criterios de existencia y unicidad de triángulos y las respuestas proporcionadas por los alumnos?
- ¿Cuál es la relación entre factores como las medidas de los lados del triángulo o la presencia de la representación de ese triángulo en el problema y las respuestas de los alumnos?

Revisión de literatura

En su estudio, Sánchez (2020) encontró una tendencia en las respuestas de los sujetos que participaron: recurrían constantemente a las fórmulas del área y el perímetro de los triángulos. A pesar de que no es posible resolver este problema utilizando alguna de estas fórmulas, la mayoría de los alumnos las empleó. ¿Qué puede explicar que tantos alumnos cometan exactamente el mismo error?

D'Amore (2013) afirma que un error no es necesariamente fruto de la ignorancia, sino resultado de un conocimiento precedente que ha tenido resultados positivos, pero que no resiste la prueba de hechos más circunstanciales o generales. Por lo tanto, no se trata de errores de origen desconocido, sino de "obstáculos de aprendizaje".

Brousseau (1983) propone que un "obstáculo de aprendizaje" *no* implica una falta de conocimiento, sino un conocimiento que el estudiante usa para dar respuestas adecuadas en un contexto conocido, pero que al tratar de emplearlo fuera de ese contexto fracasa generando respuestas incorrectas. Al mismo tiempo, explica que un estudiante puede superar estos obstáculos, pero es posible que éstos resurjan después de que transcurra un tiempo.

Esta aproximación podría explicar por qué los alumnos del experimento de Sánchez (2020) recurrían a las mismas estrategias. Éstos no mostraban su incapacidad de resolver problemas matemáticos; por el contrario, recurrían a aquellos conocimientos matemáticos que han utilizado recurrentemente durante su vida académica, adaptándolos a una situación para la cual no son adecuados.

Los alumnos del experimento de Sánchez (2020) recurrían, en este caso particular, a las fórmulas del área y el perímetro de triángulos, ya que son conceptos que han estudiado ampliamente durante su educación primaria, secundaria y parte del bachillerato. Sin embargo, la propiedad que establece que "para que un triángulo exista, la suma de las longitudes de dos de sus lados debe ser mayor a la medida del tercer lado" es un concepto que también debieron estudiar en secundaria. ¿Por qué recurren a la fórmula de áreas y perímetros y no a esta propiedad?

La respuesta más simple podría ser la adecuada: simplemente "la olvidaron"; es decir, conocen las propiedades de existencia y unicidad de triángulos, pero con el tiempo han dejado de utilizarlas cuando se les presenta un problema. La muy conocida "curva del olvido" es un término acuñado por el psicólogo Hermann Ebbinghaus en 1885 que describe la disminución de elementos que una persona puede recordar respecto de un tema a lo largo del tiempo.

El experimento de Ebbinghaus ha sido repetido en muchas ocasiones y los resultados indican que, al repetir una información de forma periódica, la curva que indica la pérdida de recuerdos respecto de dicha información se va aplanando; es decir, la información permanece en la memoria por periodos más largos de tiempo (Murre & Dros, 2015).

Esto podría explicar la aparente falta de capacidad de algunos estudiantes para resolver problemas similares a otros que ya han resuelto con anterioridad, además de la aparición repentina de obstáculos antes superados observada por Brousseau (1983), ya que al olvidar un conocimiento están recurriendo a otros que han sido más duraderos.

Lo anterior sugiere que los alumnos del experimento de Sánchez (2020) han "olvidado" las propiedades de existencia y unicidad de triángulos y, en su lugar, recurren a las fórmulas del área y el perímetro, ya que éstas representan un concepto matemático que permanece con más fuerza en su memoria.

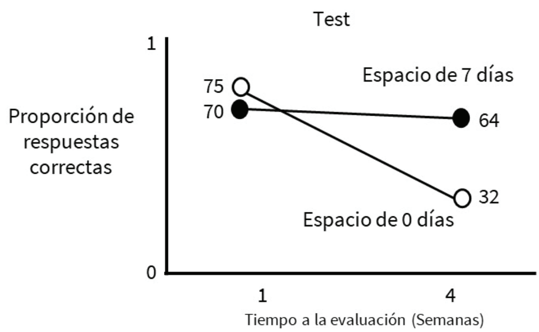
Si este razonamiento es verdadero puede ofrecer un camino para que los profesores ayuden a sus alumnosa superar obstáculos de aprendizaje basados en los estudios de la curva del olvido. Por ejemplo, Rohrer y Taylor (2009) realizaron un estudio de la influencia que tenían los intervalos de tiempo en la práctica de un contenido matemático y su desempeño en exámenes a lo largo del tiempo.

En ese estudio, Rohrer y Taylor proporcionaron a estudiantes una serie de problemas matemáticos, dividiéndolos en dos grupos: uno estudió los problemas de forma continua durante dos días y el otro estudió la mitad de los problemas un día y la otra mitad la siguiente semana.

Después realizaron una evaluación volviendo a dividir ambos grupos a la mitad y formando cuatro subgrupos: un grupo que estudió los problemas de forma continua y fue evaluado después de una semana; un grupo que estudió los problemas de forma continua, pero fue evaluado después de cuatro semanas; un grupo que estudió la mitad de problemas un día, la otra mitad una semana después, y fue evaluado una semana después, y un grupo que estudió la mitad de problemas un día, la otra mitad la siguiente semana, y fue evaluado cuatro semanas después.

Sus resultados indicaban que no existía una diferencia significativa en los grupos que realizaron una evaluación después de una semana de estudiar los problemas. Sin embargo, en los grupos que habían sido evaluados después de cuatro semanas de concluir los problemas, se suscitó que el grupo que estudió los problemas separándolos con un intervalo de tiempo de siete días consiguió un resultado notablemente superior que el grupo que estudió los ejercicios de forma consecutiva, como se observa en la figura 1.

FIGURA 1. *Resultados según los intervalos de práctica*



FUENTE: Traducida de Rohrer y Taylor (2009).

El experimento de Rohrer y Taylor, de forma congruente con los experimentos que replican la investigación de Ebbinghaus, sugiere que una estrategia adecuada para favorecer un aprendizaje más duradero radica en ofrecer una especie de "refuerzo" después de que transcurra un tiempo y no en estudiar un tema con mayor intensidad.

Si bien la aproximación mediante los obstáculos de aprendizaje y la curva del olvido parece explicar el fenómeno, es necesario considerar algunos otros factores que podrían afectar los resultados propuestos por los estudiantes.

Método

Para determinar si existe una relación en la forma en que los alumnos de secundaria proponen respuestas a problemas que implican los criterios de existencia y unicidad de triángulos y el tiempo transcurrido desde que estudiaron dicho tema, y eliminar otras variables, el estudio propone observar las respuestas que los estudiantes ofrecen al acertijo matemático: "Determina el área de un triángulo cuyos lados midan 52, 35 y 17 m".

La prueba se realizó a estudiantes de secundaria utilizando variantes del problema de triángulos imposibles planteado por Gardner (1986). Esto se llevó a cabo partiendo de la hipótesis de que los alumnos contestan recurriendo a las fórmulas de área y perímetro, ya que es un conocimiento más duradero en comparación con los principios de existencia y unicidad de triángulos, los que probablemente habrían olvidado después de un tiempo de haberlos estudiado:

- Para determinar la diferencia causada por el tiempo transcurrido desde que se estudió el tema se seleccionan tres grupos muestra: alumnos que lo estudiaron un año antes del experimento, alumnos que lo estudiaron un mes antes del experimento y alumnos que no lo han estudiado.
- Para determinar si existe diferencia con las medidas de los triángulos, se plantean tres posibilidades: medidas del problema original donde la suma de dos lados es igual a la medida del tercer lado; medidas más pequeñas donde la suma de dos lados es igual al tercer lado, y medidas más pequeñas donde la suma de dos lados sea menor al tercer lado.
- Para determinar si existe diferencia al presentar un diagrama de un triángulo en el problema se plantea presentar problemas con y sin representación gráfica del triángulo.

La selección de muestra es no probabilística. Aun así, los sujetos de experimentación debían cumplir con las siguientes características:

- Pertenecer a la misma comunidad educativa (contexto).
- Haber cursado la primaria con el mismo programa educativo (aún si fue en diferentes primarias).
- Un grupo control que aún no conozca el tema evaluado.
- Un grupo que hubiese estudiado el tema un mes antes de la prueba (programa 2017).
- Un grupo que hubiese estudiado el tema un año antes de la prueba (programa 2017).

Se seleccionó el nivel secundario ya que es cuando los estudiantes tienen su primer acercamiento a los criterios de existencia de triángulos. En la búsqueda de sujetos se decidió implementar el experimento en la escuela secundaria oficial Ambrosio Herrera, ubicada en el municipio de Tecali de Herrera durante el ciclo escolar 2019-2020, durante el mes de febrero.

Esto permitió la participación de 37 estudiantes en el grupo control que aún no conocían el tema, 87 estudiantes que lo habían estudiado solamente un mes antes de implementar el experimento y 36 estudiantes que habían estudiado el tema un año antes del experimento.

Los grupos que han estudiado el contenido "Analiza la existencia y unicidad en la construcción de triángulos", un mes o un año antes de la aplicación de la prueba, siguieron la misma secuencia:

- Armar triángulos con tiras de 2, 3, 5, 7 y 9 cm. Registrar aquellos triángulos que se pudieron formar y aquellos que no.
- Reunidos en equipos, discutir si, dadas las medidas de un triángulo, es posible determinar si existe o no.
- Trazar triángulos con regla y compás que cumpliesen con una serie de condiciones dadas (por ejemplo, que sus lados midan 2, 4 y 3 cm, o que sea isósceles de 10 y 3 cm)
- Argumentar los criterios bajo los cuales se puede determinar si un triángulo existe o no.

Al finalizar presentaron un examen en el que más de 80% contestó satisfactoriamente a un reactivo como el siguiente: "Dibuja un triángulo cuyos lados midan 9, 5 y 3 cm, o explica por qué no es posible dibujarlo". Esto permite tener certeza de que los estudiantes comprendieron bien los criterios de existencia de un triángulo, incluso si ya lo hubiesen olvidado.

Para la elaboración de los instrumentos se realizaron seis pruebas diferentes a partir de los implementados por Sánchez (2020) que se repartieron de forma aleatoria entre los tres diferentes grupos muestra, dando un total de 18 subgrupos. Al repartirse de forma aleatoria se generaron subgrupos con diferentes cantidades de integrantes.

Se implementaron 50 pruebas con las medidas originales del acertijo, 61 con medidas menores y 49 con medidas en que la suma de los lados más cortos es menor a la medida del lado más largo. Y en cuanto a incorporar una ilustración de un triángulo se implementaron 79 pruebas con imagen y 81 sin imagen.

Al finalizar se compararon los resultados de los grupos para observar si existen diferencias significativas utilizando un estadístico de prueba paramétrica para proporciones (Triola, 2009).

Resultados

Una vez implementado el experimento se procedió al análisis de los resultados propuestos por los alumnos, de los cuales se obtuvieron cuatro principales respuestas sin importar el subgrupo al que pertenecieron los estudiantes:

- *Resultado 1.* Observan que el triángulo no puede construirse (no existe). En la figura 2, inciso *a*, se observa que el sujeto suma los lados y describe, con ayuda de una ilustración, que ese triángulo no existe y, por lo tanto, tiene un área igual a 0.

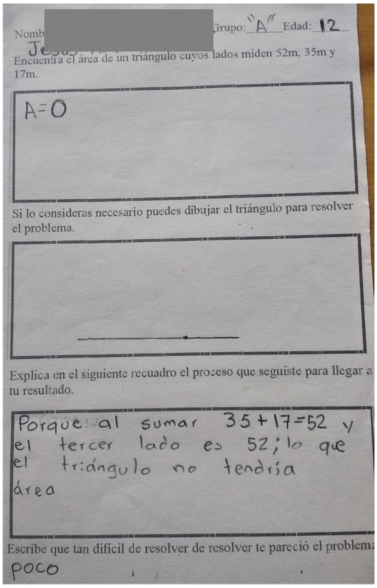
  En la figura 2, inciso *b*, el sujeto describe que el triángulo propuesto no puede formarse y ofrece una alternativa (como sugerencia para el profesor-investigador) de un triángulo que sí tendría área.

- *Resultado 2.* Utilizan fórmulas de área o de perímetro.
  En la figura 3, inciso *a*, el sujeto utiliza la fórmula de área del triángulo, pero al desconocer la altura de éste usa un lado como la base y otro lado como la altura.

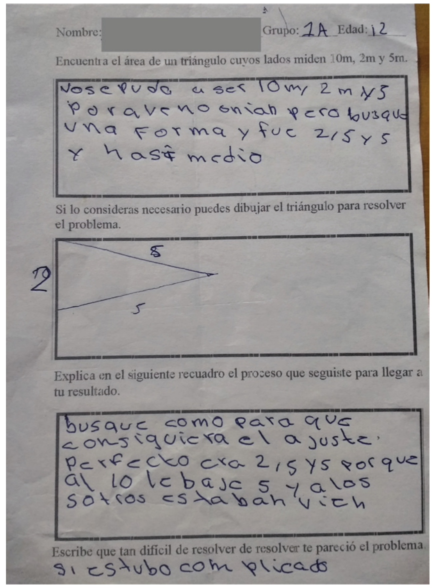
  En la figura 3, inciso *b*, el sujeto también emplea la fórmula del área del triángulo, pero en lugar de utilizar un lado como la altura realiza un diagrama y una serie de operaciones auxiliares para justificar la medida de una supuesta altura.

- *Resultado 3.* Realizan una representación errónea del triángulo.
  En la figura 4 se observa que el sujeto realiza una representación del triángulo que no coincide con las medidas proporcionadas en el problema. Además, parece olvidar que el acertijo consiste en encontrar el área de dicho triángulo. Sorprendentemente, 15% de alumnos obtienen resultados similares.

Figura 2. *Resultados donde los estudiantes observan que la figura no puede construirse como un triángulo*

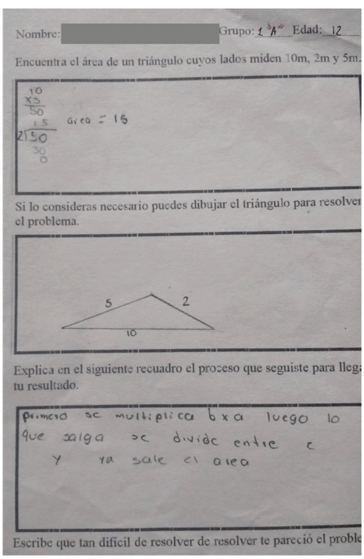


a)

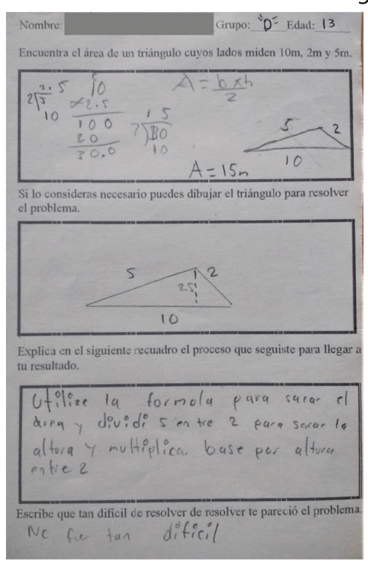


b)

Figura 3. *Resultados donde los estudiantes utilizan la fórmula del área de un triángulo*

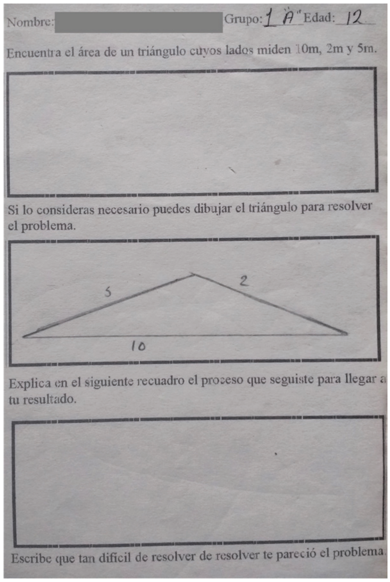


a)



b)

Figura 4. *Resultados donde los estudiantes sólo realizan una representación errónea del triángulo*


Nombre: [redacted] Grupo: 1 "A" Edad: 12

Encuentra el área de un triángulo cuyos lados miden 10m, 2m y 5m.

Si lo consideras necesario puedes dibujar el triángulo para resolver el problema.

Explica en el siguiente recuadro el proceso que seguiste para llegar a tu resultado.

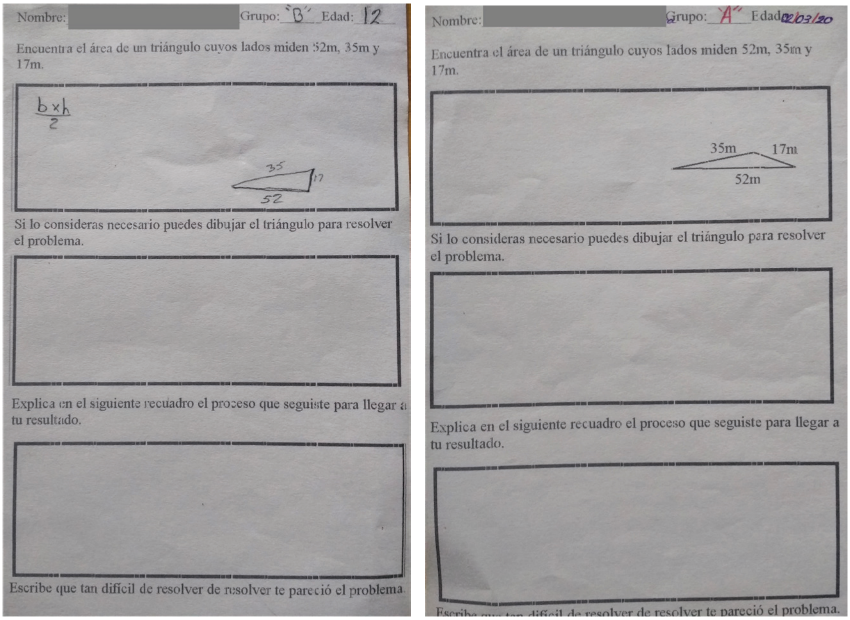
Escribe que tan difícil de resolver de resolver te pareció el problema

- *Resultado 4.* Omiten.
  En la figura 5, inciso *a*, se observa que el sujeto no escribió ninguna respuesta. Cuando se le pregunto por qué no había intentado contestar el acertijo, respondió: "No sé cómo responderlo".
  En la figura 5, inciso *b*, se observa que el sujeto plantea la fórmula del área de un triángulo, pero no propone ninguna respuesta.

Una vez concluida la clasificación de resultados se procede a su captura. En la tabla 1 se muestra la frecuencia de resultados dependiendo del subgrupo al que pertenecían los sujetos, mientras que en la tabla 2 se muestran los resultados en porcentajes, lo cual permite llevar a cabouna comparación más sencilla entre cada subgrupo.

Se observa un bajo porcentaje de alumnos que son capaces de identificar que los triángulos no pueden ser construidos, principalmente en los grupos compuestos por alumnos que no han estudiado el tema o que lo estudiaron un año antes del experimento. En esos casos sólo lograron darse cuenta de que el triángulo no existe en el tercer tipo de problemas, de acuerdo con la medida de sus lados.

FIGURA 5. *Resultados donde los estudiantes omiten*



a) *b)*

Al mismo tiempo se observa un alto porcentaje de alumnos que recurren a la fórmula del área o el perímetro de un triángulo (incluso de 100% en algunos subgrupos). Esto es congruente con el planteamiento de Brousseau (1983) respecto de los obstáculos de aprendizaje que expone que un alumno recurre a un conocimiento previo que ha sido exitoso en otras ocasiones, incluso si no es adecuado para la situación planteada.

Para corroborar la idea de que un obstáculo puede resurgir a causa del olvido se espera que el grupo control, que aún no ha estudiado las propiedades de existencia de triángulos, y el grupo que lo estudió un año antes del experimento, tengan un comportamiento similar, mientras que el grupo que estudió el tema tan sólo un mes antes del experimento tenga una cantidad superior de respuestas correcta y una cantidad inferior de respuestas que recurren a la fórmula del área o el perímetro del triángulo. Esto significaría que han superado un obstáculo mientras que ese mismo obstáculo ha resurgido después de un año.

Tabla 1. *Frecuencias de resultados por cada subgrupo*

Grupo	*Conoce el tema*	*Tiempo transcurrido*	*Medidas d el triángulo*	*Tiene una imagen*	*Observa que el triángulo no existe*	*Utiliza fórmula de área o perímetro*	*Realiza una representación incorrecta*	*Omitió*	*Total*
1	Sí	1 mes	52, 35 y 17	Sí	4	5	3	1	13
2	No	No aplica	52, 35 y 17	Sí	0	5	0	1	6
3	Sí	1 año	52, 35 y 17	Sí	0	6	0	0	6
4	Sí	1 mes	52, 35 y 17	No	3	10	3	1	17
5	No	No aplica	52, 35 y 17	No	0	2	0	0	2
6	Sí	1 año	52, 35 y 17	No	0	6	0	0	6
7	Sí	1 mes	12, 8 y 4	Sí	5	9	3	1	18
8	No	No aplica	12, 8 y 4	Sí	0	6	1	0	7
9	Sí	1 año	12, 8 y 4	Sí	0	4	1	0	5
10	Sí	1 mes	12, 8 y 4	No	5	9	3	1	18
11	No	No aplica	12, 8 y 4	No	0	5	3	0	8
12	Sí	1 año	12, 8 y 4	No	0	5	0	0	5
13	Sí	1 mes	10, 2 y 5	Sí	2	4	3	0	9
14	No	No aplica	10, 2 y 5	Sí	0	7	0	1	8
15	Sí	1 año	10, 2 y 5	Sí	1	4	2	0	7
16	Sí	1 mes	10, 2 y 5	No	4	5	2	1	12
17	No	No aplica	10, 2 y 5	No	1	5	0	0	6
18	Sí	1 año	10, 2 y 5	No	1	6	0	0	7
				Total	26	103	24	7	160

Tabla 2. *Porcentaje de resultados por cada subgrupo*

Grupo	*Conoce el tema*	*Tiempo transcurrido*	*Medidas del triángulo*	*Tiene una imagen*	*Observa que el triángulo no existe*	*Utiliza fórmula de área o perímetro*	*Realiza una representación incorrecta*	*Omitió*	*Total*
1	Sí	1 mes	52, 35 y 17	Sí	30.77	38.46	23.08	7.69	100.00
2	No	No aplica	52, 35 y 17	Sí	*0.00*	83.33	0.00	16.67	100.00
3	Sí	1 año	52, 35 y 17	Sí	*0.00*	*100.00*	0.00	0.00	100.00
4	Sí	1 mes	52, 35 y 17	No	17.65	58.82	17.65	5.88	100.00
5	No	No aplica	52, 35 y 17	No	*0.00*	*100.00*	0.00	0.00	100.00
6	Sí	1 año	52, 35 y 17	No	*0.00*	*100.00*	0.00	0.00	100.00
7	Sí	1 mes	12, 8 y 4	Sí	27.78	50.00	16.67	5.56	100.00
8	No	No aplica	12, 8 y 4	Sí	*0.00*	85.71	14.29	0.00	100.00
9	Sí	1 año	12, 8 y 4	Sí	*0.00*	80.00	20.00	0.00	100.00
10	Sí	1 mes	12, 8 y 4	No	27.78	50.00	16.67	5.56	100.00
11	No	No aplica	12, 8 y 4	No	*0.00*	62.50	37.50	0.00	100.00
12	Sí	1 año	12, 8 y 4	No	*0.00*	*100.00*	0.00	0.00	100.00
13	Sí	1 mes	10, 2 y 5	Sí	22.22	44.44	33.33	0.00	100.00
14	No	No aplica	10, 2 y 5	Sí	*0.00*	87.50	0.00	12.50	100.00
15	Sí	1 año	10, 2 y 5	Sí	14.29	57.14	28.57	0.00	100.00
16	Sí	1 mes	10, 2 y 5	No	33.33	41.67	16.67	8.33	100.00
17	No	No aplica	10, 2 y 5	No	16.67	83.33	0.00	0.00	100.00
18	Sí	1 año	10, 2 y 5	No	14.29	85.71	0.00	0.00	100.00
				Total	16.25	64.38	15.00	4.38	100.00

TABLA 3. *Porcentaje de respuestas respecto del tiempo transcurrido desde que se estudiaron los criterios de existencia de triángulos*

Tiempo	*Observa que el triángulo no existe*	*Utiliza fórmula de área o perímetro*	*Realiza una representación incorrecta*	*Omitió*	*Total*
1 mes	26.44	48.28	19.54	5.75	100.00
No aplica	2.70	81.08	10.81	5.41	100.00
1 año	5.56	86.11	8.33	0.00	100.00
Total	16.25	64.38	15.00	4.38	100.00

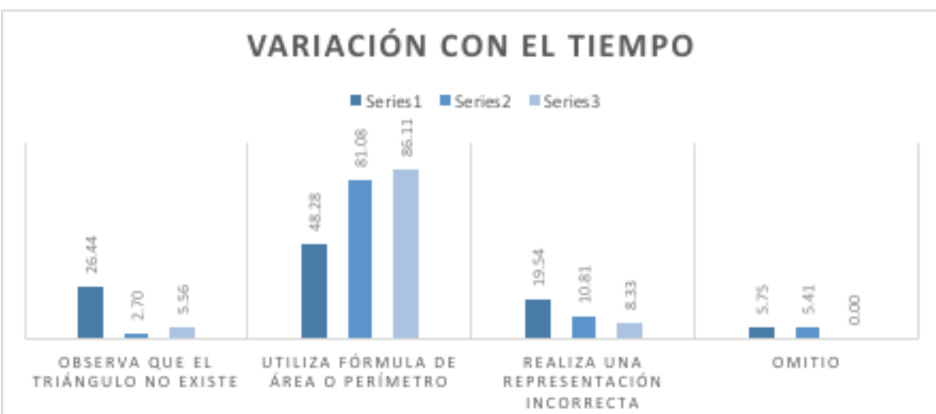
Para comparar estos comportamientos se representan los tres grupos de forma porcentual en la tabla 3 y en la figura 6.

Al observar la figura 6 se puede ver el comportamiento que se esperaba, pero para confirmar la hipótesis se recurre a un estadístico de prueba para proporciones donde se comienza por comparar la cantidad de respuestas correctas:

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0.2644 - 0.027}{\sqrt{\frac{(0.027)\,(0.973)}{87}}} = 13.66$$

- Donde el área crítica de cola derecha con $\alpha = 0.05$ tiene un valor crítico $= 1.645$

FIGURA 6. *Porcentajes de respuestas respecto del tiempo transcurrido desde que se estudiaron los criterios de existencia de triángulos*



- $\hat{p}$ = porcentaje de alumnos que estudiaron el tema un mes antes y observan que el triángulo no puede construirse.
- n = número de sujetos que estudiaron el tema un mes antes del experimento.
- p = porcentaje de alumnos del grupo control que observan que el triángulo no existe.
- q = alumnos del grupo control que no observaron que el triángulo no existe.

Ya que $z = 13.66$ es mayor que el valor crítico = 1.645 se puede concluir que existe una cantidad considerablemente mayor de alumnos que observan que el triángulo no existe en el grupo que estudió el tema un mes antes del experimento respecto del grupo control. Utilizamos el mismo procedimiento para comparar la reducción de alumnos que utilizan las fórmulas de área y perímetro:

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0.4848 - 0.8108}{\sqrt{\frac{(0.8108)\,(0.1892)}{87}}} = -7.811$$

- Donde el área crítica de cola izquierda con $\alpha = 0.05$ tiene valor crítico $= -1.645$
- $\hat{p}$ = porcentaje de alumnos que estudiaron el tema un mes antes y utilizan las fórmulas de área o perímetro.
- n = número de sujetos que estudiaron el tema un mes antes del experimento.
- p = porcentaje de alumnos del grupo control que utilizan las fórmulas de área o perímetro.
- q alumnos del grupo control que no utilizan las fórmulas de área o perímetro.

Ya que $z = -7.811$ es menor que el valor crítico = −1.645 se puede concluir que existe una cantidad considerablemente menor de alumnos que utilizan las fórmulas de área y perímetro en el grupo que estudió el tema un mes antes del experimento respecto del grupo control. Lo anterior comprueba que al estudiar el contenido "criterios de existencia de un triángulo" es posible superar este obstáculo de aprendizaje.

Para comprobar que, después de un año de haber estudiado el tema, el obstáculo regresa, comparamos mediante un estadístico de prueba el grupo control y aquel que estudió el tema un año antes del experimento. De no encontrar diferencias significativas se podría concluir que presentan los mismos obstáculos:

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0.0556 - 0.027}{\sqrt{\frac{(0.027)\,(0.973)}{36}}} = 1.058$$

- Donde el área crítica de dos colas con $\alpha = 0.05$ tiene un valor crítico = 1.96
- $\hat{p}$ = porcentaje de alumnos que estudiaron el tema un año antes y observan que el triángulo no puede construirse.
- n = número de sujetos que estudiaron el tema un año antes del experimento.
- p = porcentaje de alumnos del grupo control que observan que el triángulo no existe.
- q = alumnos del grupo control que no observaron que el triángulo no existe.

Ya que el valor $z = 1.058$ es menor al valor crítico = 1.96 se considera que no existe una diferencia considerable entre la cantidad de alumnos que observan que dicho triángulo puede ser construido en ambos grupos. Por último, comparamos las respuestas que recurren a las fórmulas de área y perímetro de estos grupos:

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0.8611 - 0.8108}{\sqrt{\frac{(0.8108)\,(0.1892)}{36}}} = 0.7705$$

- Donde el área crítica de dos colas con $\alpha = 0.05$ tiene valor crítico = 1.96
- $\hat{p}$ = porcentaje de alumnos que estudiaron el tema un año antes y utilizan las fórmulas de área o perímetro.
- n = número de sujetos que estudiaron el tema un año antes del experimento.
- p = porcentaje de alumnos del grupo control que utilizan las fórmulas de área o perímetro.
- q = alumnos del grupo control que no utilizan las fórmulas de área o perímetro.

Ya que $z = 0.7705$ es menor que el valor crítico = 1.96 se puede concluir que no existe una diferencia significativa entre ambos grupos. Es decir, tanto el grupo que no ha estudiado el contenido de criterios de existencia de triángulos como aquel que lo estudió un año antes mantienen un comportamiento similar. Se deduce que el obstáculo (utilizar la fórmula del área o perímetro) ha regresado después de un año.

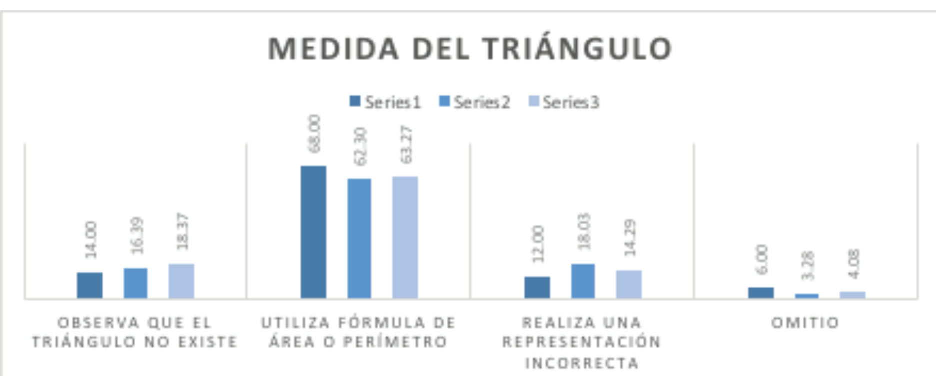
Para comprobar que las medidas de los triángulos propuestos en el acertijo son un factor relevante, se esperaría una diferencia en los alumnos capaces de contestar el acertijo correctamente. La tabla 4 y la figura 7 presentan los resultados de los grupos.

A primera vista no es posible observar ninguna diferencia significativa entre los tres grupos. Para confirmarlo recurrimos al estadístico de prueba para proporciones con el objeto de comparar las respuestas correctas entre el grupo con las medidas del acertijo original y aquel donde la suma de los lados más cortos es menor a la longitud del lado más largo, ya que tienen la mayor diferencia en este tipo de respuesta.

Tabla 4. *Porcentajes de resultados respecto de las medidas del triángulo en el acertijo*

Medidas	*Observa que el triángulo no existe*	*Utiliza fórmula de área o perímetro*	*Realiza una representación incorrecta*	*Omitió*	*Total*
52, 35 y 17	14.00	68.00	12.00	6.00	100.00
12, 8 y 4	16.39	62.30	18.03	3.28	100.00
10, 2 y 5	18.37	63.27	14.29	4.08	100.00
Total	16.25	64.38	15.00	4.38	100.00

Figura 7. *Porcentajes de resultados respecto de las medidas del triángulo en el acertijo*



$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0.0.1837 - 0.14}{\sqrt{\frac{(0.14)\,(0.86)}{49}}} = 0.8815$$

- Donde el área crítica de dos colas con $\alpha = 0.05$ tiene un valor crítico = 1.96
- $\hat{p}$ = porcentaje de alumnos que contestaron el acertijo donde la suma de las medidas de los lados más cortos es menor a la longitud del lado más largo y observan que el triángulo no puede construirse.
- n número de sujetos que contestaron el acertijo donde la suma de las medidas de los lados más cortos es menor a la longitud del lado más largo.
- p = porcentaje de alumnos que contestaron el acertijo original y observan que el triángulo no existe.
- q = alumnos que contestaron el acertijo original y no observaron que el triángulo no existe.

Ya que el valor $z = 0.8815$ es menor al valor crítico = 1.96 se considera que no existe una diferencia significativa causada por las medidas de triángulo del acertijo.

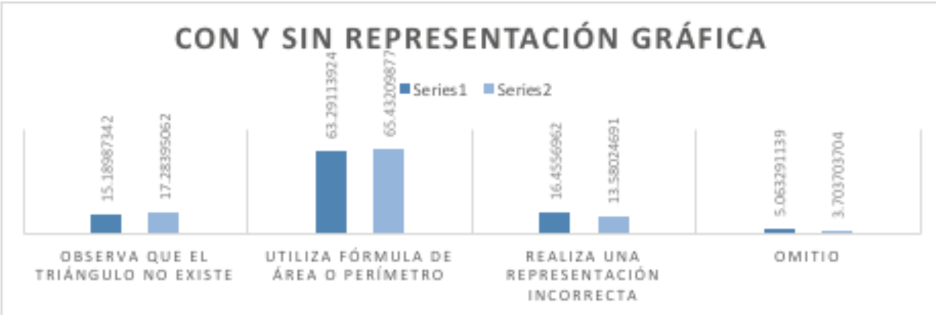
Finalmente analizamos los resultados respecto de los acertijos que incluían o no una ilustración. A continuación se presentan en la tabla 5 y en su gráfica correspondiente (figura 8).

TABLA 5. *Porcentajes de respuestas según la representación gráfica*

Ilustración	***Observa que el triángulo no existe***	***Utiliza fórmula de área o perímetro***	***Realiza una representación incorrecta***	***Omitió***	***Total***
Sí	15.1898734	63.2911392	16.4556962	5.06329114	100
No	17.2839506	65.4320988	13.5802469	3.7037037	100
Total	16.25	64.375	15	4.375	100

Tampoco es posible identificar diferencia entre ambos grupos, por lo cual recurrimos al estadístico de prueba para proporciones con objeto de comprobarlo. Se utilizan los grupos de alumnos que observan que el triángulo no puede construirse.

Figura 8. *Porcentajes de respuestas según la representación gráfica*



$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0.172839 - 0.151899}{\sqrt{\frac{(0.151899)\,(0.848101)}{49}}} = 0.525$$

- Donde el área crítica de dos colas con $\alpha = 0.05$ tiene un valor crítico = 1.96
- $\hat{p}$ = porcentaje de alumnos que contestaron el acertijo sin una ilustración y observan que el triángulo no puede construirse.
- n = número de sujetos que contestaron el acertijo sin ilustración.
- p = porcentaje de alumnos que contestaron el acertijo con ilustración y observan que el triángulo no existe.
- q = alumnos que contestaron el acertijo con ilustración y no observaron que el triángulo no existe.

Ya que el valor $z = 0.525$ es menor al valor crítico = 1.96 se considera que no existe una diferencia significativa entre colocar o no una ilustración de un triángulo en el acertijo.

Conclusiones

Al analizar los resultados del experimento se observa que incluir o no una imagen de un triángulo en el problema tiene poco efecto en la forma en que los alumnos plantean respuestas.

No parece existir diferencia causada por modificar las medidas de los lados del triángulo en las respuestas propuestas por los alumnos. Sin embargo, distanciar los valores entre los lados de un triángulo puede ayudar al estudiante a percibir en qué casos los lados nunca podrán formar tres vértices.

Más interesante es que los alumnos intentan responder al problema con los conceptos matemáticos que mejor conocen, incluso si no son pertinentes para la situación planteada. Esto comprueba el planteamiento de Brousseau (1983) respecto de los obstáculos de aprendizaje.

El tiempo transcurrido entre el estudio del contenido "criterios de existencia y unicidad en la construcción de triángulos" es un factor relevante en la forma en que los alumnos plantean respuestas a este problema, ya que son capaces de resolverlo correctamente durante un tiempo, pero después de un año responderán como si no hubiesen estudiado el tema en lo absoluto.

Es pertinente sugerir a los profesores que implementen, en ciertos intervalos de tiempo, ejercicios en que la suma de los dos lados menores de un triángulo sea igual o menor que el lado mayor; entonces ese triángulo no existe, por lo cual no tiene área ya que deja de ser un triángulo y pasa a ser una figura degenerada. Esto, con el propósito de generar un aprendizaje más duradero y, al mismo tiempo, reducir la reaparición de obstáculos antes superados por los estudiantes.

Referencias

Brousseau, G. (1983). Obstacles épistémologiques et problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

D'Amore, B. (2013). Capítulo 6: Conceptos. Obstáculos. *Didáctica de la matemática* (pp. 205-229). Nueva Editorial Iztaccíhuatl.

Gardner, M. (1986). Acertijos engañosos. Problema 14. *Matemáticas para divertirse*, (p. 85). Dover.

Murre, J., & Dros, J. (2015). Replication and Analysis of Ebbinghaus' Forgetting Curve. *Plos One, 10*(7). https://doi.org/10.1371/journal.pone.0120644

Rohrer, K., & Taylor, D. (2009). The Effects of Interleaved Practice. *Applied Cognitive Psychology, 24*(6). https://doi.org/10.1002/acp.1598

Sánchez, E. (2020). *Test de razonamiento lógico y test de reflexión cognitiva* *como posibles predictores del desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos* (Tesis de maestría). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2011). Educación básica: Secundaria. Matemáticas. En *Programas de estudio 2011, Guía para el maestro.*

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2017). Matemáticas: Educación secundaria. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de valuación. En *Aprendizajes clave para la educación integral.*

Triola, M. (2009). 8: Pruebas de hipótesis. En *Estadística* (10ª ed.) (pp. 384-453). Pearson Education.

Weisstein, E. (s. f.). Degenerate. En *MathWorld-A Wolfram Web Resource*. https://mathworld.wolfram.com/Degenerate.html

Capítulo 12. Validación de un conjunto de tareas para nivel medio superior a través de la taxonomía de tareas auténticas

David Nexticapan Cortes
Estela Juárez Ruiz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo diseñar un conjunto de tareas que cumplan con la taxonomía de tareas auténticas propuesta por Palm y Nyström. Para ello se utilizó un enfoque cuantitativo del tipo prueba de hipótesis. Se modificaron cuatro tareas tomadas de un libro de texto de álgebra. Se desarrolló una prueba de validación de autenticidad con base en la teoría de Palm, la cual se realizó a través del juicio de cinco expertos en esta teoría. Mediante el estadístico de Aiken se analizó la concordancia entre los expertos para cada aspecto de la taxonomía. Los resultados mostraron valores bajos de concordancia en algunos aspectos del análisis preliminar, pero después de atender las sugerencias de los expertos y modificar las tareas, se realizó una segunda valoración por los mismos jueces y se lograron altos niveles de concordancia en todos los aspectos, lo cual dio como resultado un conjunto de cuatro tareas más auténticas.

Palabras clave: tarea, taxonomía, tareas auténticas, validación.

Introducción

Los problemas que se plantean a los alumnos en clase pueden diferir considerablemente de los que ellos mismos experimentan o viven fuera del aula. Es más, lo que para los profesores puede ser un problema relevante y significativo, puede resultar trivial o carecer de sentido para los alumnos (Pozo, 1994).

Palm (2006) desarrolló un marco para la concordancia entre tareas escolares matemáticas y situaciones del mundo real más allá del salón de clases y actualmente hay numerosos estudios que se sustentan en esta teoría de tareas auténticas.

De León (2020) realizó un análisis de problemas en libros de textos de México donde los problemas propuestos trataban de acercar a los estudiantes a la realidad, aunque hubiera fallas en su formulación. Por otra parte, Cáceres, Chamoso y Cárdenas (2015) plantearon que los estudiantes para maestros propusieran una situación-problema en que todos los aspectos de autenticidad se valoraran con una calificación de cero y trabajar en la modificación de cada aspecto de manaera aislada para, finalmente, tratar de conseguir una tarea auténtica.

Por su parte, Nexticapan y Juárez (en prensa) realizaron un análisis de los procesos de resolución que una estudiante de nivel medio superior lleva a cabo en una tarea no auténtica y, posteriormente la misma tarea, ya modificada, en una auténtica. En este trabajo se pudo constatar que la estudiante pudo resolver con mayor facilidad la tarea auténtica que la no auténtica, corroborando la hipótesis de Palm (2006) de que un aumento en la autenticidad de la tarea, incluso cuando se logra únicamente mediante una modificación del texto de la tarea, aumenta la tendencia de los alumnos a usar sus conocimientos del mundo real de manera efectiva.

Planteamiento del problema

Actualmente, la enseñanza se encuentra dirigida de manera estricta por el profesor, donde se prioriza la acumulación de conocimientos y no el logro de aprendizajes profundos. Todo lo anterior produce conocimientos fragmentados con limitada aplicabilidad, relevancia, pertinencia y vigencia en la vida cotidiana de los estudiantes (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017).

Si bien es cierto que la mayoría de los docentes que ven su tarea como la transmisión de un conocimiento acabado y abstracto tienden a adoptar un estilo expositivo, su enseñanza está impregnada de definiciones y de procedimientos algorítmicos. Solo al final, y en contados casos, aparece un problema contextualizado como aplicación de lo que supuestamente se ha aprendido en clase (Romero, 2013).

Schoenfeld (2013, cit. en Cáceres *et al.*, 2015) señalaron que la resolución de problemas es la base de muchas tareas que se proponen en el aula de matemáticas. Por ello, los maestros deben ser buenos resolutores de problemas, pero, sobre todo, deben valorar críticamente la calidad de las actividades matemáticas que se implementarán en el aula, además de ser capaces de crearlas y/o modificarlas para desarrollar tareas adecuadas al objetivo que se persiga.

La resolución de problemas es una actividad escolar de gran importancia, pero, como mencionan Aravena *et al.* (2007, cit. en Muñoz Mesa, Londoño Orrego, Jaramillo López & Villa-Ochoa, 2014), si esta actividad se centra sólo en el objetivo de aprender y aplicar definiciones y propiedades, se pueden desatender los aspectos relacionados con la comprensión y la interpretación de los estudiantes sobre el mundo que los rodea. Además, Palm y Nyström (2009) afirmaron que en la resolución de problemas existe una tendencia de los alumnos a no hacer un uso adecuado de sus conocimientos del mundo real y suspenden el requisito de que sus soluciones deben tener sentido en relación con las situaciones reales, lo cual se debe a dos razones muy importantes:

- El uso frecuente de estrategias de solución que pueden caracterizarse como superficiales. Estas estrategias de solución tienen como consecuencia no implicarse en un análisis cuidadoso de las situaciones de la tarea, sino que tienden a centrarse en los números dados en la tarea.
- Las creencias de los estudiantes sobre la resolución de tareas matemáticas escolares, en general, y la resolución de problemas verbales, en particular. Estas creencias no incluyen el requisito de que las primeras y la vida real deben ser consistentes. Por el contrario, incluyen las ideas de que todas las tareas tienen una solución, que la solución es alcanzable para los estudiantes y que la respuesta es sólo un número.

De este modo Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower (2016) afirman que trabajar problemas con contextos realistas cumple un papel esencial en el aprendizaje matemático de los alumnos, ya que son puntos de partida en el proceso de enseñanza y aprendizaje para producir matemática y dominios de aplicación de la misma.

Por su parte, Cáceres, Chamoso y Cárdenas (2015) afirmaron que determinar la autenticidad de una tarea es un proceso complejo, pues se deben establecer diversas dimensiones; por ejemplo la proximidad del evento planteado en relación con una alta probabilidad de encontrarlo en la vida real, la adecuación de la pregunta realizada al evento propuesto, la concordancia de la información que se ofrece con la pregunta planteada, la presencia explícita en el contexto figurativo del propósito para el que se debe dar respuesta y la especificidad de los datos de la situación propuesta.

De esta manera, surge la necesidad de que el profesor pueda contar con tareas o cuestionarios de tareas auténticos o lo más auténticos posibles validados por un grupo de expertos, para poder utilizarlos como instrumentos de evaluación, reforzamiento de los conocimientos o aplicación de éstos, y para la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes.

Por lo anterior, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo desarrollar una validación de autenticidad de un conjunto de tareas extraídas de un libro de texto y su modificación para mejorar su autenticidad?

El objetivo general de este trabajo es desarrollar una validación de autenticidad de un conjunto de tareas extraídas de un libro de texto y su modificación para su mejora.

La revisión de la literatura permitió identificar qué investigaciones bajo la perspectiva de la taxonomía de tareas auténticas propuesta por Palm y Nyström (2009) es vasta; sin embargo, el tema de la valoración de la autenticidad de tareas por jueces expertos es escasa. Los autores no encontraron ningún estudio que sometiera a juicio de expertos el análisis de autenticidad de las tareas propuestas en sus trabajos, sino que la valoración de la autenticidad estaba a consideración del propio investigador.

La importancia de este trabajo radica en que proporciona un procedimiento para la validación de un instrumento que puede ser un cuestionario, un conjunto de problemas o un conjunto de tareas sustentadas en un marco teórico determinado, a través de la evaluación de jueces expertos y la utilización de un estadístico con una prueba de hipótesis para evaluar la concordancia entre éstos; en este caso, la validación de autenticidad de un conjunto de tareas.

Marco teórico

Margolinas (2013) se define tarea como todo aquello que el profesor utiliza para realizar demostraciones matemáticas, para el seguimiento del aprendizaje del estudiante o para solicitar que los mismos hagan algo. En ese sentido, el término *tarea* abarca, por ejemplo, la realización de ejercicios rutinarios o repetitivos, la construcción de objetivos o ejemplos que refuercen las definiciones o la resolución de problemas.

Por primera vez, Archbald y Newmann (1988, cit. en Palm, 2006) introdujeron el término *autenticidad en el aprendizaje y la evaluación* como "cualidades necesarias para muchos logros humanos importantes más allá del éxito en la escuela" (p. 42). Posteriormente, Newmann, Secada y Wehlage (1995, cit. en Palm, 2006) afirmaron que una *tarea* "pide a los estudiantes que aborden un concepto, problema o cuestión que sea similar a uno que hayan encontrado o que puedan encontrar en la vida más allá del aula" (p. 42).

A través de diferentes interpretaciones para el término autenticidad, el interés de Palm (2006) fue desarrollar un marco teórico para la concordancia entre tareas escolares matemáticas y situaciones del mundo real más allá del salón de clases. Este marco, según Palm (2006), puede ser utilizado para analizar la autenticidad de una tarea y hacer una modificación de ésta para volverla más auténtica.

Por lo anterior, la teoría de tareas auténticas de Palm (2006) alude a la correspondencia entre problemas verbales y situaciones del mundo real. Esta correspondencia se basa en la representación simplificada (simulación) de esas situaciones. El resultado de esta correspondencia entre problemas verbales y situaciones del mundo real es a lo que Palm le llama tarea. En este trabajo se adoptará esta concepción de tarea.

Palm (2006) propuso los siguientes aspectos de las situaciones de la vida real que se consideran importantes en su simulación: el evento, la pregunta, la información y los datos, la presentación, las estrategias de solución, las circunstancias, los requisitos de solución y el propósito, algunas de ellas con diversos subaspectos, como se puede ver en la tabla 1.

TABLA 1. *Aspectos de las situaciones de la vida real considerados importantes en su simulación*

A. Evento	*F. Circunstancias*
B. Pregunta	F1. Disponibilidad de herramientas externas
C. Información/datos	F2. Orientación
C1. Existencia	F3. Consulta y colaboración
C2. Realismo	F4. Oportunidades de discusión
C3. Especificidad	F5. Tiempo
D. Presentación	F6. Consecuencias del éxito o fracaso en la resolución de tareas
D1. Modo	*G. Requisitos de solución*
D2. Uso del lenguaje	*H. Propósito*
E. Estrategias de solución	H1. Propósito en el contexto figurativo
E1. Disponibilidad	H2. Propósito en el contexto social
E2. Plausibilidad experimentada	

FUENTE: Palm (2006).

Según este autor, siempre es necesaria una restricción de la exhaustividad. No es posible simular todos los aspectos involucrados en una situación en la vida real y, consecuentemente, no es posible simular situaciones extraescolares de manera que las condiciones para la resolución de la tarea sean exactamente las mismas en la situación escolar (Palm, 2006, p. 43).

En trabajos posteriores, Palm y Nyström (2009) utilizaron el término *autenticidad* para referirse a tareas contextualizadas que emulan con un grado razonable una situación de la vida real. Además, afirmaron que una tarea escolar nunca puede simular completamente una situación extraescolar. Sin embargo, a veces la tarea escolar puede organizarse y formularse de tal forma que muchos de los aspectos de una situación de la vida real se simulen bastante bien, permitiendo a los estudiantes resolver la tarea en condiciones muy cercanas a la realidad.

Palm y Nyström (2009) proponen una descripción breve y sintetizada de sólo cinco aspectos (taxonomía) del marco expuesto en Palm (2006), como los más importantes que debe cumplir una tarea para considerase auténtica: evento, pregunta, propósito en el contexto de la tarea, uso del lenguaje, e información y datos. Las definiciones de estos aspectos se presentan a continuación:

- *Evento.* Que el evento descrito en la tarea escolar haya tenido lugar en la vida real o tenga alta probabilidad de ocurrir.
- *Pregunta.* La pregunta en la tarea escolar es una que en realidad podría plantearse en el evento de la vida real descrito.
- *Propósito en el contexto de la tarea.* El propósito de la tarea debe ser tan claro para los estudiantes en la situación escolar como lo sería en la situación de la vida real correspondiente.
- *Uso del lenguaje.* La tarea escolar no incluye, por ejemplo, términos difíciles que impidan a los estudiantes la resolución de las tareas.
- *Información/datos.* Se refiere a la existencia entre la información disponible en la tarea escolar y la información disponible en la situación simulada.

Método

Para el diseño de esta investigación se utilizó un enfoque cuantitativo del tipo prueba de hipótesis para el análisis de la concordancia entre los jueces. Este estudio se desarrolló en tres fases secuenciales de la siguiente manera.

En la primera fase se realizó un muestreo por conveniencia que se define como "la selección de aquellos casos que son los de más fácil acceso en determinadas condiciones" (Flick, 2012, p. 85). Se seleccionaron cuatro tareas de un libro de texto de matemáticas de primer año de bachillerato, cuya autenticidad fue valorada por cinco expertos, con el objetivo de beneficiarse de su retroalimentación. Los expertos cumplen con los siguientes criterios: poseen un conocimiento especializado de la teoría de situaciones auténticas, han realizado investigación sobre ella, son docentes recomendados por sus pares y realizan una actualización continua en contenidos tanto de matemática como de educación matemática.

En la segunda fase se analizó la concordancia entre los jueces para cada aspecto de la taxonomía de tareas auténticas. Atendiendo las sugerencias de los jueces expertos, se llevó a cabo la modificación de aquellas tareas que resultaron no auténticas para volverlas más auténticas. Estas tareas modificadas fueron sometidas nuevamente al juicio de los mismos expertos para valorar su autenticidad.

En la tercera fase se realizó la validación de autenticidad de este conjunto de tareas a través del estadístico de Aiken (Aiken, 1985) y se obtuvo como resultado un cuestionario mejorado con cuatro tareas más auténticas.

Respecto del juicio de expertos, se seleccionó un conjunto de cuatro tareas tomadas de un libro de texto de matemáticas, donde los jueces evaluaron cada aspecto de la taxonomía de autenticidad. Las definiciones de cada categoría extraídas de Palm y Nyström (2009) se muestran en la tabla 2.

TABLA 2. *Descripción de las categorías de evaluación de las tareas*

Categoría	***Definición***
Evento	El evento ha ocurrido o tiene una ocasión de ocurrir en la vida real.
Pregunta	Las preguntas se pueden presentar realmente en el acontecimiento del mundo real descrito.
Propósito en el contexto de la tarea	El propósito de la tarea es claro en la situación escolar, como lo sería en la situación de la vida real correspondiente.
Uso del lenguaje	El lenguaje usado en la tarea escolar es comprensible y tiene total grado de fidelidad como el que se usa en la situación de la vida real correspondiente.
Información y datos	El realismo de la información y los datos proporcionados en la tarea escolar es idéntico a los de la situación de la vida real correspondiente.

Cada tarea se sometió a juicio de expertos con el formato de la figura 1. Este formato contiene la tarea a evaluar (extraído de Ruiz, 2016) y las categorías a evaluar: evento, pregunta, propósito en el contexto de la tarea, uso del lenguaje, e información y datos.

La calificación otorgada por cada juez consistió en un número en una escala ordinal de 1 a 4, siendo 1 *no cumple con el criterio*, 2 *bajo nivel*, 3 *moderado nivel* y 4 *alto nivel*. La definición de cada nivel se muestra en la tabla 3.

Para analizar la concordancia entre los jueces en su valoración se utilizó el estadístico *V* de Aiken (Aiken, 1985), que aunque es un estadístico diseñado para realizar validez de contenido por medio del juicio de exper-

FIGURA 1. *Formato de presentación de la tarea para la evaluación de los jueces*

Tarea escolar	*Evento*	*Preguntas*	*Propósito*	*Uso del lenguaje*	*Información y datos*
TU COMPUTADORA PERSONAL Un almacén informa que a partir de la siguiente semana aumentará 10% el precio de una computadora portátil, al tiempo que anuncia una rebaja de 10% en todos los artículos para esos días. ¿Me conviene comprar el equipo antes de que aumente de precio, o cuando aplique la rebaja? ¿Cómo podría predecir cuál será el nuevo precio para cualquier computadora, bajo estas condiciones?					
Observaciones:					

tos, es aplicable para validar la concordancia entre expertos, ya que utiliza el mismo esquema de valoración. Este estadístico es aplicable a pequeñas o grandes muestras de jueces y categorías de calificación en la escala ordinal. El rango de valores que toma este estadístico es de 0 a 1; un valor de $V = 0$ se obtiene cuando todos los jueces seleccionan la calificación mínima, y un valor de $V = 1$, cuando seleccionan la calificación más alta posible.

El procedimiento para determinar el coeficiente V de Aiken comienza con las calificaciones de una sola tarea por evaluadores (jueces). Las calificaciones de validez se pueden hacer en cualquier escala conveniente de c números enteros sucesivos; en este instrumento se utilizó 1, 2, 3 y 4, siendo 1 la calificación más baja y 4 la calificación más alta.

Se designa como hi al número entero más alto asignado a una categoría, como al número entero más bajo asignado a una categoría y como r a la calificación de validez de la tarea que recibió por parte del evaluador. Los valores de r se transforman en $s = r - lo$ si $lo < hi$ y $s = lo - r$ si $hi < lo$. Los valores de s para todos los jueces se suman para obtener S. Cuando las

TABLA 3. *Descripción de cada nivel para las categorías*

Categoría	***Calificación***	***Descripción de cada nivel***
Evento Que el evento descrito en la tarea escolar haya tenido lugar o pueda presentarse en la realidad.	*1.* No cumple con el aspecto	El evento no es algo que suceda o haya sucedido en la vida real.
	2. Bajo nivel	El evento tiene poca probabilidad de ocurrir en la vida real.
	3. Moderado nivel	El evento tiene una alta probabilidad de ocurrir en la vida real.
	4. Alto nivel	El evento ha ocurrido o tiene una ocasión de ocurrir en la vida real.
Pregunta Este aspecto se refiere a la concordancia entre la asignación dada en la tarea escolar y la situación extraescolar correspondiente.	*1.* No cumple con el aspecto	Las preguntas se mantienen alejadas de presentarse en el acontecimiento del mundo real descrito.
	2. Bajo nivel	Las preguntas probablemente no serían hechas en el acontecimiento del mundo real descrito.
	3. Moderado nivel	Las preguntas se pueden presentar moderadamente en el acontecimiento del mundo real descrito.
	4. Alto nivel	Las preguntas se pueden presentar realmente en el acontecimiento del mundo real descrito.
Propósito en el contexto de la tarea El propósito de la tarea por resolver debe ser tan claro para los estudiantes en la situación escolar como lo sería en la correspondiente situación de la vida real.	*1.* No cumple con el aspecto	El propósito de la tarea por resolver no tiene claridad para la situación escolar como lo sería en la situación de la vida real correspondiente.
	2. Bajo nivel	El propósito de la tarea difícilmente es claro para la situación escolar como lo sería en la situación de la vida real correspondiente.
	3. Moderado nivel	El propósito de la tarea es claro en la situación escolar pero no como lo sería en la situación de la vida real correspondiente.
	4. Alto nivel	El propósito de la tarea es claro en la situación escolar como lo sería en la situación de la vida real correspondiente.

Categoría	*Calificación*	*Descripción de cada nivel*
Uso del lenguaje La terminología, la estructura de las oraciones y la cantidad de texto utilizado en la presentación de la situación de la tarea tiene un grado de fidelidad respecto de la situación real que no incluye términos difíciles que impidan a los estudiantes resolver la tarea.	*1.* No cumple con el aspecto	El lenguaje usado en la tarea escolar no es comprensible y su grado de fidelidad es nulo como el que se usa en la situación de la vida real correspondiente.
	2. Bajo nivel	El lenguaje usado en la tarea escolar es comprensible y tiene poco grado de fidelidad como el que se usa en la situación de la vida real correspondiente.
	3. Moderado nivel	El lenguaje usado en la tarea escolar es comprensible y tiene alto grado de fidelidad como el que se usa en la situación de la vida real correspondiente.
	4. Alto nivel	El lenguaje usado en la tarea escolar es comprensible y tiene total grado de fidelidad como el que se usa en la situación de la vida real correspondiente.
Información y datos La información y los datos en la situación escolar tienen un total grado de fidelidad como en la situación de la vida real correspondiente.	*1.* No cumple con el aspecto	El realismo de la información y los datos dados en la tarea escolar no es acorde con los de la situación de la vida real correspondiente.
	2. Bajo nivel	El realismo de la información y los datos dados en la tarea escolar son poco cercanos a los de la situación de la vida real correspondiente.
	3. Moderado nivel	El realismo de las información y los datos dados en la tarea escolar son muy cercanos a los de la situación de la vida real correspondiente.
	4. Alto nivel	El realismo de la información y los datos dados en la tarea escolar es idéntico a los de la situación de la vida real correspondiente.

calificaciones de una tarea las realizan n evaluadores, el coeficiente V para esta tarea se calcula por medio de la siguiente fórmula:

$$V = \frac{S}{n(c-1)}$$

Aiken (1985) proporciona una tabla con medidas probabilísticas del valor desconocido poblacional , denotado por Vp, para un rango de categorías de calificación de 2 a 7, un rango de evaluadores de 2 a 25 y niveles de confianza de 95 y 99%, con la siguiente prueba de hipótesis (véase Penfield & Giacobbi, 2004).

$$Ho: Vp = 0.5, Ha: Vp > 0.5$$

Resultados

Para la primera valoración de autenticidad se consideró un nivel de confianza de 95%, cinco jueces expertos y cuatro niveles de evaluación, por lo que el valor de V_p es de 0.87 (Aiken, 1985).

En esta primera valoración los jueces otorgaron su calificación para cada aspecto, realizando observaciones, comentarios y sugerencias para la modificación de las tareas. En la tabla 4 se pueden observar los valores del estadístico V de Aiken para cada aspecto de la taxonomía. Para aquellos valores de $V < 0.87$ no fue posible rechazar la hipótesis nula de que no existe concordancia entre los jueces.

TABLA 4. *Valores del estadístico de Aiken en la primera evaluación de expertos*

Tarea	*Evento*	*Pregunta*	*Propósito*	*Uso del lenguaje*	*Información y datos*
Tarea 1	0.73	0.80	0.93*	0.93*	0.73
Tarea 2	0.47	0.67	0.73	0.80	0.73
Tarea 3	0.93*	0.73	0.73	0.60	0.60
Tarea 4	0.80	0.53	0.87*	0.93*	1

NOTA: * Ponderaciones de factores ≥ 0.87.

Se puede observar que las tareas 1, 3 y 4 cumplían al menos uno de los aspectos de la taxonomía de autenticidad; sin embargo, la tarea 2 no cumplía con ningún aspecto. Gracias a la retroalimentación de los expertos, las cuatro tareas fueron modificadas ya que los valores del estadístico de Aiken menores a 0.87 no estaban muy alejados de este valor.

Una vez que las tareas fueron modificadas, se obtuvo como resultado un nuevo conjunto de cuatro tareas y se invitó a los mismos jueces expertos a colaborar en una segunda valoración de autenticidad. Para esta nueva valoración se consideró un nivel de confianza de 95%, cinco jueces expertos y cuatro niveles de evaluación, por lo que el valor V_p (Aiken, 1985).

En la tabla 5 se presentan los resultados de esta segunda valoración a través del estadístico *V* de Aiken. En todas las evaluaciones, con excepción de información y datos de la tarea 3, es posible rechazar la hipótesis nula a favor de la alternativa que establece una concordancia entre los jueces. Por lo tanto, gracias a esta última valoración se tiene que las cuatro tareas son más auténticas pues cumplen todos o la mayoría de los aspectos de la taxonomía de autenticidad.

TABLA 5. *Valores del estadístico de Aiken en la segunda evaluación de expertos*

Tarea	*Evento*	*Pregunta*	*Propósito*	*Uso del lenguaje*	*Información y datos*
Tarea 1	1	0.87	1	1	1
Tarea 2	0.93	0.93	0.93	1	0.93
Tarea 3	0.87	0.93	0.93	1	0.80*
Tarea 4	1	0.93	1	1	1

NOTA: * Ponderaciones de factores < 0.87.

Con base en los resultados de la tabla 5 se puede observar que la tarea 2 tuvo un cambio sustancial en los valores del estadístico *V* de Aiken para cada uno de los aspectos. La tarea mejor valorada fue la 4, mientras que la 3 (véase figura 2) disminuyó su valor del estadístico *V* de Aiken en el aspecto de evento, además de que el aspecto de información y datos tuvo un valor de Aiken menor a $V_p = 0.87$. La retroalimentación de dos expertos coincidió en que la tarea 3 es un poco lejana a la realidad de algunos estudiantes, además de que se ponen en duda los costos presentados para cada servicio.

FIGURA 2. *Tarea 3 modificada en una tarea auténtica del conjunto de tareas presentado a los jueces*

VIAJE DE GRADUACIÓN

Como viaje de graduación la escuela planea hacer un viaje a Cancún durante los siete días de Semana Santa y quieres saber cuánto dinero debes ahorrar con tu familia para poder asistir.
Investigaste en internet que el año pasado entre 2 y 3 millones de turistas visitaron Cancún durante Semana Santa y que los gastos registrados por todos los turistas fueron los siguientes:

Hospedaje	Comidas	Otros
$11 204 105 000	$9 600 585 000	$1 750 000 000

¿Cuanto, en promedio, gastó un turista en cada uno de estos ámbitos durante una semana? ¿Y por día?
Si la escuela consiguió el viaje redondo en avión de Ciudad de México a Cancún a un costo de $1 596 por persona, ¿cuánto dinero consideras que deberías ahorrar con tu familia para poder ir al viaje?

FUENTE: Elaboración propia.

Reflexiones

Un conjunto tareas auténticas, según la taxonomía de Palm y Nyström (2009), validado por un grupo de expertos, puede ser utilizado por los docentes en su trabajo de enseñanza, con la certeza de que cuentan con tareas más cercanas a la vida cotidiana de los estudiantes. En el caso de los investigadores, éstos pueden contar con un conjunto de tareas que ha tenido una prueba de validez respecto de un marco teórico, en este caso específico, de un análisis de autenticidad según la propuesta de Palm y Nyström (2009), para que pueda ser utilizado con más certeza en un trabajo de investigación para la recolección de datos.

Al mejorar la autenticidad de este conjunto de tareas, éstas se pueden implementar en el aula para mejorar los procesos de aprendizaje de los alumnos. En efecto, Nexticapan y Juárez (en prensa) muestran en su estudio el caso de Rubí, una estudiante del nivel medio superior que cursaba segundo año en el ciclo escolar 2019-2020, a la cual se le realizó una entrevista clínica exploratoria con el objetivo de observar los procesos de resolución en una tarea no auténtica y, posteriormente, en la tarea modificada más auténtica. Los resultados obtenidos indicaron que cuando la tarea no era auténtica, sus procesos matemáticos de resolución fueron muy limitados e incorrectos. Por el contrario, cuando la tarea se modificó a una auténtica, sus procesos matemáticos de resolución mejoraron sustancialmente.

Finalmente, este trabajo descubre un posible camino para realizar pruebas de validez cuantitativa de instrumentos mediante el juicio de expertos, no sólo de contenido, sino de cualquier marco teórico determinado, como en el caso de esta investigación, en la cual se desarrolló una prueba de validación de autenticidad de un conjunto de tareas con base en el marco de la teoría de Palm (2006), a través del procedimiento metodológico expuesto. También, mediante este mecanismo se pueden validar actividades, tareas y planeaciones. Esta propuesta permite desarrollar trabajos de investigación con mayor certeza, ya que la alta concordancia entre expertos, sustentada en una teoría específica, puede contribuir a tener investigaciones con mayor validez.

Conclusiones

Este trabajo muestra una forma de cómo realizar el proceso de validación cuantitativo de un conjunto de tareas para determinar el grado de autenticidad de éstas según la taxonomía de Palm y Nyström (2009) a través del juicio de expertos. Como resultado se obtuvo un conjunto de tareas más auténticas. La valoración final de los expertos mostró una concordancia estadísticamente significativa a través del estadístico de Aiken en el análisis de cada aspecto de las tareas.

Para dar seguimiento a este trabajo, la siguiente etapa es la aplicación de este conjunto de tareas más auténticas a estudiantes de nivel medio superior para poder analizar sus procesos de resolución y confirmar la hipótesis de Palm (2006) acerca de que un aumento en la autenticidad de la tarea, incluso cuando se logra únicamente mediante una modificación del texto de la misma, aumenta la tendencia de los estudiantes a usar sus conocimientos del mundo real de manera efectiva.

Referencias

Aiken, L. R. (1985). Three Coefficients for Analyzing the Reliability and Validity of Ratings. *Educational and Psychological Measurement, 45,* 131-141.

Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S., & Zolkower, B. (2016). Educación matemática realista bases teóricas. *Educación, 63,* 1-11.

Cáceres, M. J., Chamoso, J. M., & Cárdenas, J. A. (2015). Situaciones problemáticas auténticas propuestas por estudiantes para maestro. *Investigación en Educación Matemática, 19,* 201-210.

Díaz, M. V., & Poblete, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 45,* 33-41.

Flick, U. (2012). *Introducción a la investigación cualitativa*. Morata.

León de, W. (2020). *La autenticidad de los problemas matemáticos en contextos de temperaturas en los libros de texto de México y Colombia* (Tesis de maestría). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Repositorio Institucional. https://www.fcfm.buap.mx/posgrados/catalogo-tesis/mem

Margolinas, C. (2013). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*. ICMI.

Muñoz, L., Londoño, S., Jaramillo, C., & Villa-Ochoa, J. (2014). Contextos auténticos y la producción de modelos matemáticos escolares. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 2*(42), 48-67.

Nexticapan, C. D., & Juárez, R. E. (en prensa). Análisis de los procesos de resolución de una tarea auténtica y una no auténtica: El caso de Rubí. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas.*

Palm, T. (2006). Word Problems as Simulations of Real-World Situations: A Proposed Framework. *For the Learning of Mathematics, 26*(1), 42-47.

Palm, T., & Nyström, P. (2009). Gender Aspects of Sense Making in Word Problem Solving. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 59-76.

Penfield, R. D., & Giacobbi, P. R. (2004). Applying a Score Confidence Interval to Aiken's Item Content-Relevance Index. *Measurement in Physical Education and Exercise Science, 8,* 213-225.

Pozo, J. I. (1994). Aprender a resolver problemas y resolver problemas para aprender. En J. I. Pozo & M. P. Pérez (Eds.), *La solución de problemas* (pp. 14-50). Santillana.

Romero, E. (2013). *La ejercitación en el aprendizaje de la matemática* (Tesis de licenciatura). Universidad Galileo.

Ruiz, B. J. (2016). *Matemáticas 1: Álgebra en acción*. México: Patria.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2017). *Planes de estudio de referencia del marco curricular común de la educación media superior*. http://sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/12491/4/images/libro.pdf

Sección 5

ESTUDIOS SOBRE LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS

Capítulo 13. El concepto de área en libros de texto de 1960 a 2017 para cuarto grado de educación primaria

José Antonio Sánchez García
Elizabeth Zitlali Torres Vázquez
Juan Hadad Aguilar Romero
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

Resumen

En este capítulo se presenta un análisis de contenido de los libros de texto gratuito de cuarto grado de primaria de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (Conaliteg), de 1960 a 2017, con el objetivo de analizar y comparar el tratamiento que se ha dado al concepto de área. Este estudio identifica dos aspectos en las actividades presentes en los libros de texto correspondientes a dicho concepto, el primero con respecto a la estructura de imagen o definición conceptual y el segundo con respecto a que el método de solución se defina por estimación de medida. Se concluye que la estimación de medida es poco abordada en las actividades del libro de texto; de igual forma, se observa que las estructuras de imagen y definición conceptual se desarrollan de manera nivelada.

Palabras clave: área, estimación de medida, libros de texto, educación primaria.

Introducción

En el nivel básico, el tratamiento de los temas perímetro, área y volumen proporciona una de las primeras oportunidades para enfrentar a los estudiantes al uso de fórmulas. El modo en que se presentan dichas fórmulas puede estar relacionado con la tendencia clásica (por ejemplo, la presentación directa de las fórmulas por parte del docente, con o sin la justificación de éstas) o bien pueden plantearse de una manera alternativa, ofreciendo la oportunidad al alumno de conjeturar, validar y encontrar sentido a dichas fórmulas.

Carrillo, Contreras, Climent, Montes, Escudero y Flores (2016) afirman que en matemáticas el aprendizaje de conceptos elementales, en particular de geometría, se produce en el alumno de forma similar al de una persona que aprende a diferenciar entre diferentes objetos; es decir, el aprendizaje de la geometría se basa en la repetida observación e identificación y memorización de diversas características.

De acuerdo con Chamorro y Belmonte (1991) el tratamiento de magnitudes y sus medidas estuvo especialmente influido por una metodología tradicional, basada en escuchar y repetir. Un tratamiento alternativo de estos temas supone propiciar un uso comprensivo de las fórmulas, presentándolas como un último paso, como un camino más corto para alcanzar un resultado que se ha venido obteniendo por medios más laboriosos, como el recuento de cuadrados para calcular el área de una figura (Del Olmo, Moreno & Gil, 1993).

Consideramos interesante indagar acerca de la manera en que se aborda el estudio de las magnitudes y sus medidas en el aula, teniendo en cuenta que los distintos tratamientos de un mismo tema pueden tener consecuencias en el aprendizaje de los sujetos. En este caso particular, centraremos nuestro análisis en el tratamiento del tema área, atendiendo principalmente a la manera de presentar las fórmulas para su cálculo y si se motiva el uso de la estimación como una forma de resolución de problemas.

Mochón y Vázquez (1995) ssotienen que la estimación ha sido descuidada en la enseñanza de las matemáticas y exponen los resultados de un estudio con niños mexicanos por medio de los cuales llegan a la conclusión de que necesitan una instrucción que refleje las estrategias fundamentales de este tema.

Planteamiento del problema

Segovia, Castro, Castro y Rico (1989) destacan el carácter educativo de la estimación y presentan dos razones fundamentales para incluirla en la escuela. Por un lado, para completar la formación escolar que actualmente reciben los estudiantes, ya que potencia el desarrollo de estrategias propias, refuerza y estimula procesos correctos de resolución de problemas y evita la visión deformada de considerar las matemáticas como una ciencia que conduce a respuestas exactas, y por otro lado, dada su utilidad práctica, puesto que se emplea en diversas situaciones reales.

En la actualidad existe un sentimiento generalizado entre los expertos acerca de que el tiempo dedicado a la enseñanza de la estimación no es el que debiera y que tiene que ser aumentado. Segovia *et al.* (1989) sostienen que esta realidad también se observa en la escasez o ausencia de consignas planteadas en los libros de texto referidas al desarrollo de la estimación, por lo cual proponen que ésta debe impregnar todo el currículo de matemáticas, siendo tratada y considerada con aquellos tópicos que lo permitan, entre los cuales se encuentran la superficie y su medida. Segovia y Castro (2009), por su parte, aseveran que, a pesar de la incorporación de la estimación en el currículo, la situación con respecto a su enseñanza sigue teniendo un bajo nivel de consolidación.

Marco teórico

La estimación de medida

A principios de la década de 1980 distintos organismos internacionales, entre ellos el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) comenzaban a hacer énfasis en el estudio de la estimación de la medida en los programas escolares (Pizarro, 2015).

Segovia *et al.* (1989) consideran la estimación de medida didácticamente interesante, pues incorporan las estrategias personales de interpretación y valoración presentes en la vida cotidiana del quehacer matemático.

Para Pizarro, Albarracín y Gorgorió (2014, 2016 & 2018) el desarrollo de la estimación de medida en el aula es necesario debido a que desarrolla habilidades perceptivas y ayuda a reconocer las unidades de medida y a comprender las herramientas necesarias para realizar esas mediciones. Estos autores aseguran que si la estimación de medida comienza a abordarse en la educación elemental es probable que se desarrollen componentes de enumeración, cantidad y pensamiento tridimensional.

La estimación se ha interpretado de diversas formas, una de las cuales es la propuesta por Segovia *et al.*: "Juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de las circunstancias individuales de quien lo emite" (1989, p.18).

Por otro lado, en cuanto a la estimación de medida, la cual es de nuestro interés, tenemos que Pizarro *et al.* (2016 y 2015) afirman que consiste en asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y una unidad correspondiente a una cantidad de magnitud discreta o continua, por medio de los conocimientos previos o por comparación no directa de algún objeto auxiliar.

Como se observa, lo que se presenta, según Pizarro *et al.* (2018), parece ser una adaptación de lo señalado por Segovia *et al.* (1989), lo cual tiene sentido, pues los primeros autores se refieren a la estimación no sólo de cantidades sino también de medidas, lo que, como ya se señaló antes, implica una habilidad que es importante desarrollar en los alumnos.

Para lograr el objetivo del presente trabajo se toma en cuenta la definición central para determinar si una actividad está pensada para ayudar o no a desarrollar dicha habilidad en los estudiantes de cuarto grado.

Modelo de Vinner para el aprendizaje de conceptos geométricos

El aprendizaje de varios conceptos matemáticos, especialmente de los que corresponden al área de geometría, se produce gracias a repetidas observaciones de objetos, así como a la identificación y la memorización de diversas características, regularmente visuales, que ayudan a clasificar y a comparar distintos objetos (Carrillo, *et al.*, 2016).

Vinner (1991) sostiene que durante las clases de matemáticas el alumno forma dos estructuras en su mente: la imagen conceptual y la definición conceptual. La primera es aquella que está conformada por la información gráfica que el alumno memoriza. La segunda es la que se conforma por la información verbal memorizada. Según Carrillo *et al.* (2016) esta estructura, además de incorporar la definición aprendida, también involucra las formulaciones verbales de las propiedades matemáticas del objeto. Dichas estructuras se forman con base en la información que el alumno recibe por medio del libro de texto, el material didáctico y el profesor.

Las investigaciones de Vinner muestran que un gran porcentaje de alumnos no aprende a establecer relaciones entre estos dos tipos de estructuras, lo cual ocasiona que utilicen de manera independiente la información guardada en cada una de ellas, dejando una inactiva mientras utilizan la otra.

Una imagen conceptual se considera completa cuando incluye una gran variedad de ejemplos gráficos relacionados con el concepto, de formas, entre otros, de manera que éstos ayuden al estudiante a identificar cualquier imagen con dicho concepto. Es importante que los alumnos aprendan y comprendan definiciones y propiedades básicas que ayuden a conformar su definición conceptual a la par que se forma su imagen conceptual (Carrillo *et al.*, 2016).

En el caso del concepto de área consideramos que la imagen conceptual se forma cuando el alumno comienza a relacionar el área con el tamaño de la figura; es decir, no considera unidades de medida para referirse al área y además la identifica con el interior de una figura cuando ésta se encuentra sombreada de algún color. Por su parte, la definición conceptual se forma cuando el alumno comienza a relacionar el área con el interior de una figura, sin que ésta se encuentre sombreada y, además, le asocia alguna unidad de medida.

Carrillo *et al.* (2016) afirman que una manera de lograr la integración entre estas dos estructuras consiste en plantear actividades de clasificación o de identificación acompañadas de preguntas sobre los motivos de las respuestas para que el alumno pueda verbalizar y utilizar la definición correspondiente.

Por lo anterior, existe interés no solamente en identificar aquellas actividades que desarrollan estimación de medida, en nuestro caso el área, sino también en el tipo de estructura que ayuda a formar en el estudiante con respecto al concepto de área.

Método

Desde el punto de vista metodológico, esta investigación es de corte cualitativo. Una de las técnicas utilizadas para el estudio de los libros de texto fue el análisis de contenido (Fraenkel, Wallen & Hyun, 2012), con el objetivo de identificar categorías y unidades de análisis apropiadas para lograr el objetivo del trabajo.

Este análisis se realizó sobre los libros de texto gratuitos de cuarto grado de primaria de matemáticas, correspondientes a las generaciones de 1960 a 2017, que se encuentran disponibles en la página web de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos y que se presentan en la tabla 1.

Las categorías que se definieron para la investigación corresponden a dos aspectos generales. Uno de ellos, con respecto al método de solución,

TABLA 1. *Libros de matemáticas cuarto grado*

Generación	***Libros***
1960	Mi cuaderno de trabajo. Aritmética y geometría. Estudio de la naturaleza
1962	Mi cuaderno de trabajo. Aritmética y geometría. Estudio de la naturaleza
1972	Matemáticas. Cuarto grado
1982	Matemáticas. Cuarto grado
1988	Matemáticas. Cuarto grado
1993	Matemáticas. Cuarto grado
2008	Matemáticas. Cuarto grado
2011	Matemáticas. Cuarto grado
2014	Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado
2017	Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado

FUENTE: Elaboración propia.

ya sea exacto o por estimación de medida, y el otro, de acuerdo con la estructura, ya sea imagen o definición conceptual.

El análisis de contenido se desarrolló en cuatro etapas:

- Identificación de las actividades enfocadas en el concepto de área.
- Categorización de las actividades de acuerdo con la posibilidad de poder ser resueltas mediante estimación de medida o de manera exacta.
- Identificación del tipo de estructura que favorece cada una de las actividades.
- Interpretación y ponderación de las categorizaciones.

Análisis

Durante la revisión de los libros de texto de las diferentes generaciones se pudo observar que los contenidos y, por lo tanto, las actividades de algunos libros son exactamente los mismos. A continuación se presentan estos grupos de libros:

- Generaciones 1960 y 1962.
- Generaciones 1972, 1982 y 1988.
- Generaciones 1993 y 2008.
- Generaciones 2014 y 2017.

Lo anterior también se puede observar en la tabla 2, en el que se describe que las generaciones que pertenecen al mismo grupo tienen la misma cantidad de actividades clasificadas en cada columna. Además, se muestra el número de actividades parciales y totales destinadas al concepto de área, la cantidad en las que se aborda la estimación, así como las actividades que favorecen cada estructura.

Por otro lado, también en la tabla 2, en los datos correspondientes a las columnas 2 y 3, se puede notar que a lo largo del tiempo disminuye la cantidad de actividades planteadas en los libros de texto, enfocadas en el concepto de área, que utilizan como método de solución la estimación de medida; lo cual contradice las sugerencias de aumentar en el currículo de educación básica las actividades que favorezcan el uso de la estimación.

TABLA 2. *Identificación de actividades*

Generación	*Concepto de área*	*Fomentan estimación*	*Tipo de estructura que desarrolla*		
			Imagen conceptual	*Definición conceptual*	*Ambas*
1960	13	4	9	11	7
1962	13	4	9	11	7
1972	15	6	15	11	11
1982	15	6	15	11	11
1988	15	6	15	11	11
1993	12	3	8	9	5
2008	12	3	8	9	5
2011	10	3	10	8	4
2014	13	2	13	12	8
Actual (2017)	13	2	13	12	8
Total	*131*	*39*	*115*	*105*	*77*

FUENTE: Elaboración propia.

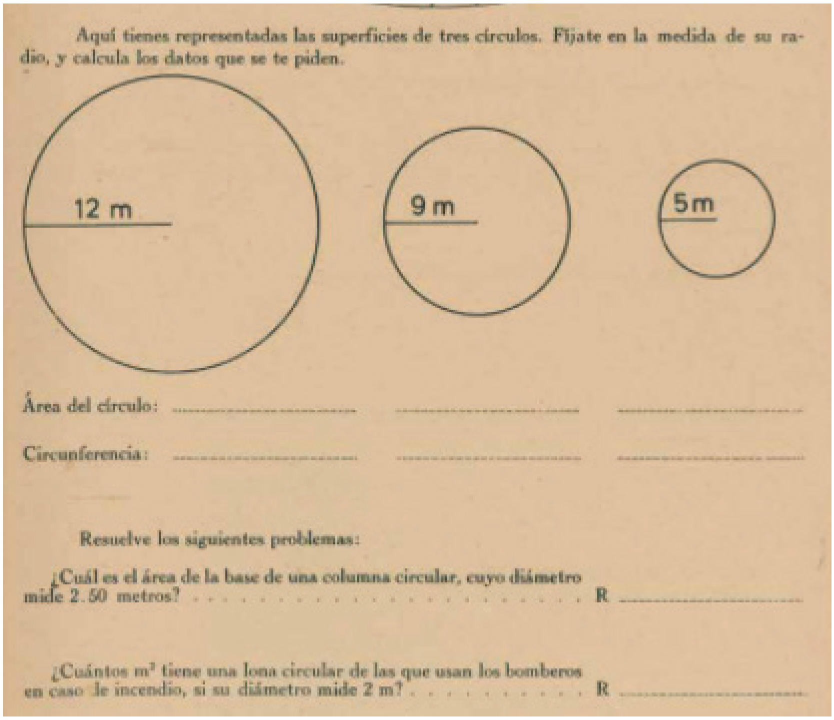
A partir de estos datos podemos observar que solamente 58.8% de las actividades favorece ambas estructuras, siendo las generaciones de 1993, 2008 y 2011 las que menos lo hacen, con sólo 41.6% de las actividades correspondientes.

A continuación, se presentan algunas actividades halladas en los libros de texto acerca del concepto de área.

En este primer ejemplo (véase figura 1) se observa una actividad correspondiente al libro de la generación de 1960. Es pertinente mencionar que en esta generación se incluían dos libros de matemáticas, uno de los cuales solamente contenía la parte teórica de los temas y el otro sólo actividades. La actividad que se presenta tiene como tarea que el alumno calcule en primera instancia el área y el perímetro de diversos círculos, y en un segundo momento, que resuelva dos problemas contextualizados que involucran el cálculo de áreas de objetos circulares.

Ambas partes de la actividad tienen como método de solución uno exacto, ya que, en la primera parte, gracias a la indicación, "Fíjate en la medida de su radio y calcula los datos que se te piden", se predispone al

Figura 1. *Área de círculos*



Aquí tienes representadas las superficies de tres círculos. Fíjate en la medida de su radio, y calcula los datos que se te piden.

12 m

9 m

5m

Área del círculo: ....

Circunferencia: ....

Resuelve los siguientes problemas:

¿Cuál es el área de la base de una columna circular, cuyo diámetro mide 2.50 metros? . . . . R ....

¿Cuántos m^2 tiene una lona circular de las que usan los bomberos en caso de incendio, si su diámetro mide 2 m? . . . . R ....

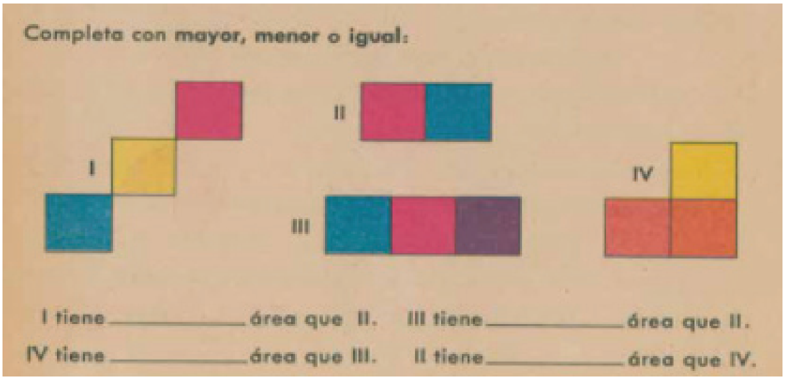
Fuente: Adaptado de Virgen (1960, p. 49).

alumno a resolverla utilizando la fórmula para calcular el área del círculo (pues ya se le presentó dicha fórmula en el libro de teoría); en la segunda, gracias a que se le proporciona al estudiante la medida del diámetro en ambos problemas, lo cual ocasiona que recurra en principio a la relación entre el diámetro y el radio, seguido de la fórmula de área para círculos.

Esta misma actividad fomenta el desarrollo de la estructura correspondiente a la definición conceptual, ya que, en principio, las superficies ya no se encuentran sombreadas de algún color específico y se le pide al alumno que asocie el área de los círculos con el radio de cada uno de ellos; es decir, ya particulariza el concepto de área al de un círculo.

Por otro lado, también se hallaron actividades que se resuelven con un método exacto que además favorece la estructura de imagen conceptual. Un ejemplo es la siguiente actividad, la cual se encuentra en el libro de

FIGURA 2. *Comparar áreas*



FUENTE: Adaptado de Filloy, Gorostiza, Imaz y Rivaud (1972, p. 46).

matemáticas de la generación de 1972. Como se observa en la figura 2, la actividad consiste en que el alumno compare las áreas de cuatro figuras diferentes.

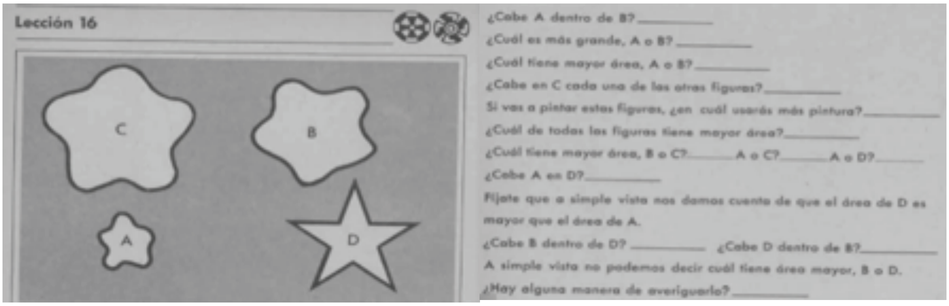
En esta actividad se favorece la imagen conceptual, ya que el alumno no debe utilizar una fórmula explícita para el cálculo del área. Más aún, la actividad se apoya por completo en las figuras, propiciando que el alumno asocie el concepto de área con la cantidad de cuadrados sombreados de colores que tiene cada figura, mas no con unidades cuadradas que no se encuentren sombreadas. Por otro lado, para esta actividad se consideró un método de solución exacto, pues el estudiante haría uso del conteo para resolverla, lo cual no forma parte de una estrategia de estimación de medida, pues ésta no es una actividad perceptiva.

Durante el análisis de las actividades se observó que aquellas que se planean para su solución el uso de la estimación tambié favorecen el desarrollo de la estructura de imagen conceptual.

Un ejemplo de lo anterior se encuentra en la lección 16 del libro de matemáticas de la generación de 1972, el cual se presenta en la figura 3.

Esta actividad consiste en que los alumnos respondan preguntas con base en las imágenes que se les proporcionan al inicio de la lección: “¿Cabe A dentro de B?”, “¿cuál es más grande: A o B?” y “¿cabe en C cada una de las otras figuras?”. Estas preguntas nos permiten catalogar esta actividad como una que fomenta la estimación de medida, pues de manera perceptiva

FIGURA 3. *Lección 16*



FUENTE: Adaptado de Filloy *et al.* (1972, p. 44).

el alumno compara las áreas de las figuras gracias a que la única herramienta que tiene es el tamaño de cada una de ellas. Puesto que el estudiante se debe guiar por lo que observa de cada una de las figuras que se le proporcionan, comienza a desarrollar visualmente la imagen conceptual de área, que involucra la característica de que mientras más grande sea la figura, mayor área tendrá.

El ejemplo que se presenta en la figura 4 solicita que se formen cuatro rectángulos de diferente área asignando la misma unidad de medida para todos, considerando que el largo y el ancho sean diferentes para cada uno.

Las características de la actividad permiten concluir que se fomenta el desarrollo de la estructura por definición conceptual, debido a que inducen al estudiante a considerar que para cada rectángulo que forme tenga en cuenta la unidad de medida que tendrá la superficie y también las partes que componen la figura.

Durante el análisis se encontraron actividades que fomentan sólo una de las estructuras, así como algunas que fomentan el desarrollo de ambas. Un ejemplo de lo anterior se identificó en el libro de la generación de 1993, el cual sólo contiene tres problemas que se pueden catalogar como actividades que favorecen la estimación.

En la figura 5 podemos ver uno de los problemas que favorecen ambas estructuras, pues se usan recursos visuales y se solicita a los alumnos que anoten el área exacta de las figuras. Este problema se clasificó entre los que se pueden resolver mediante estimación, pues aunque la estimación no es explícita, la pregunta acerca de si hubo algún triángulo del que no pudieran

Figura 4. *Actividad 85, consigna 1, "Superficies rectangulares"*

Consigna 1

En equipos, con su material listo, formen 4 rectángulos diferentes que tengan un área de 40 cm². Registren en la tabla las medidas de sus rectángulos.

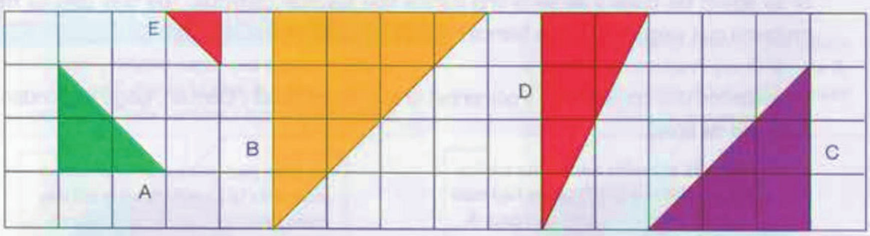
Largo	Ancho	Área (cm²)
		40
		40
		40
		40

¿Qué relación observan entre los números de la tabla?

Fuente: Adaptado de Rosales, Barrientos, Issa, López, Tovilla y Velázquez (2014, p. 158).

Figura 5. *Problema sobre "área de triángulos"*

4 Anoten el área de cada uno de los siguientes triángulos. Tomen el cm² como unidad.



¿Qué procedimiento siguieron para saber cuál es el área de los triángulos A, B y C? Anótenlo:

¿Hubo algún triángulo del que no pudieran saber con exactitud cuál es su área? Coméntenlo con otros compañeros.

Fuente: Adaptado de Ávila, Balbuena y Bollas (1993, p. 154).

saber con exactitud cuál era su área, deja abierta la posibilidad de ofrecer aproximaciones. En esta generación es nula la aproximación a la estimación, pues ésta no se aborda explícitamente en ningún tema ni en ninguna actividad.

La consigna que se muestra en la figura 6 es la primera parte de una actividad extraída del libro de la generación 2014, la cual consiste en estimar el área de cuatro superficies de objetos que se pueden encontrar en el salón. Esta actividad tiene la particularidad de que solicita de forma específica el método de resolución, lo que no hacen las demás actividades revisadas.

Debido a las características de la actividad se genera la posibilidad de que el alumno compare, a partir de lo que observa, la relación que hay entre el tamaño del objeto y su superficie, lo que conlleva que el estudiante desarrolle una imagen conceptual del área por medio de objetos.

FIGURA 6. *Actividad 87, consigna, parte 1*

Consigna

En equipos de cuatro integrantes, lleven a cabo las actividades.

1. Estimen el área de las superficies que se indican, y después utilicen los cuadrados que construyeron (con indicaciones de su maestro) para medirlas.

Superficie	Estimación del área	Resultado de la medición de superficie
La superficie del pizarrón		
La carátula de una calculadora		
La portada del cuaderno de Matemáticas		
El piso del salón		

FUENTE: Adaptado de Rosales *et al.* (2014, p. 164).

Posteriormente, se solicita utilizar una alternativa para indicar la medida de las superficies con base en los cuadrados de distintas medidas de sus lados (1 cm, 1 m y 10 cm), que previamente construyó, lo que propicia que el alumno compare las superficies con diferentes unidades de medida, formando así la noción de área por medio de la definición conceptual, pues el estudiante comenzará a relacionar las unidades de medida y las dimensiones de los objetos con la superficie. Dicha actividad se muestra en la figura 7.

FIGURA 7. *Actividad 87, consigna, parte 2*

2. Utilicen al menos dos unidades de medida diferentes para medir las superficies.

Superficie	Unidad de medida empleada	Medida de la superficie (área)
La portada del libro de Matemáticas		
La cubierta de la mesa del profesor		
Una ventana del salón		

FUENTE: Adaptado de Rosales *et al.* (2014, p. 164).

Conclusiones

En cuanto al tratamiento de las estructuras de imagen y definición conceptual se peude notar cierto grado de equilibrio. Lo mismo se puede decir de las actividades que fomentan el desarrollo de ambas estructuras. En este sentido, al igual que Carrillo *et al.* (2016), sugerimos que los profesores y los libros de texto deberían promover actividades que ayuden al desarrollo conjunto de estas estructuras.

Como se mencionó antes, este trabajo permite constatar que, a lo largo de las diferentes generaciones de libros de texto gratuitos, la cantidad de actividades que fomentan la estimación de medida disminuye progresivamente. Esta escasa frecuencia de tareas confirma lo que sostienen Mochón y Vázquez (1995) sobre el descuido de la estimación en la educación básica, particularmente en el eje forma, espacio y medida.

De igual manera, la investigación ayuda a confirmar que una de las estrategias para fomentar el desarrollo de la imagen conceptual correspondiente al concepto de área consiste en plantear actividades en las que se considere la estimación de medida como método de solución, ya que, como afirman Pizarro *et al.* (2014 & 2018), aplicar la estimación ayuda a desarrollar habilidades perceptivas y despierta en el alumno la necesidad de conocer herramientas que faciliten la medición.

En esta investigación se observó que una gran cantidad de actividades no hacen explícito el método de solución. Consideramos que esta situación es favorable debido a que propicia que los alumnos exploren diversas alternativas para calcular el área, lo que le permitirá desarrollar estructuras ricas en información y estrategias de solución pensadas y aplicadas por el propio estudiante.

Por otro lado, las actividades que necesitan un método de solución exacto (conteo, uso de fórmulas, entre otros), bien propuestas, también fomentan el desarrollo de la imagen conceptual de área.

El proceso de la medida de una magnitud se debe completar con la estimación, pues ésta constituye una habilidad que se debe promover por su indudable valor práctico. Sin embargo, de acuerdo con los resultados de esta investigación se concluye que aquélla no es suficientemente atendida por los libros de texto gratuitos, lo cual nos hace concluir que en la actualidad este fenómeno se presenta en el trabajo en el aula, lo que confirma la tesis de Segovia y Castro (2009).

Considerando lo que destaca Pizarro (2015) con respecto a la preparación profesional inadecuada de los docentes en torno de la estimación, se recomienda que este concepto se implemente no sólo en el currículo, sino también en los programas de formación inicial y continua para profesores. De esta manera se podrán incorporar en las aulas y en los libros de texto actividades y tareas que promuevan el uso de la estimación por los alumnos, atendiendo las razones que plantean Segovia y Castro (2009) en el sentido de que es necesaria la enseñanza de la estimación para contribuir a la flexibilidad mental cuando se trata de manipulación de datos, selección de estrategias y retrospección de resultados (Cajaraville, 2007, cit. por Pizarro, 2015).

Referencias

Ávila, A., Balbuena, H., & Bollás, P. (1993), *Matemáticas: Cuarto grado*. Entorno Tassier.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Montes, M. A., Escudero, D. I., & Flores, E. (Coords.) (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria*. Paraninfo.

Chamorro, M. C., & Belmonte, J. (1991). *Problema de la medida: Didáctica de las magnitudes lineales*. Síntesis.

Fraenkel, J. R., Wallen, N. E., & Hyun, H. H. (2012). *How to Design and Evaluate Research in Education* (8ª ed.). Mc Graw-Hill.

Filloy, E., Gorostiza, L., Imaz, C., & Rivaud J. (1972). *Matemáticas*. México: Secretaría de Educación Pública.

Mochon, S., & Vázquez, J. (1995). Cálculo mental y estimación: Métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza. *Educación Matemática, 7*(3), 93-105.

Olmo, M. A. del, Moreno, M. F., & Gil, F. (1993). *Superficie y volumen: ¿Algo más que el trabajo con fórmulas*? Síntesis.

Pizarro, R. (2015*). Estimación de medida: El conocimiento didáctico del contenido de los maestros de primaria* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona.

Pizarro, R., Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2018). Actividades de estimación de medida: la interpretación de los docentes de educación primaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(62), 1177-1197. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a21

Pizarro, N., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2014). Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática,18,* 523-532. Salamanca: SEIEM.

Pizarro, R., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2015). La definición del concepto estimación de medida de los maestros de primaria. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1203-1210). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Pizarro, R., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2016). Caracterización de las tareas de estimación y medición de magnitudes. *Números, 91,* 91-103.

Rosales, M., Barrientos, J., Issa, E., López, M., Tovilla, M., & Velázquez L. (2014). *Desafíos matemáticos: Libro para el alumno*. México: Secretaría de Educación Pública.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E., & Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Síntesis.

Segovia, I., & Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(1), 449-536.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Virgen, H. (1960). *Mi cuaderno de trabajo: Aritmética y geometría. Estudio de la naturaleza.* México: Secretaría de Educación Pública.

Capítulo 14. Análisis de la estrategia "Aprende en Casa II" respecto del libro de texto en el tema adición y sustracción de números con signo

Verónica Aguilar Mendieta
https://orcid.org/0000-0002-2261-9838
América Guadalupe Analco Panohaya
Cesia Fabiola Cruz Concha
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

Resumen

La situación actual en México, derivada de la contingencia sanitaria por el Covid-19, ha obligado a implementar un nuevo sistema de educación a distancia. La Secretaría de Educación Pública (SEP), como acción remedial, decretó el programa Aprende en Casa a partir de abril de 2020. En este nuevo ambiente educativo hay alumnos que no tienen la posibilidad de recibir orientación a distancia por parte de sus profesores, por lo que algunos sólo tienen acceso al libro de texto que se les proporciona en las escuelas de forma gratuita y/o a las clases virtuales que se ofrecen a través de la televisión abierta. Por esto, el interés de este trabajo es determinar la concordancia instruccional, entre las clases virtuales y el libro de texto, y su funcionalidad para que estas dos herramientas puedan ser utilizadas paralelamente por los alumnos que no cuentan con ninguna orientación docente. La investigación se hará con base en la teoría de la instrucción de Bruner, a partir de un análisis de contenido realizado al programa Aprende en Casa II y a dos libros de texto proporcionados por la SEP, específicamente para el tema de adición y sustracción de números con signo.

Palabras clave: Aprende en Casa II, libro de texto, educación a distancia.

Introducción

La Secretaría de Educación Pública (SEP), como acción remedial ante la emergencia sanitaria por el Covid-19, desde el 17 de marzo de 2020 modificó el calendario de actividades escolares y con el fin de que los alumnos no perdieran el ciclo escolar, a partir del 20 de abril comenzó la estrategia Aprende en Casa, la cual, de acuerdo con la información emitida por la SEP, se desarrolló con base en los contenidos de los libros de texto y a través de actividades lúdicas. Esta estrategia consiste en la difusión de clases virtuales por múltiples medios de comunicación (internet, radio y televisión), considerando la diversidad de los alumnos.

El éxito de la estrategia, como lo estableció la SEP, no garantiza el aprendizaje, por lo que en mayo de 2020 se establecieron los lineamientos generales para el uso de la estrategia Aprende en Casa, los cuales, de forma general, señalaban la "importancia de la colaboración de todos los actores sociales" que influyen en el aprendizaje, desde las familias hasta los jefes de sector, se le "dio protagonismo al libro de texto y al seguimiento por parte de los docentes", así como la importancia del manejo de la carpeta de experiencias, considerando las limitaciones y las situaciones individuales de cada estudiante, por lo que la colaboración de los familiares y el seguimiento por parte del profesor dependen en gran medida de las condiciones socioeconómicas en las que se encuentren inmersos, ya que existen sectores de la población que no tiene acceso a la orientación del profesor a distancia y en muchas ocasiones tampoco tienen la posibilidad de obtener una orientación efectiva por parte de sus familiares, por lo que su aprendizaje depende directamente de las herramientas con las que cuenta, en este caso el libro de texto gratuito y/o las clases virtuales emitidas por televisión abierta.

Como se establece en el boletín 205, el ciclo escolar 2020-2021 inició a través del programa Aprende en Casa II, que aseguraba que el medio de difusión con mayor recepción de la población sería la televisión, ya que 94% de las personas tiene acceso a este medio, y al 6% restante se le otorgarían guías, además de los libros de texto y material educativo, que consideraría 22 lenguas indígenas distintas. El aprendizaje de los niños sería evaluado con base en esos contenidos.

Con el argumento de que el contenido de las clases virtuales del programa Aprende en Casa II está basado en el libro de texto (emitido por la SEP) y considerando que en estas emisiones diarias se hacen recomendaciones a los estudiantes de consultar el libro de texto para complementar la información que les proporcionan en las transmisiones, surgen las siguientes preguntas de investigación: ¿qué relación instruccional existe entre la forma de abordar el tema de adición y sustracción de números con signo en la estrategia Aprende en Casa II respecto del libro de texto? y ¿cómo influye esta relación instruccional en el aprendizaje de los estudiantes?

Por lo tanto, el objetivo de esta investigación es determinar la concordancia instruccional que existe entre la forma de abordar el tema de adición y sustracción de números con signo en la estrategia Aprende en Casa II respecto del libro de texto, para establecer si esto influye en el aprendizaje de los estudiantes.

A lo largo del periodo de confinamiento se ha evidenciado que algunos maestros han podido dar seguimiento al aprendizaje de sus alumnos a través de los diferentes medios de comunicación, lo cual brinda la posibilidad de trabajar clases a distancia o dar orientación a los alumnos acerca de cómo trabajar o de la forma de utilizar las herramientas con las que cuentan; sin embargo, también hay alumnos y maestros que no tienen esa posibilidad, por lo que algunos remiten su aprendizaje al libro de texto que se les proporciona en las escuelas de forma gratuita y/o a las clases virtuales que se ofrecen a través de la televisión abierta. Por lo tanto, el interés de nuestro trabajo es analizar el tratamiento que se da al tema de adición y sustracción de números con signo en los libros de texto que han sido entregados a los alumnos de forma física y la manera de abordarlo en las clases del programa Aprende en Casa II. Lo anterior con la finalidad de ver si existe una concordancia en la forma en que se aborda el tema en los videos y en el libro, de modo que estas herramientas puedan ser utilizadas paralelamente por los alumnos que no cuentan con ninguna orientación docente, y su aprendizaje se vea favorecido.

Es importante mencionar que por el interés de la investigación no se indagará si la forma de abordar los temas en cada material garantiza el aprendizaje de los estudiantes, ni será nuestro foco de estudio la autenticidad de los problemas o si las actividades son eficientes para la enseñanza de los contenidos; más bien, será determinar qué tan funcional es utilizar dichos materiales de forma complementaria cuando no existe la orientación del profesor, pues probablemente para los alumnos que sí tienen la posibilidad de contar con la orientación del profesor no represente una dificultad trabajar con ambos materiales, ya que el mismo profesor puede indicar la forma correcta de utilizar ambos materiales de manera paralela.

Marco teórico

Como indica Mayer (2014), la instrucción es tarea del profesor y consiste en la elaboración de entornos que tienen como finalidad promover el aprendizaje del alumno, lo cual incluye conferencias, debates, juegos educativos, libros de texto, entre otros; no obstante, en distintas realidades la situación de confinamiento imposibilita la oportunidad de tomar clases virtuales o recibir orientación pedagógica por parte del docente para indicar a sus alumnos cómo deben trabajar los materiales de forma complementaria. Ante esta situación, la función de instrucción se le atribuye a los materiales a los que la mayoría de los alumnos debería tener acceso, las clases virtuales de Aprende en Casa II y el libro de texto gratuito que otorga la SEP de manera física, los cuales son los protagonistas en el aprendizaje de los alumnos.

Las teorías de diseño instruccional están orientadas a abordar o a resolver problemas educativos describiendo situaciones específicas y externas de los estudiantes para facilitar su proceso de aprendizaje; asimismo, están orientadas a la práctica, por lo que permiten que el docente pueda visualizar de manera más clara la forma en que se pueden lograr los objetivos que se plantean. Estas teorías también presentan métodos o indicaciones para el proceso de elaboración, que a su vez contemplen componentes detallados de cada uno de éstos para hacer que el aprendizaje sea más fácil, así como situaciones en las que debería o no usarse cada uno de estos métodos (Maldonado & Ramirez, 2010).

Según Bruner (1966), las teorías instruccionales son el corazón de la psicología educativa, ya que indican cómo hay que arreglar el ambiente para optimizar el aprendizaje de acuerdo con diversos criterios. Considerando las premisas que llevan a Bruner a señalar la importancia del ambiente, es necesario mencionar los antecedentes de su teoría, que inicia con la propuesta del desarrollo cognoscitivo del niño, indicando que se da a través de ciertas fases que implican la manera peculiar en que el niño contempla y recoge la información del mundo exterior, y señalando tres fases: ejecutora, icónica y simbólica. Durante la primera etapa el niño manipula objetos, por lo que decirles algo tendría escaso valor; en la segunda etapa, los niños son capaces de establecer representaciones mentales sin necesidad de acción, por lo que es importante mostrarles fotografías y relacionarlas con su experiencia física, y, por último, se encuentra la fase simbólica, en la que los niños son capaces de representar su mundo a través de símbolos, es decir, representaciones convencionales de la realidad mediente el uso del lenguaje. Considerando estas premisas, según Bruner, al momento de planificar el proceso educativo es importante tomar en cuenta cuatro aspectos: crear predisposición favorable al aprendizaje, estructurar el conocimiento para facilitar su comprensión, establecer una secuencia eficiente para presentar los contenidos y especificar los procedimientos y la naturaleza de recompensa y castigo (Guilar, 2009).

De acuerdo con Bruner, hay tres implicaciones educativas: la primera es que el aprendizaje debe producirse por descubrimiento, de modo que el instructor deberá motivar a los estudiantes para que ellos mismos descubran las relaciones entre los conceptos y el conocimiento que construye (influencia de Piaget); la segunda es que la información de los contenidos de aprendizaje se deben presentar de manera adecuada y de acuerdo con la estructura cognitiva del aprendiz, y, por último, que el currículo debe organizarse en forma espiral, es decir, debe abordar los mismos contenidos, pero cada vez con mayor profundidad; así los niños irán modificando sus representaciones mentales a medida que desarrollan su capacidad de categorizar, conceptualizar y representar (Guerrero & Flores, 2009; Guilar, 2009).

Método

La técnica que se utilizó para analizar y comparar el contenido de los recursos audiovisuales con el de los libros de texto es el análisis de contenido, por ser una técnica que se emplea para estudiar cualquier tipo de documento (orales, escritos, icónicos, etc.) y permite realizar estudios comparativos entre diversos documentos (Bernete, 2013).

Para los fines de esta investigación se realizó un análisis de contenido con un enfoque descriptivo e inferencial, ya que, en primera instancia se describió el contenido de cada documento para compararlos, y a partir de esta acción determinar el contenido de los recursos audiovisuales si es congruente con el contenido de los libros de texto respecto del tratamiento que se da al tema de la adición y la sustracción de números positivos.

Siguiendo a Fraenkell, Wallen y Hyun (2012) todos los procedimientos que se denominan *análisis de contenido* implican convertir la información descriptiva en categorías, y proponen dos formas de hacer esto: una es que el investigador determina las categorías con base en conocimientos, teorías y/o experiencias previas antes de que comience cualquier análisis, y la otra, que el investigador se familiarize mucho con la información descriptiva recopilada, lo cual permite que las categorías emerjan a medida que continúa el análisis.

En este trabajo se realizó un análisis de contenido determinando tres categorías basadas en la teoría de la instrucción de Bruner, las cuales nos permitieron comparar la concordancia instruccional que se produce entre el programa Aprende en Casa II y los libros de texto *Conecta Más* y *Selva Matemágicas*. Las categorías son las siguientes:

- Crear predisposición favorable al aprendizaje.
- Estructurar el conocimiento para facilitar su comprensión.
- Establecer una secuencia eficiente para presentar los contenidos.

De esta forma, el objeto de estudio es la organización instruccional de los videos y del libro de texto correspondientes al tema de adición y sustracción de números con signo, para primer grado de secundaria.

Los recursos documentales que se analizaron son los seis videos correspondientes al tema de adición y sustracción de números con signo del programa Aprende en Casa II y dos libros de texto otorgados de forma física a los estudiantes: *Conecta Más* y *Selva Matemágicas.*

Es importante señalar que en México se proporcionan libros de texto diferentes, ya que de la selección que tiene la SEP el docente elige el libro que desea utilizar con sus alumnos. Sin embargo, por la situación actual los maestros no tuvieron la oportunidad de elegir y los libros se entregaron de forma aleatoria, por lo que en cada escuela son diferentes. Por lo tanto, los dos libros seleccionados para este estudio se eligieron porque fueron entregados de forma física a los alumnos en escuelas del estado de Puebla, y además están accesibles de forma digital a través de la página de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (Conaliteg).

Respecto del contenido matemático que se trabajó en esta investigación, corresponde al aprendizaje esperado: "Resuelve problemas de suma y resta con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos", del programa de estudios de la asignatura de matemáticas de primer grado de secundaria. Esta elección se hizo considerando la importancia que tiene el tema de la adición y la sustracción de números con signo para el aprendizaje de temas posteriores, además de la complejidad que representa para los alumnos por ser un tema completamente nuevo.

Para el desarrollo de este trabajo de investigación y con base en el procedimiento característico del análisis de contenido, se llevaron a cabo las siguientes acciones.

Primero se procedió a localizar la información relevante del contenido de los videos y de los libros de texto respecto del tema de interés, y con base en las categorías establecidas se comparó la información obtenida de estos recursos para determinar la relación instruccional entre éstos.

Descripción de los materiales analizados

Aprende en Casa II

Considerando los objetivos de la investigación, se han revisado las sesiones televisadas del programa Aprende en Casa II que se enmarcan para el cumplimiento del aprendizaje esperado: "Resuelve problemas de suma y resta con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos". Para el cumplimiento de dicho aprendizaje, se destinaron seis sesiones, las cuales fueron proyectadas por televisión y publicadas en la plataforma de

YouTube, los días lunes, martes, jueves y viernes, del 14 al 22 de septiembre de 2020.

Las sesiones se listan de la siguiente manera:

- Sesión 1. *Los números enteros en la recta*, con duración de 23'07". Objetivo: aprender a ubicar los números enteros en la recta y reconocer el uso de los números negativos en la vida cotidiana.
- Sesión 2. *El valor absoluto*, con duración de 18'52". Objetivo: aprender a reconocer el valor absoluto de los números positivos y negativos, su representación matemática y su uso en la recta numérica como medio para compararlos entre sí y dar sentido al valor absoluto y a los números simétricos.
- Sesión 3. ¿Debo o tengo?, ese es el dilema, con duración de 23'43". Objetivo: aprender a operar con las reglas de los signos de los números enteros para sumar y restar.
- Sesión 4. *Juega con actitud positiva o negativa*, con duración de 20'17". (No se presentó un objetivo explícito para esta sesión.)
- Sesión 5. *Operaciones de números positivos y negativos*, con duración de 26'06". Objetivo: plantear problemas de números con signo.
- Sesión 6. *Operaciones de números positivos y negativos*, con duración de 26'07". Objetivo: plantear problemas de números con signo.

La forma cronológica en la que se abordó el tema es de la siguiente manera: comienza con una explicación histórica de los números negativos y su aplicación cotidiana haciendo uso de ejemplos como el termómetro, el nivel del mar y una cuenta bancaria. Posteriormente, se ofrece una definición acerca de qué es una recta numérica y los elementos que la conforman, y con ello se introduce la ubicación de números positivos y negativos. En la siguiente sesión se habla del valor absoluto, se ponen ejemplos a través de la representación en la recta numérica y se manifiesta su representación simbólica. A continuación se proporciona una definición del uso de los signos en el álgebra, ya no sólo como indicadores de operación. Enseguida, se explica la aplicación de la suma de números con signo en una situación lúdica e igual se ponen de manifiesto las reglas para realizar restas con números con signo, para lo cual se utiliza el inverso aditivo. La sesión 5 es una retroalimentación de aprendizajes previos, ya que los docentes toman los planteamientos de las sesiones anteriores e incluso se repiten videos e indicaciones referentes a la resta de números negativos. En la sesión final se hace una sugerencia general de pasos a seguir en la resolución de problema, y se reafirman las reglas generales de la suma y la resta de números con signo, repitiendo videos de sesiones anteriores. Cabe mencionar que en la mayoría de las sesiones se propusieron dinámicas que ayudaran a los estudiantes a comprender mejor los contenidos abordados, en las cuales se les pedía elaborar su propio material y trabajar en colaboración con alguna persona cercana.

Libro Conecta Más

Para abordar el tema de *adición y sustracción de números con signo*, el libro *Conecta Más* organiza el contenido en dos secuencias didácticas: la secuencia 2 (pp. 22-29) y la secuencia 22 (pp. 156-161). De manera que en este libro no se le da tratamiento al tema de manera secuenciada, sino que se propone abordarlo en dos momentos separados por 15 semanas. A continuación se hace una descripción de cada una de las lecciones que conforman cada secuencia:

—Secuencia 2. *Números con signo 1*.
Está conformada por cuatro lecciones y tiene su propio aprendizaje esperado que es "Resuelve problemas de suma y resta con números enteros (positivos y negativos)"; es decir, se espera que en esta primera secuencia se trabaje sólo con números enteros. La forma en que se aborda el tema en esa secuencia es la siguiente:

• Lección 4. *El saldo de la caja* (conformada, a su vez, por tres actividades). Ésta es la primera lección que aborda el tema de adición y sustracción de números con signo en este libro, por lo que empieza con un problema inicial para introducir a los estudiantes a este nuevo contenido. En el problema se le pide al alumno que, a partir de una temperatura dada, considere ascensos y descensos determinados para estimar la temperatura final después de dichos cambios. Para esto se le proporciona una recta numérica que va del

−10 al 10, con la cual el estudiante puede apoyarse trazando flechas que representen los cambios de temperatura hasta llegar a la solución. En esta parte aparece una nota en la que se les indica a los alumnos cómo representar los números positivos y negativos.

En la actividad 2 se propone un juego grupal, "El saldo de la caja". Para esto los alumnos deben preparar tarjetas marcadas con los números enteros comprendidos del −10 al 10 (excepto 10 y −10), las cuales representan dinero. Cada integrante debe marcar una tarjeta con el número que prefiera. Luego, cada uno debe anotar en el pizarrón el número que colocó en la tarjeta e introducir su tarjeta en una caja. Al final de la dinámica los estudiantes deben averiguar cuánto dinero se tiene o se debe en total, para lo cual se les aclara que los números positivos representan dinero que se tiene a favor, y los negativos, dinero que se debe o dinero en contra.

Para la actividad 3, una vez que los alumnos ya se encuentran familiarizados con el juego *"El saldo de la caja"*, ahora se les propone una situación en la que ya están dados los valores de las tarjetas, en tres casos diferentes, por lo que ellos deben encontrar el saldo de las tres cajas.

• Lección 5. *Números opuestos y valor absoluto* (contiene cuatro actividades). En la actividad 1 de esta lección se proporciona a los alumnos una estrategia para calcular el saldo de la caja, la cual consiste básicamente en eliminar las tarjetas que tengan el valor 0 y las parejas que contengan números simétricos. Finalmente, se les propone que al número de mayor valor absoluto se le reste el de menor valor absoluto, lo cual le permitiría arribar a la solución.

Luego, en la actividad 2 se pide al estudiante que reflexione el porqué de cada paso del procedimiento descrito en la actividad 1 a través de un cuestionario.

La actividad 3 está enfocada en los números opuestos, pues en un primer momento se pide a los estudiantes que en la recta ubiquen el número opuesto a un número dado. Luego, a través de un par de preguntas abiertas, se les pide que reflexionen acerca de qué sucede al sumar una pareja de números opuestos.

• Lección 6. *Quitar no siempre perjudica* (conformada por cuatro actividades). En la actividad 1 y 2 de esta lección se continúa con la dinámica del saldo de la caja. Se pretende que los alumnos reflexionen sobre cómo deben ser los números que agreguen o quiten de la caja para que el saldo se vea afectado o beneficiado, en el entendido de que los estudiantes ya saben identificar cuándo un número entero es mayor que otro, independientemente de su signo. Esto se hace primero por medio de un pequeño cuestionario y luego mediante una tabla donde deben proponer valores de manera que el saldo que resulta en cada fila se vea afectado o beneficiado, según se indique. En la actividad 3 nuevamente se utiliza una tabla similar, sólo que ahora deben empezar a indicar la acción con una operación (suma o resta).

Finalmente, en la actividad 4 se proporciona una tabla de *verdadero* o *falso*, en la que los alumnos deben proporcionar ejemplos para justificar sus respuestas. En esta actividad se abordan las posibilidades de sumar o restar números con diferentes valores absolutos y diferentes signos.

• Lección 7. *Más sobre números con signo* (contiene una actividad). Esta actividad continúa con la idea del saldo de la caja y consiste en realizar ocho ejercicios del mismo tipo en los cuales se pide al alumno que proponga una colección de números que cumplan con características dadas; específicamente, que proporcionen una cantidad determinada de números, que el resultado de la suma sea el que se indica y que contenga algún número en particular. Esta dinámica les permite ejercitar la suma y la resta de números con signo que han aprendido con las actividades anteriores.

En esta lección ya aparecen algunos ejercicios con números decimales y fraccionarios positivos y negativos, y se hace explícita la propiedad de que al sumar parejas de números simétricos el resultado es cero (esto se hace mediante una nota al margen de las actividades), con la finalidad de que les sea de utilidad para resolver los ejercicios.

—Secuencia 22. *Números con signo 2.*
Se compone de tres lecciones. El aprendizaje esperado en esta secuencia es “Resuelve problemas de suma y resta con números con signo (enteros, fracciones y decimales)”; es decir, hasta este momento los estudiantes aprenden a sumar y a restar fracciones y decimales positivos y negativos, ya que en la

secuencia 2 únicamente aprendieron a hacerlo con números enteros. Las lecciones que componen esta secuencia y la forma en que abordan el tema se describen a continuación:

• Lección 71. *¿Dónde se usan números con signo?* (conformada por una actividad).
En la actividad 1 de esta lección se presenta un estado de cuenta con números decimales. Mediante un cuestionario los alumnos deben realizar algunas operaciones a partir de los datos que se les van dando. Para la segunda parte de la actividad se presenta una tabla de temperaturas de diferentes lugares y los alumnos deben comparar los datos para determinar cuáles son mayores y cuáles son menores, además de que se les pide ubicar en la recta numérica algunos valores de la tabla.

Para cerrar la actividad se muestra una tabla que contiene las estadísticas de un torneo de futbol, la cual deben completar calculando la diferencia de goles a favor y goles en contra, colocando un signo de más cuando el resultado son goles a favor y un signo de menos cuando son goles en contra.

• Lección 72. *Sumas y restas de números con signo* (se organiza en cuatro actividades).
Las primeras tres actividades de la lección están asociadas con una situación que se propone acerca de los datos que se obtienen en un juego de tirar dos dados. En estas tres actividades se proporcionan tablas que contienen operaciones con datos faltantes, las cuales deben ser completadas por los alumnos. A partir de estas tablas de operaciones se pide a los estudiantes que deduzcan y formulen reglas para sumar y restar números con signo; cabe mencionar que esta parte sólo maneja números enteros. En la cuarta actividad se proporciona a los alumnos cuatro ejemplos acerca de cómo manejar expresiones como y en las que deben de reflexionar qué sucede en cada caso y anotarlo.

Finalmente, se les presenta una colección de ejercicios de sumas y restas de números con signo (enteros, fracciones y decimales) y se les pide que los resuelvan mediante la técnica que prefieran.

• *Lección 73. Juegos con números* (contiene dos actividades).
Esta lección contiene actividades lúdicas, tales como cuadrados mágicos y estrellas con valores faltantes que deben ser completados, para lo cual se tienen que tomar en cuenta requerimientos indicados. De esta forma los alumnos pueden practicar la suma y la resta de números con signo.

Libro Selva Matemágicas

Este libro organiza el contenido del tema de *adición y sustracción de números con signo* en cuatro secuencias, las cuales se describen a continuación.

La secuencia 5 (pp. 32-39) tiene como aprendizaje esperado: "Resuelve problemas de suma de números enteros, positivos y negativos". Los ejercicios y los problemas que se plantean en esta secuencia consideran solamente los números enteros, y las actividades que la conforman son las siguientes:

- Actividad 1 (pp. 32-33). Problema relacionado con las pérdidas y las ganancias de una empresa y ejercicios explicativos y de lectura sobre el significado del signo negativo.
- Actividad 2 (pp. 33-34). Ejercicios reflexivos sobre el significado del signo negativo.
- Actividad 3 (pp. 34-35). Problema de la vida real relacionado con las pérdidas y las ganancias de una empresa y ejercicios de suma de números enteros positivos y negativos.
- Actividad 4 (p. 35). Ejercicios para trabajar en pareja en torno del cálculo de la suma de números enteros positivos y negativos.
- Actividad 5 (p. 36). Ejercicios para trabajar en pareja utilizando calculadora y observando cómo cambia el signo al sumar números con signo.
- Actividad 6 (pp. 36-37). Operaciones con signo positivo y negativo para resolver tres problemas de la vida cotidiana.
- Actividad 7 (pp. 37-38). Ejercicios para trabajar en pareja con la finalidad de que encuentren el significado del valor absoluto y así completen los ejercicios propuestos.
- Actividad 8 (p. 38). Ejercicios de suma de números con signo a través de un problema relacionado con compras y pagos.
- Actividad 9 (p. 39). Lectura sobre el signo negativo y el valor absoluto.

La secuencia 6 (pp. 40-46) tiene como aprendizaje esperado: "Resuelve problemas de resta de números enteros positivos y negativos". En esta secuencia se trabaja con la resta de números enteros. Las actividades que contiene esta secuencia son las siguientes:

- Actividad 1 (pp. 40-43). Ejercicios para trabajar en equipos de tres integrantes relacionados con un problema de inversión y solución de problemas con signo negativo, utilizando diagramas (recta numérica).
- Actividad 2 (pp. 43-44). Ejercicios sobre cálculo de restas transformándolas en sumas para después resolverlas.
- Actividad 3 (pp. 43-44). Ejercicios para trabajar en pareja completando los números que faltan para satisfacer una igualdad.
- Actividad 4 (p. 45). Información para comentar con un compañero, en la que se menciona que la resta siempre puede expresarse como una suma. Además se proporciona la definición de inverso aditivo.
- Actividad 5 (pp. 45-46). Ejercicios de resta utilizando diagramas (recta numérica); primero se abordan en parejas y después de manera grupal.

La secuencia 7 (pp. 47-50) tiene como aprendizaje esperado el siguiente: "Resuelve problemas de suma y resta con números decimales positivos y negativos". En esta secuencia se proponen ejercicios, problemas y lecturas con números decimales. Las actividades que conforman esta secuencia son las siguientes:

- Actividad 1 (pp. 47-48). Inicia con un problema sobre una competencia de robots, el cual puede ser muy llamativo para los estudiantes. Éste abarca el concepto de número decimal y resta de números con signo.
- Actividad 2 (p. 48). Resolución de ejercicios relacionados con el tema de resta de números decimales con signo, los cuales se pueden resolver con calculadora.
- Actividad 3 (pp. 49-50). Inicia con un problema de la vida cotidiana (tarjeta de crédito); posteriormente se formulan preguntas sobre cómo resolvieron el problema, con la intención de que el estudiante reflexione acerca de la suma de números decimales positivos.
- Actividad 4 (p. 50). La actividad empieza con una lectura sobre la suma y la

resta de números decimales; posteriormente se formulan preguntas para reforzar lo que dice la lectura y se aborda el tema de conmutatividad.

La secuencia 8 (pp. 51-56) tiene como aprendizaje esperado el siguiente: "Resuelve problemas de suma y resta con números fraccionarios positivos y negativos". En esta secuencia se trabaja con números fraccionarios. Las actividades que la conforman son las siguientes:

- Actividad 1 (p. 51). Inicia con un problema para trabajar en parejas; éste es sobre un tanque de gasolina. Posteriormente se comparten las respuestas con el resto del grupo para observar si la resta de fracciones sigue las mismas reglas que con los números decimales o enteros.
- Actividad 2 (pp. 52-54). Empieza con una lectura sobre las fracciones equivalentes para después mostrar cómo sumar y restar fracciones equivalentes.
- Actividad 3 (p. 54). Resolver sumas y restas de fracciones con la recta numérica.
- Actividad 4 (p. 55). Suma de fracciones a partir de la conversión de éstas a números decimales.
- Actividad 5 (pp. 55-56). Ejercicios de suma y resta de fracciones con signo, los cuales se pueden resolver con decimales o con las mismas fracciones.

Para introducir el tema, este libro parte de situaciones y problemas que encontramos en la vida cotidiana, lo cual hace que sea muy accesible para los estudiantes. Además, hay varios ejercicios que les permiten reconocer y profundizar sobre el concepto que deben trabajar. Asimismo, hay ejercicios prácticos que promueven la reflexión sobre cómo sumar números con signo. Algo característico de este libro es que en la mayoría de sus actividades se solicita a los estudiantes que trabajen en parejas y los conceptos los definen a través de lecturas. Finalmente, cabe mencionar que las actividades que se proponen en este libro, específicamente para el tema en cuestión, son un tanto monótonas, ya que, en general, se invita a la reflexión a través de cuestionarios.

Diferencias y similitudes entre libros y clases virtuales: análisis por categoría

Con base en las ideas de Bruner acerca de cómo arreglar el ambiente para optimizar el aprendizaje de los estudiantes en el momento de planificar el proceso educativo, encontramos algunas diferencias y similitudes entre los materiales analizados en relación con las categorías establecidas. La información correspondiente se presenta en la tabla 1 y posteriormente se describe con mayor detalle.

Con base en las consideraciones de Bruner, la instrucción debe intentar crear en el alumno una predisposición favorable al aprendizaje; sin embargo, en las clases virtuales las dinámicas que se proponen a los alumnos son poco atractivas y difícilmente éstos las realizarían en sus hogares, pues para la mayoría de éstas deben fabricar su propio material y, en ocasiones pedir, la colaboración de alguna otra persona. Por su parte, el aspecto que tiene el libro *Selva Matemágicas* también puede ser poco atractivo para los estudiantes por la monotonía de sus actividades (en su mayoría cuestionarios). Por esto consideramos que en ambos casos las dinámicas y las actividades propuestas no son favorables para predisponer positivamente a los alumnos. Al contrario, pueden provocar aburrimiento y poco interés.

Entre las ideas de Bruner también se encuentra el establecimiento de una secuencia eficiente para presentar los contenidos. En este caso consideramos que la secuencia en los contenidos que ofrece el libro *Conecta Más* es eficiente para generar un aprendizaje por descubrimiento mediante la motivación de los estudiantes para que sean ellos quienes descubran las relaciones entre los conceptos y el conocimiento que construyen. En este aspecto, el libro *Selva Matemágicas* y el programa Aprende en Casa no contribuyen a un aprendizaje por descubrimiento, ya que el primero se limita a presentar la información y luego hacer cuestionarios y proponer ejercicios, y el segundo se enfoca en presentar la información de una manera atractiva pero no da la oportunidad al alumno de que sea él mismo quien haga sus propias construcciones.

Por otra parte, de acuerdo con Bruner, el currículo debe organizarse en forma espiral, es decir, ir abordando los temas de manera progresiva, de

Tabla 1. *Diferencias y similitudes entre clases virtuales y libros de texto*

Categorías	***Diferencias***	***Similitudes***
Crear predisposición favorable al aprendizaje	En el caso de *Conecta Más* la variedad y el tipo de actividades que se presentan pueden ser más atractivos para el estudiante.	En el caso de Aprende en Casa II las dinámicas que se proponen son poco atractivas para los estudiantes y en el *libro Selva Matemágica* el tipo de actividades es monótono, por lo que en ambos casos se puede llegar a generar una predisposición negativa en el estudiante.
Estructurar el conocimiento para facilitar su comprensión	El libro *Conecta Más* contribuye a que se dé un aprendizaje por descubrimiento, lo cual permite profundizar en los conocimientos a partir de actividades que permiten al estudiante construirlo.	En el caso de Aprende en Casa II y *Selva Matemágica* no se promueve un aprendizaje por descubrimiento. El libro presenta el conocimiento a través de lecturas y cuestionarios y propone ejercicios repetitivos. En el caso de las clases virtuales se presenta la información de manera "atractiva", pero no se profundiza ni se invita al descubrimiento.
Establecer una secuencia eficiente para presentar los contenidos	En el libro *Conecta Más* el aprendizaje esperado se aborda en dos momentos diferentes, mientras que en los otros dos se aborda de manera continua.	El orden en que se presentan los contenidos, tanto en los libros como en los videos, es igual. Los contenidos cada vez se van tratando con mayor complejidad.

manera que los alumnos vayan modificando sus representaciones mentales a medida que desarrollan su capacidad de categorizar, conceptualizar y representar. Sin embargo, esto no sucede en las clases virtuales, pues en éstas se proporciona el contenido de modo directo y no se ofrecen las condiciones necesarias para que el alumno pueda profundizar y hacer progresar su conocimiento. Al respecto, en el libro *Conecta Más* sí se da esta oportunidad al alumno, pues se proponen situaciones y actividades organizadas de manera que le permiten ir modificando sus esquemas mentales progresivamente, lo cual le permite profundizar y hacer evolucionar los conocimientos que va adquiriendo.

Conclusiones

A partir de los análisis realizados al programa Aprende en Casa II y a los libros *Conecta Más* y *Selva Matemágica* se puede observar que no hay concordancia en cuanto a los tiempos y los espacios en los que se aborda el tema de "adición y sustracción de números con signo". En los videos el tema se aborda en seis sesiones seguidas; en el libro *Conecta Más,* en siete lecciones separadas en dos periodos, y en el libro *Selva Matemágica* se aborda en cuatro secuencias corridas, lo cual puede llegar a confundir al alumno en cuanto a la forma de trabajar conjuntamente con los materiales si no cuenta con la orientación correcta, ya que en las clases se le recomienda que consulte o trabaje en su libro de texto sin indicarle la parte exacta que puede abordar con lo visto en clase. Sin embargo, consideramos que hay partes de los libros de texto y episodios de los videos que podrían complementarse para obtener buenos resultados en el aprendizaje de los alumnos; pero es muy difícil que éstos encuentren por sí mismos esa relación debido a las diferencias sobre cómo se aborda el tema y la forma en que se organiza la información.

En general, utilizar estos dos materiales de forma paralela se puede convertir en una dificultad de aprendizaje para los estudiantes cuando no existe una orientación adecuada, ya que en el caso de que exista la guía del profesor, éste puede garantizar el vínculo necesario para lograr un aprendizaje significativo.

De acuerdo con las consideraciones de Bruner sobre cómo hay que arreglar el ambiente para optimizar el aprendizaje, podemos afirmar que la estrategia Aprende en Casa y el uso autodidacta del libro *Selva Matemágica* no favorecen la optimización del aprendizaje de los estudiantes por la forma en que presentan la información y por el tipo de actividades que proponen. No obstante, consideramos que un uso adecuado de las clases virtuales y del libro de texto, de manera simultánea, puede favorecer la optimización del aprendizaje de los estudiantes para el tema de la adición y la sustracción de números con signo. En este caso, de acuerdo con el análisis realizado, consideramos que el libro *Conecta Más* es el más adecuado, instruccionalmente, para abordar este tema, aunque no tiene total concordancia con las clases virtuales. Si se usaran ambos con la orientación docente adecuada se podrían complementar satisfactoriamente, ya que las actividades del libro ayudarían a solventar las carencias de las clases virtuales.

Referencias

Balbuena, H., Block, D., & García, S., (2020). *Secundaria: Conecta Más*. México: SM. https://n9.cl/0323z

Bernete, F. (2013). Análisis de contenido. En A. L. Marín & A. Novoa (Eds.). *Conocer lo social, estrategias de construcción y análisis de datos* (pp. 193-203).

Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge: Harvard University.

Fraenkel, J. R., Wallen, N. E., & Hyun, H. H. (1993). *How to Design and Evaluate Research in Education* (vol. 7). Nueva York: McGraw-Hill.

Guerrero, Z., Tivisay, M., Flores, H., & Hazel C. (2009). Teorías del aprendizaje y la instrucción en el diseño de materiales didácticos informáticos. *Educere*: *Revista Venezolana de Educación, 13*(45), 317-329. https://n9.cl/41a99

Guilar, M. (2009). Las ideas de Bruner: De la "revolución cognitiva" a la "revolución cultural". *Educere: Revista Venezolana de Educación, 13*(44), 235-241.

López, R. (2020). *Matemáticas. Selva Matemágicas*. México: Esfinge. http://conaliteg.esfinge.mx/Matematicas_1_Selva_Matemagica/

Maldonado, O., & Ramírez, F. (2010). Análisis del proceso de evaluacion del aprendizaje en Telesecundaria. Estudio de caso: Telesecundaria Federalizada 86. *Revista Ra Ximhai, 6*(3), 421-443.

Sánchez Martínez, E. H. (21 de septiembre de 2020). *Matemáticas: Primer grado de secundaria (Aprende en Casa 2). Operaciones de números positivos y negativos* [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=toWdUwjuEVE

Mayer, R. E. (2014). *Aprendizaje e instrucción*. México: Alianza Editorial.

Secretaría de Educación Pública (3 de agosto de 2020). *Boletín 205: Inicia-*

rá el ciclo escolar 2020-21 con el modelo de aprendizaje a distancia Aprende en Casa II: Esteban Moctezuma. https://n9.cl/zn4kq

Vega, L. C. G., & Balán, G. C. (2009). Aprender matemáticas, jugando con números y signo. *Quaderns Digitals: Revista de Nuevas Tecnologías y Sociedad*, (59), 14. https://n9.cl/vbjpb

Capítulo 15. La autenticidad en problemas matemáticos referentes al teorema de Pitágoras en libros de texto de secundaria en México

María Fernanda Pichardo Zamora
https://orcid.org/0000-0002-9651-5513
Estela Juárez-Ruiz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

Resumen

En los planes y programas de estudio de nivel secundaria en México se menciona la importancia de trabajar con problemas en contextos auténticos. Puesto que los libros de texto desempeñan un papel importante en el diseño y la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje, en este trabajo se propone analizar la autenticidad de problemas matemáticos en los libros de texto gratuitos de educación secundaria, teniendo como objeto matemático el teorema de Pitágoras. El sustento teórico de la investigación se establece en la teoría de situaciones auténticas de Palm. La investigación trató de un análisis de contenido mixto, preferentemente cualitativo; las unidades de análisis consistieron en problemas con un contexto acerca del teorema de Pitágoras. Los resultados indican que sólo 3.4% de los problemas analizados resultaron ser auténticos. El aspecto que menos se cumplió fue el de *pregunta*, ya que sólo 15.5% de los problemas de la muestra lo cumplieron; esto significa que la mayoría de las preguntas que se plantean en estos problemas no están vinculadas con la vida real de los estudiantes. Se concluye que en la gran mayoría de los problemas del teorema de Pitágoras analizados no se plantean situaciones contextualizadas, reales y significativas para los estudiantes.

Palabras clave: autenticidad, teorema de Pitágoras, libros de texto.

Introducción

El teorema de Pitágoras es uno de los temas con más aplicaciones que se abordan en tercer año de secundaria, además de que es uno de los conceptos matemáticos más recordados por los estudiantes, aunque en la mayoría de los casos no logran entender su contenido, puesto que cuando enuncian dicho teorema, generalmente no hacen referencia a figuras, sino que lo ven como algo puramente algebraico (Leal *et al.,* 2018). Incluso se ha observado en el nivel superior que los estudiantes confunden los conceptos de longitud y área ya que, en el caso de los triángulos rectángulos, utilizan el teorema de Pitágoras para calcular el área de éstos (Hernández Pacheco, 2020).

La importancia de comprender y manejar este tema es variada, como se menciona en el estudio de De la Torre y Pérez (2014), en el cual se afirma que, con base en el teorema de Pitágoras, los alumnos pueden llegar a construir sólidos o hasta hacer demostraciones, pasando por la utilización del cálculo numérico o algebraico, la modelización, la utilización de situaciones concretas y la resolución de problemas matemáticos que no son puramente algorítmicos. Esto permite que los alumnos pongan en práctica todas las dimensiones de la actividad matemática en su amplio sentido.

Desafortunadamente, lo que señalan De la Torre y Pérez (2015) casi nunca se logra, puesto que los estudiantes utilizan el teorema de Pitágoras como una simple fórmula, dejando a un lado su significado, aunque los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje del currículo de matemáticas de secundaria proponen, en esta etapa escolar, la comprensión del teorema y su utilización para obtener medidas y resolver problemas. Es difícil enseñar el teorema de Pitágoras para que los alumnos lo comprendan, identifiquen cuándo emplearlo y lo apliquen correctamente. Por lo tanto, es necesario seleccionar correctamente los problemas matemáticos que serán utilizados en la enseñanza (Troyano & Flores, 2016).

Generalmente, el profesor utiliza como guía para sus clases los libros de texto y la mayoría de las veces selecciona problemas que aparecen en ellos para que los alumnos los resuelvan (Picado, 2012). Los libros de texto se pueden ver como una obra literaria con información organizada de una disciplina y con un fin didáctico, que además busca responder a las necesidades educativas de la sociedad y al currículum del sistema educativo. Por eso resulta necesario estudiar qué están presentando los libros en cuanto al planteamiento de problemas, desde alguna perspectiva dada.

Tomando en cuenta estos aspectos, se han realizado varios análisis de libros de texto. Es el caso del estudio de Castro *et al.* (2016), quienes realizan un análisis didáctico de los libros de texto de educación secundaria en Costa Rica, estudiando los sistemas de representación usados y los contextos utilizados para mostrar los conceptos matemáticos. Existen otros análisis de libros de texto de matemáticas, como el de Madrid *et al.* (2018), que presenta un estudio de caso sobre la inclusión de contenidos explícitos acerca de la historia de las matemáticas en los libros de texto de nivel secundaria.

Planteamiento de problema

Los libros de texto se caracterizan por ser un apoyo en los procesos de enseñanza-aprendizaje, ya que el docente los utiliza como una guía en su planificación diaria acorde a los programas educativos. Además, el alumno recurre a ellos frecuentemente para complementar lo que ha estudiado en clases o para realizar una tarea por ser un recurso al que se puede acceder tanto en el aula como fuera de ella (Humbría & González, 2017).

Pepin y Haggarty (2001) afirman que los libros de texto son una de las principales herramientas para los docentes, pues son su guía esencial, de ahí que se les considere una fuente de contenido pedagógico.

Según Fan (2013), los libros de texto son una variable intermedia en el contexto de la educación, además de que pueden ser considerados como una variable independiente que incide en la enseñanza y el aprendizaje. También para Torres (1991) son un intermediario y un punto de unión entre el currículo y su uso en las aulas; de ahí la importancia de que los investigadores en educación matemática realicen estudios sobre libros de texto y su relación con otros factores de la educación.

Sin embargo, la investigación acerca de libros de texto en el ámbito de la educación matemática ha sido poco abordada, pese al frecuente uso de los libros de texto en el aula (Fan, 2013). Específicamente, una de las principales justificaciones a la hora de presentar el teorema de Pitágoras, según Pastor (2015), es la necesidad de la resolución de problemas relacionados con distancias. Para este autor, el objeto matemático que se está tratando tiene conexiones muy profundas con otros temas, como: la trisección de un ángulo, la cuadratura del círculo, el concepto de número irracional y las constantes aplicaciones en ámbitos como la topología; de ahí la elección de nuestro tema de análisis en los libros de texto.

En el enfoque pedagógico de los planes y programas de estudio de nivel secundaria en México (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017) se menciona la importancia de resolver problemas para el aprendizaje de las matemáticas, así como también se señala que la autenticidad de los contextos es fundamental para que la resolución de problemas se convierta en una práctica más allá de la clase de matemáticas, de donde se espera que los libros de texto utilizados en el nivel secundaria planteen problemas con contextos auténticos.

Por esto, una posible perspectiva desde la cual se deben estudiar los problemas planteados en los libros de texto es el análisis de su autenticidad como tareas vinculadas al contexto y a la realidad de los estudiantes. Una propuesta teórica acerca de cuáles pueden considerarse tareas auténticas es la de Palm (2008), quien define un conjunto de aspectos que permiten a una tarea o a un problema considerarse auténtico.

La Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (Conaliteg) es un organismo público descentralizado de la administración pública federal cuyo objetivo es proporcionar libros de manera gratuita a los alumnos de educación básica inscritos en el sistema educativo nacional de México. Se propone estudiar este tipo de libros, por su alto uso en la educación básica mexicana (se pueden consultar en la página https://www.conaliteg.sep.gob.mx/secundaria.html).

De esta forma, el objetivo general de este trabajo es analizar la autenticidad de los problemas referentes al teorema de Pitágoras propuestos en los libros de texto de la Conaliteg de educación secundaria. Y para lograr nuestro objetivo nos hemos guiado por la pregunta de investigación: ¿qué aspectos de autenticidad cumplen los problemas planteados referentes al teorema de Pitágoras en los libros de texto de la Conaliteg de educación secundaria?

Revisión de la literatura

La mayoría de los conocimientos matemáticos que son adquiridos en el aula se quedan ahí. Es decir, estos conocimientos no son útiles para resolver los problemas que se les presentan a los alumnos cotidianamente fuera del colegio, ni para atender a las demandas y a las necesidades que les solicita la sociedad.

De ahí la importancia de que en el salón de clases de matemáticas se trabaje con problemas auténticos, que los ayuden a entender el mundo que los rodea y que los conocimientos que se generen en el aula sean significativos para el alumno, además de que dichos saberes puedan ser aplicados para resolver problemas de la vida real.

Es de interés conocer si los problemas referentes al teorema de Pitágoras que aparecen en los libros de texto de matemáticas de la Conaliteg en su mayoría son problemas auténticos.

Con respecto a la revisión de la literatura realizada por las autoras de este trabajo, se puede mencionar el trabajo de Montoya (2015), quien realiza un escrutinio histórico en el que se analizan los pensamientos filosóficos de Pitágoras y la escuela pitagórica y las referencias hacia éstos por parte de Tertuliano.

Troyano y Flores (2016), por su parte, hacen un análisis de contenido para apreciar los significados del concepto, enfocado principalmente en la comprensión del teorema de Pitágoras y en la percepción que tiene el alumno de éste. Además, plantean una tarea para lograr dicho objetivo.

De la Torre y Pérez (2015) realizan una investigación para conocer qué contenidos se seleccionan en los libros de texto en relación con el teorema de Pitágoras, además de ver cómo se organizan los contenidos: por dificultad o por categorías, y averiguan si estos contenidos están articulados para ser comprendidos por los estudiantes.

Con respecto al análisis de los libros de texto, Madrid *et al.* (2018) muestran resultados sobre el uso de la historia de la matemática como organizador curricular y eje temático en los libros de texto de educación secundaria.

Tomando en cuenta lo anterior, se justifica la necesidad de realizar una investigación acerca de la autenticidad de los problemas que presentan los libros de texto de nivel secundaria en México referentes al tema de teorema de Pitágoras.

Marco teórico

Esta investigación se sustenta en la teoría de Palm (2008), la cual establece algunos aspectos para examinar problemas verbales matemáticos, con la finalidad de evaluar su autenticidad. Esta teoría está enfocada en analizar la correspondencia entre problemas verbales y situaciones de tareas que puedan aparecer en el mundo real.

Ya que no es posible simular todos los aspectos involucrados en situaciones de la vida real, simplemente porque las condiciones no son las mismas, Palm propuso los siguientes aspectos para simular estas situaciones: *evento, pregunta, información y datos, presentación, estrategias de solución, circunstancias, requisitos de solución* y *propósito.*

Posteriormente, Palm y Nyström (2009) aseveran que de todos los aspectos y subaspectos definidos inicialmente, cinco son esenciales para que un problema sea considerado más auténtico. En ellos se sustenta este trabajo y se definen a continuación:

1. *Evento.* Es probable que el alumno lo viva fuera de la escuela.
2. *Pregunta.* Podría ser formulada de manera habitual para el evento descrito. La respuesta a las preguntas tiene un valor práctico o es interesante para otros no interesados en las matemáticas.
3. *Existencia de datos.* Los datos coinciden con datos accesibles en la vida real.
4. *Propósito en el contexto figurativo.* Se menciona explícitamente el propósito que se persigue con su resolución, que coincide con el que cabría plantearse en la vida real.
5. *Especificidad de los datos.* Los personajes tienen nombre propio, los objetos están definidos y los lugares son específicos, o bien el problema está formulado en primera o segunda persona (Vicente & Machado, 2017).

Con la finalidad de explicitar a qué se refieren estos aspectos, en la tabla 1 se proporciona un ejemplo de un problema y su versión más auténtica (Palm & Nyström, 2009).

TABLA 1. *Tarea no auténtica con su versión más auténtica*

Tarea	***Versión más auténtica***
360 estudiantes deberán ir en autobús en un viaje escolar. Cada autobús tiene capacidad para 48 estudiantes. ¿Cuántos autobuses se necesitan?	Todos los estudiantes de la escuela deberán ir juntos a un viaje escolar el 15 de mayo. Usted y los otros estudiantes organizadores han decidido que todos deben ir en autobús y que usted debe contratar los autobuses. Ha visto en las listas de nombres de los estudiantes que hay 360 estudiantes en la escuela. Su profesor dijo que puede pedir los autobuses de la estación y que cada autobús tiene capacidad para 48 estudiantes. Complete la nota que aparece a continuación, la cual se va a enviar a la estación para ordenar los autobuses. ORDEN DE AUTOBÚS Nombre: .... Escuela: .... Fecha del viaje: .... Número de autobuses a ordenar: .... Otros requerimientos: ....

FUENTE: Traducido de Palm y Nyström (2009).

Como se puede observar, en la versión más auténtica ya se habla de un evento que puede ocurrir en la vida real; la pregunta es habitual cotidianamente; los datos proporcionados coinciden con los que se pueden obtener en la vida real; el propósito y los datos proporcionados son claros y específicos. Además, en esta versión más auténtica el estudiante puede hacer uso de su experiencia de la vida real para resolver el problema, además de las matemáticas escolares.

En este trabajo de investigación se considerará auténtico un problema que cumple con estos cinco aspectos.

Método

En esta investigación se realizó un análisis de contenido mixto, preferentemente cualitativo, que Fraenkel *et al.* (1993) establecen "se puede utilizar en cualquier contexto en el que el investigador desee un medio para sistematizar y (a menudo) cuantificar datos" (p. 479). El análisis de contenido se realizó sobre una muestra de problemas extraída de los 29 libros de texto gratuitos de tercer año de secundaria de la Conaliteg, utilizados actualmente en las escuelas públicas. Se llevó a cabo un muestreo intencional de problemas, con el objetivo de contar con una muestra lo más variada posible, ya que en algunos casos un mismo problema se repetía con una ligera variación. Se seleccionaron dos problemas sobre el teorema de Pitágoras de cada uno de los libros, lo que arrojó un total de 58 problemas. Para esta selección no se tomaron en cuenta los problemas en cuyos planteamientos no hubiera un contexto.

Con respecto al estudio cualitativo, el análisis de cada uno de los problemas se basó en los aspectos propuestos por Palm y Nyström (2009), tomando en consideración las siguientes categorías: evento, pregunta, existencia de datos, propósito y especificidad de los datos, asignando un valor dicotómico a cada aspecto. A cada problema se le asignó el valor de 1 si el problema cumplía con el aspecto y el valor de 0 si no cumplía con él. Si la suma de todos los aspectos resultaba ser 5 esto quería decir que se trataba de un problema auténtico. Dicho análisis de autenticidad fue realizado por las dos investigadoras como expertas del tema trabajando conjuntamente, para tener una valoración consensuada de cada aspecto, y cuando hubo discrepancia se discutió hasta llegar a un acuerdo.

El estudio cuantitativo consistió de un análisis de correlación para observar si los aspectos presentaron una relación positiva o negativa en los datos. Puesto que el muestreo no fue aleatorio, los resultados no pueden ser generalizados a todos los problemas del teorema de Pitágoras de la Conaliteg, pero aporta una valoración más que complementa el análisis cualitativo de estos 58 problemas analizados.

Análisis de resultados

Análisis cualitativo. En este análisis de autenticidad inicialmente se obtuvieron los porcentajes de presencia de cada uno de los aspectos en los 58 problemas seleccionados, los cuales se muestran en la tabla 2.

TABLA 2. *Problemas que cumplen con los aspectos de autenticidad*

Aspecto	*Porcentaje*
Evento	29.3
Pregunta	15.5
Existencia de datos	58.62
Propósito	32.75
Especificidad de los datos	39.65

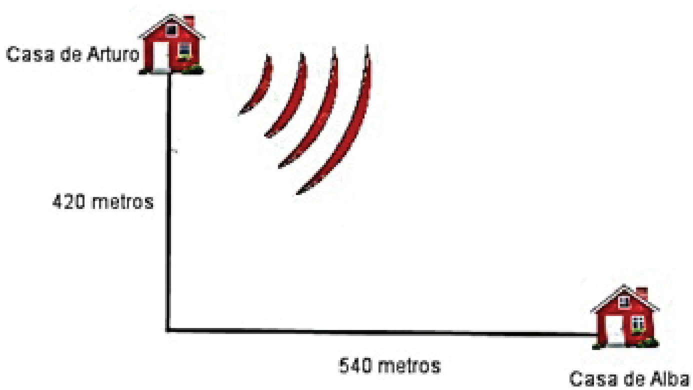
Como se puede observar, el aspecto que más se cumplió fue el de *existencia de datos,* ya que 34 de los 58 problemas cumplieron con este aspecto, seguido de *especificidad de los datos* con 23 problemas. El *propósito* lo cumplieron 19 problemas y 17 problemas cumplieron con el *evento*. El aspecto que menos se cumplió en los problemas es el de *pregunta*, ya que solamente nueve problemas aprobaron este aspecto.

De todos los problemas analizados sólo dos pudieron considerarse auténticos, lo cual equivale a 3.4% del total. En la figura 1 se muestra uno de los problemas que cumplió con los cinco aspectos de autenticidad. En efecto, el evento descrito en la tarea sí se puede presentar en la vida real; sí les puede interesar la potencia que tiene el *walkie-talkie*, es decir la pregunta; los datos coinciden con los que se pueden presentar en la vida real, puesto que se habla de distancias que sí pueden darse en una ciudad bien trazada; tiene un propósito, el que puedan comunicarse, y es específico en los datos proporcionados, pues habla de lugares y personas específicas.

En la figura 2 se puede observar el otro ejemplo de problema auténtico. El problema sí puede plantearse en la vida real, ya que este tipo de antenas sí existe pues usualmente éstas se sujetan con cables, cumpliendo con el aspecto de evento; la pregunta de calcular la cantidad de cable necesario sí se podría plantear en la vida real; existe un propósito, el de calcular

FIGURA 1. *Ejemplo de problema auténtico*

Para ir en bicicleta de su casa a la casa de Alba, Arturo recorre hacia el sur 420 metros, luego da vuelta en una esquina y recorre 540 metros hacia el este. Para comunicarse, Arturo y Alba compraron un juego de walkie-talkie, cuyo alcance es de 800 metros. ¿Es suficiente la potencia de su equipo de comunicación o requerirían uno más potente? Justifiquen su respuesta.



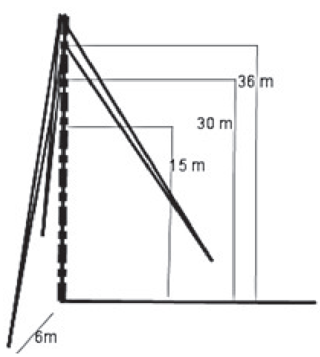
FUENTE: Adaptado de un libro de texto de secundaria de la Conaliteg.

FIGURA 2. *Segundo ejemplo de problema auténtico*

1. Analiza y resuelve el problema. Justifica tus respuestas.

Antonio es ingeniero y diseña antenas para telecomunicaciones. Las antenas se sujetan a la estructura con cables de acero, a diferentes alturas tal como se muestra en la imagen de la izquierda. Antonio debe calcular la cantidad de cable que se requiere para fijar cada antena.

La distancia de la base de la antena al punto donde se fija el cable es de 6m; los cables se sujetarán a 15 m, 30 m y 36 m de altura.



a) Calcula la cantidad de cable que se requiere cuando se sujete a ...

15 m de altura. ____

30 m de altura. ____

36 m de altura. ____

b) Si los cables se sujetan a la misma distancia en tierra y son cuatro puntos, como se muestra en la imagen, ¿qué cantidad de cable se requiere?

FUENTE: Adaptado de un libro de texto de secundaria de la Conaliteg.

el cable necesario, y es específico, puesto que habla de lugares y personas con nombre propio. Los investigadores-revisores consideraron que la imagen podría mejorarse (la imagen que aquí se presenta es muy parecida a la del libro, y, como puede observarse, no se aprecia cómo se sujeta la antena con los cables).

Del análisis cualitativo también se pudo observar que dos problemas más resultaron casi auténticos, puesto que cumplieron con cuatro de los aspectos que analizamos aqui. En uno de ellos falla el aspecto *pregunta,* y en el segundo, falla el aspecto *existencia de datos*. Nuevamente, sólo 3.4% de los problemas analizados son casi auténticos. Éstos se muestran a continuación.

FIGURA 3. *Primer problema que cumple cuatro aspectos de autenticidad*

3. Un grupo de estudiantes de arquitectura tiene como proyecto final reestructurar una casa de campo con a fachada que se muestra en la figura 3. Entre las propuestas, Juan plantea arreglar la escalera y diseñar una terraza; Beatriz propone remodelar una de las ventanas y diseñar para ella un marco rectangular formado por barras de solera y dos vidrios triangulares que simulen un vitral.

a) ¿Cuáles son las medidas de los vidrios triangulares que simularán el vitral?
b) Describe el procedimiento que realizaron para contestar la pregunta anterior.
c) ¿Cuál será la altura de la escalera que dará acceso a la terraza?
d) Expliquen como obtuvieron la respuesta anterior.

FUENTE: Adaptado de un libro de texto de secundaria de la Conaliteg.

El problema que aparece en la figura 3 no cumple con el aspecto *pregunta*, ya que no cabría plantearse en la vida real de esta manera, puesto que para obtener las medidas solicitadas bastaría con medir directamente y no sería necesario utilizar el teorema de Pitágoras.

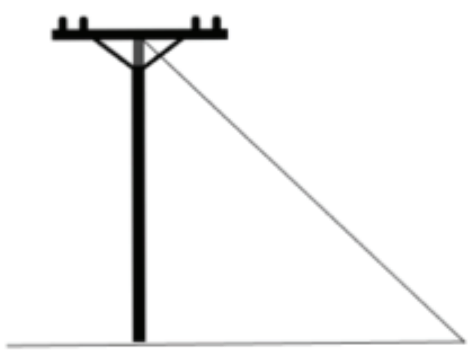
Referente al segundo problema casi auténtico, este aparece en la figura 4. El aspecto que se considera que no se cumple es el de *existencia de datos*, ya que los expertos consideran que 45 metros de distancia de la base al final del tirante es un exceso y no coincide con los datos que se encuentran disponibles en la vida real. Los expertos también coinciden en que el dibujo no representa de manera correcta la situación planteada.

El 24.13% (14 problemas) de los problemas cumplieron con tres de los aspectos de autenticidad. Aunque los dos aspectos que no cumplieron fueron variados, los que predominaron fueron *evento* y *pregunta,* pues cinco de los 14 problemas tuvieron estas características. Es decir, se trata de problemas que sí persiguen un propósito explícito, pero que no toman en cuenta que el evento se pueda presentar en la vida real y que se pueda formular la pregunta adecuada a ese contexto.

Otro resultado que se observa es que nueve de los 58 problemas estudiados sólo cumplen con dos aspectos; los que predominaron fueron *exis-*

FIGURA 4. *Problema casi auténtico 2*

3. Los dueños de una estación de televisión desean colocar una antena de 60 m de altura, por lo que deciden poner tirantes para fijarla mejor. Si las bases para estos están a 45 m del pie de la antena y los tirantes que la van a sostener llegan a la parte más alta de la antena, ¿cuánto deberán medir los tirantes?



FUENTE: Adaptado de un libro de texto de secundaria de la Conaliteg.

tencia de datos y *especificidad de los datos*. Cinco de los nueve problemas sólo hablan de datos concisos y específicos, pero los eventos descritos no pueden suceder, la pregunta no cabría planteársela en la vida real y no persiguen un propósito.

Un dato preocupante es que 41.37% (24 problemas) sólo cumple con un aspecto de autenticidad. El aspecto que predomina es el de *existencia de datos*; específicamente, 14 de ellos cumplen con proporcionar datos numéricos, sin tomar en cuenta los otros cuatro aspectos.

También se encontraron problemas en los que no se cumplió con ninguno de los aspectos de autenticidad. Un total de siete de los 58 problemas se encuentran en esta categoría, donde sólo se plantea un triángulo rectángulo con ciertas medidas, que permita aplicar el teorema de Pitágoras sin un propósito, una pregunta, ni especificidad de datos, lo que está vinculado con que los problemas tengan un contexto.

En la figura 5 se muestra un problema que no cumple con ninguno de los aspectos de autenticidad. Como puede observarse, es poco probable que el poste se desplome desde la base y caiga exactamente sobre el borde superior de la barda del edificio; por lo tanto, no cumple con el *evento*. Dado el accidente automovilístico, no sería habitual preguntarse por la altura del edificio, por lo cual no se cumple con la *pregunta*. Los datos son poco probables, pues en la vida real las medidas no son tan exactas; luego, no se cumple con la *existencia de datos*. Tampoco se cumple el *propósito* en el contexto figurativo, pues no se menciona explícitamente en el problema. Por último, el personaje no tiene nombre propio, de donde no se cumple con la *especificidad de los datos*.

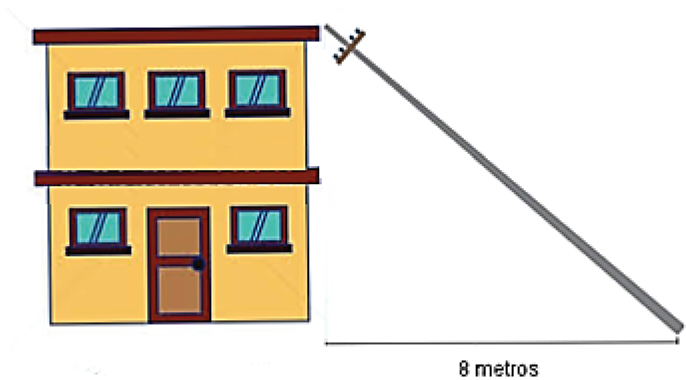
Los porcentajes mencionados anteriormente se resumen en la tabla 3.

De los 58 problemas que constituyeron la muestra, en 38 trataban de encontrar la medida de la diagonal del triángulo, 18 trataban de encontrar la medida de uno de los catetos, uno trataba sobre encontrar las medidas de un triángulo rectángulo y un problema no se pudo categorizar puesto que pide al estudiante que continúe una historia. Dicho problema se muestra en la figura 6.

A pesar del proceso de muestreo intencional hubo contextos repetidos, como el de obtener la altura de un edificio (tres de los problemas), la altura de una escalera (tres de los problemas), la longitud del cable de una

FIGURA 5. *Problema que no cumple con ningún aspecto de autenticidad*

En últimas noticias: Un automovilista pierde el control del vehículo y choca contra un poste de teléfono; por fortuna sólo hubo daños materiales. A una distancia de 8 m del mástil se encontraba una casa con 6 m de altura; la punta de éste quedó como muestra la figura:



a) Si utilizas el teorema de Pitágoras, ¿qué dato falto?
b) ¿Qué harias para obtenerlo?
c) ¿Qué altura tiene el poste?

FUENTE: Adaptado de un libro de texto de secundaria de la Conaliteg.

TABLA 3. *Porcentaje de problemas que cumplen con un determinado número de aspectos*

Número de aspectos	***Porcentaje de problemas que lo cumplen***
5	3.44
4	3.44
3	24.13
2	15.51
1	41.37
0	12.06

FUENTE: Adaptado de un libro de texto de secundaria de la Conaliteg.

FIGURA 6. *Problema que no se pudo categorizar*

"Mientras caminaba por la playa me detuve a ver el horizonte. Justo frente a mí se encontraba mi primo sosteniendo una boya que flotaba a 45 m de distancia de la escalera del salvavidas que se ubicaba a mi mano derecha a 30 m de distancia, él me gritaba que lo acompañara porque sabe que soy muy buen nadador, pero sólo pude nadar 30 m continuos sin detenerme a descansar…". Termina la historia con datos precisos para darle un buen final y realizar en tu cuaderno un dibujo que represente la situación.

FUENTE: Adaptado de un libro de texto de secundaria de la Conaliteg.

antena (tres de los problemas) y la diagonal de un rectángulo (tres de los problemas). En total se obtuvieron 41 contextos diferentes.

Asimismo, se concluyó que ocho de los 58 problemas seleccionados se refieren a situaciones que incluyen una escalera, pero ninguno de ellos resultó auténtico, pues a lo más cumplieron cuatro de los aspectos. Se pudo notar que en ninguno de ellos se hace explícito cuál es el propósito de resolver el problema.

También se notó que otro de los temas recurrentes en los problemas es el de una antena con cables sujetados al suelo; cuatro de los ejercicios seleccionados trataban acerca de este tema, pero, a diferencia de los problemas en que había una escalera, su nivel de autenticidad varió bastante, pues uno de ellos es el que se menciona como uno de los problemas auténticos encontrados, y otro no cumplió con ninguno de ellos, como se muestra en la figura 7.

En cuanto al análisis cuantitativo de correlación se utilizó el estadístico de Spearman, puesto que los datos no son normales. Se recurrió a la escala de Ortega *et al.* (2009) para la interpretación de los resultados.

FIGURA 7. *Problema no auténtico de un poste de luz*

4. Un poste de luz eléctrica está sujeto al suelo por medio de unos tirantes de acero. Si uno de estos tirantes mide 30 metros de largo y está anclado a 15 metros de distancia de la base del poste, ¿cuál es la altura del poste?

FUENTE: Adaptado de un libro de texto de secundaria de la Conaliteg.

En los problemas analizados existe una fuerte correlación entre el propósito y la pregunta (.54), lo cual se debe a que cuando un problema persiguió un propósito específico con su resolución, la pregunta estuvo relacionada

TABLA 4. *Resultado del análisis de correlación de Spearman*

		1	*2*	*3*	*4*	*5*
1.	*Evento*	1				
2.	*Pregunta*	*0.46*	1			
3.	*Existencia de datos*	0.19	–0.05	1		
4.	*Propósito*	0.28	*0.54*	–0.07	1	
5.	*Especificidad*	0.19	–0.07	0.18	0.12	1

FUENTE: Adaptado de un libro de texto de secundaria de la Conaliteg.

con dicho propósito, de manera que cuando el problema contó con un propósito, la pregunta también resultó adecuada, según la definición de Palm y Nyström (2009). De la misma manera, se encontró una correlación débil entre pregunta y evento (0.46), por la misma razón.

Conclusiones

Como resultado del análisis de los problemas en la muestra se llegó a la conclusión de que la gran mayoría de los problemas planteados referentes al tema del teorema de Pitágoras en los libros de texto de matemáticas de tercer año de secundaria de la Conaliteg no son auténticos. El 96.5% de los problemas analizados no cumplen con al menos un aspecto de autenticidad. Sólo 3.5% de los libros analizados resultó ser auténtico. Este resultado es preocupante puesto que se trata de libros gratuitos de alta distribución en el nivel de secundaria (grados 7-9) en México.

Otro 3.5% de los problemas resultaron ser casi auténticos, es decir, cumplen con cuatro de los cinco aspectos de autenticidad. Este porcentaje es muy pequeño, lo que indica baja representatividad. El aspecto que más se cumplió en estos problemas fue el de existencia de datos, lo cual refleja que dichos problemas se enfocan más en representar un triángulo rectángulo en el que se pueda aplicar la fórmula del teorema de Pitágoras, más que en contextualizar el problema con un *evento, pregunta, propósito* o *datos específicos.*

El aspecto que menos se cumplió fue el de pregunta, pues aunque se encontraron problemas que tienen un evento, son específicos en los datos, los datos coinciden con los de la vida real, y tienen un propósito, la pregunta no es pertinente planteársela, o no se resolvería de la misma forma en la vida real, es decir, no se utilizaría el teorema de Pitágoras para darle solución en la vida cotidiana.

El aspecto que más se cumplió fue el de *existencia de datos* con 58.62%. Lo anterior puede indicar que los autores de los libros medianamente se preocupan por diseñar problemas con datos reales. Sin embargo, esto no es suficiente para que un problema esté estrechamente vinculado con la realidad de los estudiantes; hace falta cumplir con más aspectos, según la teoría de Palm.

En los problemas se repiten ciertos contextos; el que más aparece es el de una escalera recargada sobre una pared, pero ninguno de estos problemas resultó ser auténtico.

Con esta información se puede concluir que la mayoría de las situaciones planteadas en los libros de texto de tercero de secundaria de la Conaliteg referentes al tema del teorema de Pitágoras no plantean situaciones contextualizadas, reales y significativas donde se haga uso de las matemáticas.

Referencias

Castro, L., Cortés, P., Guzmán, R., Lezcano, N., Mora, G., Rosales, N., & Picado, M. (2016). Historia y conceptos matemáticos en libros de texto de matemáticas para la educación secundaria en Costa Rica (1949-2012). En E. Mariscal (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 64–73). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Fan, L. (2013). Textbook Research as Scientific Research: Towards a Common Ground on Issues and Methods of Research on Mathematics Textbooks. *ZDM International Journal on Mathematics Education, 45*(5), 765–777. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6

Fraenkel, J. R., Wallen, N. E., & Hyun, H. H. (1993). *How to Design and Evaluate Research in Education* (vol. 7). McGraw-Hill.

Hernández Pacheco, C. A. (2020). *La manipulación de la imagen como estrategia de visualización en la resolución de problemas de cálculo de áreas*

(Tesis de maestría). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. https://www.fcfm.buap.mx/posgrados/catalogo-tesis/mem

Humbría, C., & González, F. E. (2017). La geometría en la Escuela Venezolana de Enseñanza de la Matemática. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 51,* 250–262.

Leal, B., Mata, G., & Muñoz, S. (2018). El teorema de Pitágoras: Historia y casos para triángulos no rectángulos, con mira a profesores de educación básica y media. *Espacios, 39*(43), 1–9.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Montanero, C., & López-Esteban, C. (2018). La historia de las matemáticas en los libros de texto de matemáticas de los primeros cursos de la ESO. *Investigación en Educación Matemática, 22*(3), 1–10.

Montoya, R. A. L. (2015). La recepción de Pitágoras y la escuela pitagórica en los escritos de Tertuliano (Segunda parte). *Redemptorystowskie, 13,* 53–73.

Ortega, R. M. M., Pendás, L. C. T., Ortega, M. M., Abreu, A. P., & Cánovas, A. M. (2009). El coeficiente de correlación de los rangos de Spearman caracterización. *Revista Habanera de Ciencias Médicas, 8*(2), 0–0.

Palm, T. (2008). Impact of Authenticity on Sense Making in Word Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 37–58. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9083-3

Palm, T., & Nyström, P. (2009). Gender Aspects of Sense Making in Word Problem Solving. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 59–76.

Pastor Fernández, D. (2015). *Teorema de Pitágoras: Una propuesta didáctica para segundo de ESO* (Tesis de maestría). Universidad de Zaragoza.

Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Libros de texto de matemáticas y su uso en las aulas de inglés, francés y alemán. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33*(5), 158–175.

Picado, M. (2012). *El sistema métrico decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892)* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. http://fqm193.ugr.es/produccioncientifica/tesis/ver_detalles/7464/

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2017). *Aprendizaje clave para la educación integral: Matemáticas. Educación secundaria. Plan y programas* *de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/biblioteca/secundaria/mate/1-LPM-sec-Matematicas.pdf

Torre, E. de la, & Pérez, M. (2014). *Paradigmas y espacios de trabajo geométricos en los libros de texto de la ESO*. 27-44. https://www.uv.es/gutierre/aprengeom/archivos2/DelaTorrePerez08.pdf

Troyano, J., & Flores, P. (2016). Percepción de los alumnos acerca del teorema de Pitágoras. Épsilon*: Revista de Educación Matemática, 33*(3), 51-60.

Vicente, S., & Machado, E. (2017). Dominios de contenido y autenticidad: Un análisis de los problemas aritméticos verbales incluidos en los libros de texto españoles. *PNA, 11*(4), 253-279.

Tendencias en la educación matemática 2021, de Lidia Aurora Hernández Rebolar,
Estela Juárez Ruiz y Honorina Ruiz Estrada (editoras)
publicado por Ediciones Comunicación Científica S. A. de C. V.,
en diciembre de 2021

Este libro surge del VII Taller Internacional Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación (TEMBI) que se realizó en noviembre de 2020 en modalidad virtual, auspiciado por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y en alianza con la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. Todos los trabajos que constituyen los capítulos fueron arbitrados en un proceso doble ciego por especialistas de la Educación Matemática tanto nacionales como del extranjero. Son, por tanto, aportaciones que cumplen con las características de investigaciones científicas en el área, que pretenden contribuir a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática de los niveles educativos básico (primaria y secundaria), medio superior y superior. Está dirigido a docentes de matemáticas, a estudiantes de posgrado en Educación Matemática y a investigadores de la misma disciplina. Esperamos que sea útil para todos ustedes.

Lidia Aurora Hernández Rebollar es doctora en Ciencias Matemáticas por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP); profesora de tiempo completo y, actualmente, coordinadora del Posgrado en Educación Matemática en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP; y es miembro del SNI.

Estela de Lourdes Juárez Ruiz es doctora en Ciencias Matemáticas; profesora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP; miembro del cuerpo académico "Aprendizaje y enseñanza de las ciencias exactas"; pertenece al Sistema Nacional de Investigadores. Sus intereses se orientan hacia la teoría APOE y el modelo MTSK.

Honorina Ruiz Estrada es doctora por el Cinvestav-IPN graduada en 1991. Desde 1993, ha sido catedrática de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, donde actualmente es profesora de la planta básica del Posgrado en Educación Matemática. Su línea de investigación comprende la enseñanza-aprendizaje de la matemática escolar del nivel básico.

COMUNICACIÓN CIENTÍFICA PUBLICACIONES ARBITRADAS
HUMANIDADES, SOCIALES Y CIENCIAS
www.comunicacion-cientifica.com

DOI.org/10.52501/cc.019

ISBN: 978-607-99505-8-3
9 786079 950583