TENDENCIAS en la educación MATEMÁTICA

2022

COMUNICACIÓN CIENTÍFICA

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Estela Juárez Ruiz
(editoras)

Tendencias en la educación matemática 2022

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Estela Juárez Ruiz
(editoras)

COMUNICACIÓN
CIENTÍFICA

Ediciones Comunicación Científica se especializa en la publicación de conocimiento científico de calidad en español e inglés en soporte de libro impreso y digital en las áreas de humanidades, ciencias sociales y ciencias exactas. Guía su criterio de publicación cumpliendo con las prácticas internacionales: dictaminación de pares ciegos externos, autentificación atiplagio, comités y ética editorial, acceso abierto, métricas, campaña de promoción, distribución impresa y digital, transparencia editorial e indexación internacional.

Cada libro de la Colección Ciencia e Investigación es evaluado para su publicación mediante el sistema de dictaminación de pares externos y autentificación antiplagio. Invitamos a ver el proceso de dictaminación transparentado, así como la consulta del libro en Acceso Abierto.

www.comunicacion-cientifica.com

DOI.ORG/ 10.52501/cc.088

COMUNICACIÓN CIENTÍFICA PUBLICACIONES ARBITRADAS
HUMANIDADES, SOCIALES Y CIENCIAS

CC+I
COLECCIÓN CIENCIA e INVESTIGACIÓN

Tendencias en la educación matemática 2022

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Estela Juárez Ruiz
(editoras)

COMUNICACIÓN
CIENTÍFICA

Tendencias en la educación matemática 2022 / Lidia Aurora Hernández Rebollar, Estela Juárez Ruiz (editoras). — Ciudad de México : Comunicación Científica, 2022. — 169 páginas : ilustraciones. — (Colección Ciencia e Investigación).

ISBN 978-607-59473-1-0

DOI 10.52501/cc.088

1. Matemáticas — Estudio y enseñanza. I. Hernández Rebollar, Lidia Aurora, editor. II. Juárez Ruiz, Estela, editor. III. Serie.

LC: QA11.2 Dewey: 510.07

Primera edición en Ediciones Comunicación Científica, 2022

Diseño de portada: Francisco Zeledón • Interiores: Guillermo Huerta

Ediciones Comunicación Científica S.A. de C.V., 2022
Av. Insurgentes Sur 1602, piso 4, suite 400
Crédito Constructor, Benito Juárez, 03940, Ciudad de México,
Tel. (52) 55 5696-6541 • móvil: (52) 55 4516 2170
info@comunicacion-cientifica.com • www.comunicacion-cientifica.com
comunicacioncientificapublicaciones @ComunidadCient2

ISBN 978-607-59473-1-0
DOI: 10.52501/cc.088

Esta obra fue dictaminada mediante el sistema de pares ciegos externos.
El proceso transparentado puede consultarse, así como el libro en acceso abierto, en **https://doi.org/10.52501/cc.088**

Índice

Sección 2
INVESTIGACIONES SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Presentación

Estimado lector, este libro ha sido posible gracias al esfuerzo de investigadores noveles y experimentados que participaron en el VIII Taller Internacional Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación (TEMBI 8) realizado en alianza con la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. Todos ellos presentaron sus resultados de investigación en una conferencia, una ponencia por solicitud o un taller. Después, respondieron al llamado de una convocatoria, enviando sus reportes, y atendieron las observaciones de un comité científico revisor conformado por especialistas en la educación matemática, quienes evaluaron los trabajos mediante un proceso de arbitraje doble ciego.

En los trabajos de investigación que conforman este libro se identifican dos tendencias principales. La primera, relacionada con el análisis de propuestas didácticas o modelos de enseñanza, los cuales buscan contribuir a la mejora del aprendizaje de las matemáticas y, la segunda, que aborda el estudio del profesor de matemáticas en su reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas, las emociones que puede experimentar y sus posibles repercusiones.

Dentro de la primera tendencia se encuentran las investigaciones de la sección 1 de este libro, la cual está compuesta por cuatro capítulos. En el capítulo 1 el autor presenta una investigación cualitativa documental para evaluar la promoción de elementos de aprendizaje de cultura estadística y propone indicadores para caracterizar el uso que se le da a los proyectos estadísticos en la enseñanza. Sus resultados surgen del análisis de algunos proyectos propuestos para la enseñanza de la estadística. En el capítulo 2 las autoras y el autor presentan actividades provocadoras de modelos o sistemas conceptuales como una alternativa para potenciar el aprendizaje de las matemáticas. En el capítulo 3 la alternativa de enseñanza que proponen los autores es una que destaca el proceso inquisitivo que el profesor puede promover para la resolución de problemas. En el capítulo 4 las autoras reflexionan sobre las producciones de un grupo de docentes cuando éstos resolvieron actividades de modelación que fueron diseñadas con la intención de promover el desarrollo del pensamiento covariacional.

La segunda tendencia, en la sección 2, se relaciona con la línea de investigación del desarrollo profesional del profesor de matemáticas desde dos perspectivas muy actuales: los procesos de argumentación que exhiben los profesores al reflexionar sobre diversos aspectos de la enseñanza de algunos tópicos de matemáticas y el estudio de las emociones. Con respecto al primer tópico se presentan dos capítulos. En el capítulo 5 las autoras y el autor analizan las reflexiones realizadas entre estudiantes para profesor de matemáticas con el fin de identificar patrones conversacionales asociados al funcionamiento de la interacción conversacional y el desarrollo de conocimiento, cuando los profesores plantean y resuelven tareas matemáticas del tema de potencia. En el capítulo 6 las autoras presentan un estudio de caso en el que dos profesores de matemáticas de secundaria construyen argumentos en el contexto de la generalización de patrones cuadráticos. Esta investigación es una propuesta teórica-metodológica que se basa en el modelo argumentativo de Toulmin, junto con algunas definiciones de Pierce, para caracterizar el razonamiento abductivo de los profesores. Finalmente, con respecto al segundo aspecto tratado en esta sección, el de las emociones, se presenta el capítulo 7, en el que las autoras presentan una investigación de cinco habilidades del conocimiento emocional, conceptualizadas en la teoría de la estructura cognitiva de las emociones. Mediante un estudio de caso con 20 profesores de secundaria y bachillerato, que cursaron un taller sobre *coaching* emocional en matemáticas, las autoras identifican las emociones que experimentan los profesores y analizan cómo ellos son conscientes de las posibles situaciones que se pueden desencadenar.

Esperamos que los resultados de la investigación que se presentan aquí, desde una amplia variedad de perspectivas teóricas y metodológicas, impacten en el aprendizaje de las matemáticas a través de usted, estimado lector.

El taller internacional TEMBI es organizado anualmente por el Posgrado en Educación Matemática y el Cuerpo Académico de Aprendizaje y Enseñanza de las Ciencias Exactas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Puebla de Zaragoza, noviembre de 2022
Lidia Aurora Hernández Rebollar
y Estela Juárez-Ruiz
(editoras)

Sección 1

INVESTIGACIONES SOBRE PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

1. Indicadores para analizar el aprendizaje de cultura estadística: el caso de proyectos estadísticos

Alberto Santana Ortega[1]

Resumen

En educación estadística los proyectos son reconocidos como una metodología de trabajo para ayudar a los estudiantes a experimentar diferentes etapas de una investigación estadística y mejorar el aprendizaje, y también como una herramienta de evaluación. Aunque un criterio del aprendizaje basado en proyectos es la *centralidad,* es decir, el proyecto debe ser la estrategia central de la enseñanza de contenidos curriculares, en educación estadística suele ser más común utilizar proyectos como herramienta de evaluación que como estrategia central para el aprendizaje. Además, uno de los objetivos del aprendizaje de la estadística es que los estudiantes desarrollen elementos de *cultura estadística* descritos por diferentes investigadores. En este artículo se presenta una investigación cualitativa documental que propone una serie de indicadores para evaluar la promoción de elementos de aprendizaje de cultura estadística propuestos por Gal y los aplica a cinco trabajos de investigación basados en proyectos estadísticos que cubrieron el criterio de centralidad y a cinco que no lo cubrieron. Con carácter exploratorio se indican algunas diferencias encontradas en los documentos analizados entre estas dos formas de uso de los proyectos respecto de los elementos de aprendizaje que se promueven.

Palabras clave: *cultura estadística, proyectos estadísticos, aprendizaje de estadística.*

[1] Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, y profesor investigador en la Escuela Normal Rural "Carmen Serdán". ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9200-3791

Introducción

Los proyectos estadísticos son reconocidos como una herramienta importante para evaluar aspectos del aprendizaje de los estudiantes y ayudarlos a experimentar diferentes etapas en el planteamiento y la solución de un problema estadístico (DelMas *et al.*, 2007; Franklin *et al.*, 2007; Garfield y Ben-Zvi, 2008; American Statistical Association [ASA], 2016); una estrategia de enseñanza para el aprendizaje de estadística (Batanero y Díaz, 2005; Ojeda, 2011) y un medio ideal para proporcionar experiencias de aprendizaje y reflexionar sobre la investigación estadística (MacGillivray y Pereira-Mendoza, 2011; Makar y Fielding-Wells, 2011).

Es más común enseñar estadística por medio de otras estrategias y usar un proyecto estadístico sólo para evaluar un porcentaje o la totalidad del curso que implementar proyectos estadísticos como el único recurso de enseñanza. Como herramienta de evaluación, los proyectos estadísticos son implementados como un trabajo o ejercicio final del curso para que los estudiantes practiquen o apliquen los contenidos aprendidos en clase. Algunas investigaciones reportan el uso de rúbricas para determinar las características y los criterios que serán evaluados con el proyecto estadístico (Zeleke *et al.*, 2006; Bulmer, 2010; Sovak, 2010; Walsh, 2011; Baglin *et al.*, 2013; Bailey *et al.*, 2013; Figueroa *et al.*, 2014; Koparan y Güven, 2014). En este sentido, Figueroa *et al.* (2014), establecen que "el uso de una rúbrica para evaluar proyectos establece acuerdos entre profesores y estudiantes donde se explicitan los criterios analizados y el estudiante advierte qué debe hacer para que su trabajo sea de calidad y puede reconocer cuándo no lo es y entonces mejorarlo" (p. 548).

Por lo general, los criterios que se evalúan están relacionados con competencias estadísticas implicadas en cada una de las fases en que se desarrolla el proyecto estadístico (e.g., definición del problema o pregunta de investigación, diseño o planificación del proyecto, organización de la información, análisis y conclusiones) y con competencias que se espera en el reporte escrito o en presentaciones orales del proyecto (e.g., propósitos, objetivos, método y discusión).

Bulmer (2010) y Halvorsen (2010) señalan que el proceso de evaluación de los proyectos puede considerar la coevaluación entre los estudiantes y la heteroevaluación que hace el profesor hacia el trabajo de sus alumnos. Por lo tanto, los profesores que utilicen la coevaluación deben trabajar fuertemente con sus alumnos en los principios éticos implicados para la evaluación; incluso se puede considerar la opción de incluir la autoevaluación de los estudiantes para valorar sus propios proyectos.

Antecedentes

Diversas investigaciones reportan ventajas de la implementación de proyectos en el aula, ya sea implementados como una herramienta de evaluación o como una estrategia única de enseñanza. Por medio de los proyectos, el profesor puede atraer la atención de los estudiantes y lograr un alto nivel de motivación (Jolliffe, 2002; Bilgin *et al.,* 2015); puede llevar la estadística fuera del salón de clases para contextualizar su aplicación y evidenciar su utilidad (Verhoeven, 2013). Los estudiantes pueden aprender colaborativamente (MacGillivray y Pereira-Mendoza, 2011; Walsh, 2011), usar la tecnología (Baglin *et al.,* 2013; Spence y Bailey, 2015); desarrollar su curiosidad y su conocimiento en estadística (Dierker *et al.,* 2016), así como sus habilidades comunicativas, tanto de forma oral como escrita (Batanero *et al.,* 2010; Halvorsen, 2010), y construir su propio conocimiento (Ramírez-Faghih, 2012), pues el docente puede delegar responsabilidades a sus alumnos (Bailey *et al.,* 2013).

Las investigaciones sobre proyectos estadísticos tienden a reportar en mayor medida resultados relacionados con aspectos motivacionales (e.g., experiencias vividas o perspectivas por parte de los profesores y los estudiantes al trabajar con proyectos estadísticos) y pedagógicos (e.g., ventajas y desafíos al trabajar con proyectos estadísticos) y, en menor medida, resultados del logro del aprendizaje de contenido estadístico de los estudiantes. En este último caso, las investigaciones aplican métodos de investigación basados en diseños cuasi experimentales para probar la efectividad del trabajo con proyectos estadísticos en el aprendizaje de ciertos temas de estadística. Enseguida se resumen algunas de estas investigaciones.

Sovak (2010) midió, mediante una prueba previa y posterior, el aprendizaje de estudiantes universitarios, antes y después de desarrollar un proyecto estadístico. Específicamente, Sovak reporta un logro en la habilidad de razonamiento de los estudiantes para: *1)* identificar visualizaciones y estadísticas descriptivas apropiadas para ciertas variables, *2)* clasificar variables como categóricas o cuantitativas y determinar la variable explicativa y la de respuesta, y *3)* seleccionar la prueba estadística más apropiada según las variables dadas y las hipótesis involucradas.

Spence y Sinn (2009) reportan la aplicación de una prueba de conocimiento de contenido estadístico, entre otros, en los temas de: *1)* regresión lineal, *2)* diseño y uso de pruebas *t* y *3)* inferencia estadística en el contexto de pruebas *t*. De acuerdo con los resultados *a priori,* los autores encontraron una diferencia significativa en la comprensión del contenido de los temas mencionados entre los estudiantes que trabajaron con proyectos —grupo experimental— y los que no —grupo control—. Los resultados finales mostraron ligeros avances en el grupo experimental, aunque éstos no fueron estadísticamente significativos (Spence *et al.,* 2011)

Calle (2013), mediante el análisis de la aplicación de un examen posprueba, reporta una mejora en la comprensión de temas de estadística inferencial sobre pruebas de hipótesis por parte de estudiantes universitarios que trabajaron con el uso de proyectos estadísticos en relación con los que no lo hicieron —grupo control—. En este mismo tema, estadística inferencial, Villazcán (2014) comparó la efectividad de una enseñanza basada en el "aprendizaje orientado a proyectos" en contraste con el método "expositivo-lección magistral". A diferencia de Calle, el grupo de estudiantes era de futuros profesores de educación preescolar. Villazcán también señala que el grupo de estudiantes que trabajaron con el modelo de "aprendizaje orientado a proyectos" tuvieron mejores resultados en cuanto a la comprensión de conceptos de inferencia estadística.

En el caso particular del estudio de Koparan y Güven (2014) se reporta que el aprendizaje basado en proyectos favoreció un incremento en los niveles de cultura estadística de estudiantes de octavo grado —educación media o secundaria—. Los autores, con base principalmente en la propuesta de Watson y Callingham (2003), diseñaron una prueba de 69 ítems para medir los niveles de cultura estadística, específicamente en temas sobre muestreo, representación de datos, promedio, probabilidad, inferencia y cambio.

Si bien el trabajo con proyectos ofrece importantes ventajas tanto para la enseñanza como para el aprendizaje de estadística, es necesario considerar otros asuntos que hay que tener en cuenta para emprender dicho trabajo y que pudieran interpretarse como algunos desafíos. Por mencionar algunos, se tienen asuntos relacionados con la gran cantidad de tiempo que se requiere para poder implementar un proyecto estadístico (Starkins, 1997; Wardrop, 1999; Jolliffe, 2002; Martonosi y Williams, 2016; Bakogianni, 2015; Rivera, 2015). Una débil formación docente en temas de estadística o en didáctica de la estadística puede limitar el logro de resultados adecuados en los proyectos, pues se requiere que el profesor oriente, asesore y acompañe a los estudiantes a lo largo del proceso (Hovermill, 2003; Makar, 2004; Porciúncula y Samá, 2014); además, Godino *et al.* (2013, p. 179) establecen que el profesor debe "reconocer las configuraciones de objetos y procesos estadísticos que se ponen en juego en la resolución de los proyectos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos)". La gran carga de trabajo que significa para el profesor tener que planificar las actividades y diseñar un marco de evaluación para los proyectos estadísticos puede ser también un factor que obstaculice su implementación en las aulas (Bulmer, 2010; Bailey y Spence, 2013; Porciúncula y Samá, 2014). Los estudiantes pueden enfrentarse con dificultades relacionadas con la falta de coordinación y organización del trabajo en equipo (Holmes, 1997; Spence y Sinn, 2009; Halvorsen, 2010; Verhoeven, 2013; Porciúncula y Samá, 2014); es posible que algunos estudiantes tengan problemas al elegir el tema de estudio (Porciúncula y Samá, 2014), sobre todo cuando no han sido informados de las opciones que existen (Wardrop, 1999). La recolección de datos puede resultar muy tediosa y difícil para los alumnos (Halvorsen, 2010), así como puede evidenciar la complejidad de los temas estadísticos que se aborden en los proyectos (Carnell, 2008; Porciúncula y Samá, 2014).

La presente investigación intenta contribuir a la investigación sobre el trabajo con proyectos estadísticos para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de la estadística. Para ello, el artículo tiene un doble objetivo: *1)* identificar en qué medida los proyectos estadísticos favorecen el desarrollo de elementos de aprendizaje de *cultura estadística* y *2)* explorar si el modo en que el proyecto es implementado (criterio de *centralidad*) influye en ese desarrollo.

Para el primer objetivo se consideraron como elementos de aprendizaje aquellos relacionados con el objetivo de aprendizaje que investigadores en el campo de la educación estadística sugieren para la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina: *cultura estadística* (Gal, 2002, 2004. De hecho, algunas investigaciones sugieren el uso de proyectos estadísticos para fomentar el desarrollo de elementos de una *cultura estadística* (Conti y Carvalho, 2014; Koparan y Güven (2014). Consideramos que el aprendizaje que demandan los proyectos estadísticos puede analizarse desde una visión más global, que comprenda elementos tanto de contenido como de disposiciones. Así, la propuesta de esta investigación es mostrar un conjunto de indicadores que den cuenta de ese aprendizaje.

Respecto del segundo objetivo, se tomó el término de *centralidad* que Thomas (2000) señala como parte de cinco criterios que un proyecto debiera cumplir para ser considerado un verdadero aprendizaje basado en proyectos (PBL, por sus siglas en inglés). El criterio de centralidad implica el modo en que el proyecto debe ser implementado en el aula. Por un lado, los proyectos deben ser usados como el único medio de enseñanza, de manera que el aprendizaje sea producto del trabajo con el proyecto y no de otros medios; por otro lado, especifica que los temas aprendidos deben estar asociados con los contenidos curriculares del curso. Es decir, con el aprendizaje de los temas del curso en el que el proyecto se está realizando; en este caso, temas de estadística. El criterio de centralidad implica que si un proyecto es usado como un ejercicio, un trabajo final de clase o un instrumento de evaluación con el fin de que los estudiantes muestren o reproduzcan lo que aprendieron por otro medio, según Thomas no se considera un verdadero PBL.

Indicadores de cultura estadística

Las ideas teóricas de cultura estadística, también conocidas como enfoques u objetivos de aprendizaje deseados para los estudiantes inmersos en la instrucción estadística (delMas, 2002; Ben-Zvi y Garfield, 2004; Garfield y Ben-Zvi, 2008; Garfield, 2011; Ziegler, 2014), ofrecen un conjunto de elementos para distinguir el aprendizaje que el trabajo con proyectos estadísticos puede favorecer. Basados en las ideas teóricas de este enfoque se construyó un marco de indicadores para cada uno de ellos según los principales elementos que los definen.

Cultura estadística

Una cultura estadística se caracteriza por enfocar el aprendizaje de esta disciplina en la adquisición de habilidades básicas que son usadas para entender información estadística que se presenta en distintos medios de comunicación (e.g., periódicos, revistas, programas de televisión, páginas web, redes sociales, etc.). Se trata de habilidades deseables en cualquier ciudadano para interpretar, evaluar críticamente y comunicar acerca de información estadística y sus mensajes (Wallman, 1993; Gal, 2002). De acuerdo con Garfield *et al.* (2010), estas habilidades son necesarias para comprender y utilizar el lenguaje básico y las herramientas de la estadística: saber qué significan los términos estadísticos básicos, comprender el uso de símbolos estadísticos simples, reconocer y poder interpretar diferentes representaciones de datos.

El diseño de indicadores sobre cultura estadística se basó, principalmente, en las ideas de Gal (2002, 2004) quien propone un conjunto de cinco elementos de conocimiento y dos de disposición para entender qué es una cultura estadística (véase cuadro 1). Los elementos de conocimiento son *habilidades de alfabetización estadística, conocimiento estadístico, conocimiento matemático, conocimiento del contexto y preguntas críticas*; los elementos de disposición son *creencias y actitudes* y *postura crítica*.

Precisiones sobre el diseño de los indicadores

Los indicadores fueron construidos con base en un proceso de revisión de literatura y triangulación de información. Además de las fuentes principales antes mencionadas también se consultaron otras (e.g., ASA, 2016; Callingham, 2007; Chance, 2002; delMas, 2002, 2004; Franklin *et al.,* 2005; Garfield, 1999; Pfannkuch y Wild, 2000; Rumsey, 2002; Snell, 1999; Tau-

Cuadro 1. *Indicadores de cultura estadística*

1.1 Habilidades de alfabetización estadística
1.1.1 Darle sentido a una amplia gama de información y representaciones estadísticas presentadas en diferentes medios de comunicación. **1.1.1a** Se promueve la comprensión de símbolos estadísticos (e.g., porcentajes, índices) presentados en diferentes medios de comunicación. **1.1.1b** Se promueve la comprensión de herramientas estadísticas (e.g, tablas, gráficas, medidas de tendencia central, medidas de dispersión) presentadas en diferentes medios de comunicación. **1.1.1c** Se promueve la comprensión de lenguaje estadístico básico (e.g., parámetro, sesgo) presentado en diferentes medios de comunicación. **1.1.1d** Se reconoce que una misma información estadística está presente en diferentes registros de representación en diferentes medios de comunicación. **1.1.2** Uso de la información proporcionada en listas, tablas, índices, catálogos y representaciones gráficas. **1.1.2a** Se promueve el uso de información estadística presentada en distintas representaciones (e.g., listas, tablas, catálogos, gráficas) proporcionadas por instituciones variadas. **1.1.3** Describir gráficos, distribuciones y relaciones. **1.1.3a** Se promueve describir y analizar gráficos o distribuciones estadísticas. **1.1.4** Reformular, traducir o interpretar los hallazgos de un procedimiento estadístico. **1.1.4a** Se promueve la traducción o interpretación de los resultados de un procedimiento estadístico. **1.1.5** Organización de datos, construcción y presentación de tablas y diferentes representaciones de los datos. **1.1.5a** Se promueven procedimientos de organización de datos y construcción de diferentes representaciones de datos. **1.1.6** Comprensión de la probabilidad como medida de incertidumbre. **1.1.6a** Se promueve la interpretación de la probabilidad como medida de incertidumbre.
1.2 Conocimiento estadístico base
1.2.1 Conocer por qué se requieren los datos y cómo se pueden producir.
1.2.1a Se propician estrategias para que los estudiantes reflexionen sobre la importancia de obtener datos.
1.2.1b Se promueve la identificación del origen de los datos cuando no son recolectados por los estudiantes.
1.2.1c Se promueve la indagación del modo de operar que hay detrás del diseño de las investigaciones publicadas en los medios de comunicación.
1.2.1d Se promueve conocer las características de las encuestas por muestreo aleatorio.
1.2.1e Se promueven actividades que permitan preguntar por qué y cómo los datos fueron producidos.
1.2.2 Conocer términos básicos e ideas relativas a la estadística descriptiva.

1.2.2a Se promueve la comprensión básica de conceptos, vocabulario estadístico (e.g., dato, variable, muestra, población, tablas, gráficas, medidas de centro y medidas de dispersión).
1.2.2b Se promueve la exploración de las características de las medidas de tendencia central según los datos (e.g., la manera en que las medidas de tendencia central se ven afectadas por los valores extremos).
1.2.3 Conocer representaciones gráficas y tabulares y su interpretación.
1.2.3a Se promueve la idea de que las tablas o gráficas sirven para detectar o comparar tendencia en los datos.
1.2.3b Se promueve la "lectura entre los datos" presentados en gráficas y tablas.
1.2.3c Se promueve la "lectura más allá de los datos" en gráficas y tablas.
1.2.3d Se promueve el conocimiento de que variar el tipo de tabla y de gráfica posiblemente puede conducir a diferentes puntos de vista contradictorios del fenómeno bajo investigación.
1.2.4 Entender nociones básicas de probabilidad.
1.2.4a Se promueve la representación de la probabilidad de diferentes maneras: como porcentajes, probabilidad, razones o lenguaje verbal.
1.2.4b Se promueve la formulación de los tres enfoques de probabilidad: probabilidad frecuentista, probabilidad teórica y probabilidad subjetiva.
1.2.4c Se promueve la idea de que la variabilidad fortuita está presente en los fenómenos aleatorios.
1.2.5 Conocer cómo llegar a conclusiones o inferencias estadísticas.
1.2.5a Se promueve el cuestionamiento de cómo se llegó a las conclusiones de un estudio.
1.2.5b Se promueve la idea de reconocer la posibilidad de diferentes errores o sesgos en el muestreo, en la medición o en una inferencia.
1.2.5c Se promueve pensar en que los errores en el muestreo pueden controlarse mediante un diseño adecuado del estudio.
1.2.5d Se promueve el entendimiento del proceso de muestreo aleatorio.
1.3 Conocimiento matemático
1.3.1 Dar importancia a la necesidad de explicar y describir la variabilidad.
1.3.1a Se promueve la idea de que la variación está presente en cualquier contexto.
1.3.1b Se promueve la necesidad de explicar y describir la variabilidad de los datos.
1.3.2 Entendimiento intuitivo de las ideas claves y conceptos en estadística que a menudo no tienen representación matemática y que son únicos en la disciplina de la estadística.
1.3.2a Se promueve el entendimiento intuitivo de conceptos estadísticos básicos que a menudo no tienen representación matemática (e.g., muestra, encuesta).
1.3.3 Resumir un gran número de observaciones por una cantidad concisa, como un porcentaje, una media o una probabilidad.

1.3.3a Se promueve el uso de porcentajes, medidas de centro y de probabilidad como resúmenes de un gran número de observaciones.
1.3.4 Habilidades numéricas (e.g., cálculo mental, operaciones básicas) para contar con una buena interpretación de los números presentados en reportes estadísticos.
1.3.4a Se promueve el desarrollo de habilidades numéricas para interpretar correctamente los resultados que se dan en estudios estadísticos.
1.3.5 Se motiva la familiaridad intuitiva y en ocasiones formal sobre procedimientos de cálculo matemáticos que se utilizan para generar estadísticas.
1.3.5a Se motiva la intuición para comprender procedimientos de cálculo que se utilizan para generar estadísticas (e.g., cálculo de las medidas de centro y de dispersión).
1.3.5b Se promueve el cálculo también para apreciar el significado de los estadísticos.
1.3.5c Se fomenta la comprensión de las matemáticas involucradas en la generación de algunos indicadores estadísticos.
1.3.6 Comprender de manera informal la conexión que hay entre los estadísticos de resumen, gráficas o tablas y los datos en los que están basados.
1.3.6a Se fomenta de manera informal comprender la conexión que hay entre los estadísticos de resumen, gráficas o tablas y los datos en los que están basados.
1.4 Conocimiento del contexto
1.4.1 Comprensión del contexto para que los mensajes estadísticos "den sentido", pues el contexto motiva los procedimientos. **1.4.1a** Se promueve poner los mensajes estadísticos en contexto. **1.4.1b** Se promueve la comprensión del contexto de los mensajes estadísticos. **1.4.1c** Se promueve la comprensión de que el contexto conduce a los procedimientos estadísticos a utilizar. **1.4.1d** Se promueve la idea de que la comprensión del contexto ayuda a entender las posibles fuentes de variación y error de mensajes estadísticos. **1.4.1e** Se promueve comprender que el sentido de un mensaje estadístico depende de la información que se pueda obtener sobre los antecedentes del estudio o los datos que se discuten. **1.4.2** Apreciación del contexto social en el que se establecen los datos. **1.4.2a** Se promueve la identificación del contexto social del que se obtienen los datos de un mensaje estadístico. **1.4.3** Uso e interpretación de la estadística en la vida diaria. **1.4.3a** Se promueve el uso e interpretación de la estadística en la vida diaria.
1.5 Preguntas críticas
1.5.1 Comprender que los mensajes presentados en diferentes medios pueden provenir de diversas fuentes que reportan hallazgos poco objetivos.
1.5.1a Se promueve la reflexión de la idea de que algunos reportes publicados en distintos medios pueden manipular los datos para influenciar las opiniones de sus escuchas o lectores en una dirección específica.

1.5.2 Cuestionar la credibilidad de la evidencia presentada en los mensajes estadísticos.
1.5.2a Se promueve la validación de los mensajes estadísticos.
1.5.2b Se promueve la reflexión sobre las interpretaciones de las conclusiones que se transmiten en mensajes estadísticos.
1.5.2c Se promueve la evaluación de las afirmaciones presentadas en los mensajes estadísticos.
1.5.2d Se motiva a cuestionar si los gráficos que se presentan en reportes estadísticos están dibujados apropiadamente o están distorsionados para mostrar alguna tendencia.
1.5.2e Se promueve la idea de que puede haber observaciones atípicas en los datos que propician una falsa interpretación de resultados estadísticos.
1.5.3 Cuestionarse sobre la muestra.
1.5.3a Se motiva a cuestionar si en un mensaje, estudio o resumen estadístico se usó una muestra.
1.5.3b Se promueve cuestionar cuánta gente participó en un mensaje, estudio o resumen estadístico, con el fin de reflexionar sobre el tamaño y la representatividad de la muestra.
1.5.3c Se fomenta el cuestionamiento de la muestra para conocer si en un mensaje, estudio o resumen estadístico, ésta conduce a inferencias válidas sobre la población objetivo.
1.5.4 Cuestionamiento sobre la confiabilidad de los instrumentos utilizados.
1.5.4a Se promueve valorar la confiabilidad de los instrumentos usados para generar mensajes estadísticos.
1.5.5 Apoyar el proceso de evaluación crítica y conducir a la creación de interpretaciones y juicios más informados.
1.5.5a Se promueve la evaluación crítica de mensajes estadísticos para conducir a la creación de interpretaciones y juicios más informados.
1.5.6 Realizar inferencias basadas en su propio conocimiento del mundo real.
1.5.6a Se promueve la elaboración de inferencias basadas en el conocimiento del alumno del mundo real para interpretar mensajes estadísticos.
1.6 Disposiciones (creencias, actitudes y postura crítica)
1.6.1 Desarrollar un juicio crítico para cuestionar mensajes estadísticos que puedan ser engañosos, sesgados o incompletos.
1.6.1a Se promueve el desarrollo de un juicio crítico para cuestionar mensajes estadísticos que pudieran ser engañosos.
1.6.1b Se promueve el desarrollo de un juicio crítico para cuestionar mensajes estadísticos que pudieran estar incompletos.
1.6.1c Se promueve el desarrollo de un juicio crítico para cuestionar mensajes estadísticos que pudieran estar sesgados.
1.6.2 Sentirse seguros para explorar, conjeturar y sentirse cómodos con la confusión temporal o con un estado de incertidumbre.

1.6.2a Se promueve un ambiente adecuado para que los estudiantes exploren, hagan conjeturas y no se sientan frustrados ante el desconocimiento de algo.
1.6.3 Considerar aspectos motivacionales.
1.6.3a Se promueve la utilidad y la importancia de la estadística usando el contexto de los estudiantes.
1.6.3b Se promueve la utilidad y la importancia de la estadística a través de la solución de problemas que son de interés para el estudiante.
1.6.4 Desarrollar una postura crítica propia y su voluntad.
1.6.4a Se motiva a los estudiantes a desarrollar una creencia de legitimidad en sus propios juicios críticos.
1.6.4b Se promueve que el estudiante desarrolle su propia postura o juicio crítico.
1.6.4c Se pide evaluar críticamente información estadística.
1.6.4d Se pide discutir y comunicar las reacciones a cierta información estadística.
1.6.4e Se pide dar significado a los datos.
1.6.4f Se piden opiniones respecto de la aceptabilidad de las conclusiones.

ber, 2010; Wallman, 1993; Watson, 2006). Además, una vez que se tuvo el total de indicadores, se revisó cada conjunto de indicadores para seleccionar aquellos que se consideraban más representativos del enfoque. De esta manera, los indicadores expuestos en el cuadro 1 se validaron según la teoría y el juicio del autor y miden la promoción del aprendizaje de elementos de conocimiento de contenidos y de disposiciones estadísticas para cultura estadística. La decisión de determinar un indicador como representativo del enfoque no fue fácil, por lo que los indicadores finales pueden ser cuestionados y perfectibles.

Uso de los indicadores

Los indicadores fueron diseñados para analizar la promoción del aprendizaje de elementos de cultura estadística, en particular para observar los elementos de cultura estadística que se promueven durante la enseñanza con proyectos estadísticos en la formación de profesores de telesecundaria (Santana, 2020). En el presente artículo se expone un uso más de estos indicadores: identificar en qué medida los proyectos estadísticos favorecen el desarrollo de elementos de aprendizaje de cultura estadística, primer objetivo del artículo.

Metodología

El método de esta investigación está basado en la técnica de investigación documental. En este caso, los documentos fueron artículos de investigación que reportan el trabajo con proyectos estadísticos. Se consultaron diversas fuentes de información (véase cuadro 4) publicadas entre 1994 y 2019 —hasta principios de diciembre—, escritas en español y en inglés. Las palabras claves usadas para la búsqueda incluyeron: *statistical projects, project method* y *project-based learning* —y su equivalente en español—; también se hizo una búsqueda de referencias incluidas en los artículos encontrados. La búsqueda de literatura se centró en estudios relacionados específicamente con "proyectos estadísticos"; se descartaron los que hacían referencia a "investigaciones estadísticas", esto con el fin de limitar este estudio. Además, se estableció que serían incluidas aquellas publicaciones que mostraran evidencia necesaria para analizar el criterio de centralidad, segundo objetivo de este artículo. Este criterio fue el que determinó la selección de los artículos revisados (véase cuadro 2). Como parte de esta selección, también se tomó en cuenta que los artículos mostraran información suficiente sobre el desarrollo del proyecto estadístico con el fin de poder identificar los elementos de aprendizaje relacionados de cultura estadística que se promovieron.

De acuerdo con la revisión mencionada, se encontró un total de 79 publicaciones, de las cuales 74 no cumplieron con el criterio de centralidad, mientras que cinco sí lo hicieron.

Para el análisis que se presenta en este artículo se eligieron 10 artículos: los cinco que cubrieron y los cinco que no cubrieron el criterio de centralidad (véase cuadro 3). La elección de los cinco artículos cuyos proyectos estadísticos reportados no cubrieron el criterio de centralidad se basó en seleccionar los artículos que mayor detalle proporcionaran de la implementación del proyecto estadístico.

CUADRO 2. *Resumen de las publicaciones encontradas*

Tipo de publicación	***Publicaciones***	***Con centralidad***	***Sin centralidad***
Revistas	27	4	23
Memorias de congreso	42	1	41
Capítulos de libro	2	0	2
Tesis de doctorado	3	0	3
Tesis de maestría	3	0	3
Manuales especializados	2	0	2
Total	79	5	74

CUADRO 3. *Criterios de las publicaciones seleccionadas*

Autores	***Con centralidad***	***Autores***	***Sin centralidad***
Leavy (2006)	El proyecto se desarrolló en un semestre de 15 semanas y fue el único medio de enseñanza. Participantes: 23 personas (de 22 a 55 años) inscritas en una maestría de certificación de enseñanza elemental.	Smith (1998)	El trabajo con proyectos estadísticos se intercaló con las clases. De hecho, los temas del proyecto son acordes a los contenidos cubiertos en el curso. Además, se declara que se espera que los proyectos sean un medio para poner en práctica el contenido. Participantes: estudiantes de un curso introductorio de estadística.
Biajone (2006)	Se declara que el curso se desarrolló en la forma de un proyecto estadístico y que los temas fueron enseñados a través del proyecto. Participantes: estudiantes de pedagogía.	Biehler (2005)	Previo al trabajo con proyectos, los estudiantes realizaron tareas de pequeños análisis de datos; en las sesiones de clase y de laboratorio se incluyeron ejemplos más largos de análisis de datos. Lo anterior supone que se quería que los estudiantes aplicaran en el proyecto lo aprendido.

			Participantes: estudiantes para profesor de matemáticas.
Bailey *et al.* (2013)	Se declara que los proyectos implementados fueron el principal vehículo a través del cual enseñar los temas enseñados. Participantes: estudiantes de licenciatura que no son especialistas en matemáticas o estadística.	Grant (2016)	Se declara que el objetivo del proyecto es que los estudiantes usen lo que han aprendido en el curso. Participantes: estudiantes de licenciatura.
Nascimento *et al.* (2014)	Se declara la introducción del trabajo con proyectos en todo un curso de probabilidad y estadística. Participantes: 61 estudiantes de ingeniería.	Inzunza (2017)	El proyecto se desarrolló durante todo el curso, pero de modo paralelo el profesor daba clase normal, mientras los estudiantes presentaban avances de su proyecto. Participantes: 19 estudiantes de la carrera de políticas públicas dentro del curso de probabilidad y estadística.
Conti y Carvalho (2014)	El proyecto se desarrolló durante un semestre y fue el único medio de enseñanza. Participantes: estudiantes de séptimo grado (de 16 a 43 años) en el contexto de un programa de educación para jóvenes y adultos.	Rivas *et al.* (2019)	El desarrollo del proyecto implicaba integrar conocimientos previos, como el uso de la hoja de cálculo. Además, se declaran momentos de instrucción basados en la "transmisión de conocimientos". Participantes: estudiantes para profesor de educación primaria.

Análisis de datos

El análisis de los proyectos estadísticos reportados en las 10 publicaciones consistió en un análisis de texto. Tomando como códigos la numeración de cada uno de los indicadores de cultura estadística, se codificaron dentro del texto de la publicación todas aquellas referencias que correspondían a uno o más indicadores. Es necesario destacar que los indicadores se diseñaron de manera que, en la medida de lo posible y fueran lo más representativos de algún indicador de aprendizaje de cultura estadística. Por ejemplo, el siguiente texto, tomado del artículo de Leavy (2006), muestra la forma como una referencia podía codificarse: "Each group was then responsible, over the course of the semester, for constructing a hypothesis regarding the optimal condition for bean growth and determining what statistical measures or approaches they might utilize to test the hypothesis" (p. 94). Este párrafo fue codificado con los indicadores 1.6.2a (se promueve un ambiente adecuado para que los estudiantes exploren, hagan conjeturas y no se sientan frustrados ante el desconocimiento de algo). Es necesario aclarar la importancia de tener el panorama completo del trabajo con el proyecto estadístico para darle sentido al párrafo y entender por qué se identificó con esos dos indicadores. Además, un mismo indicador se podía repetir según las veces en que éste era identificado en la misma publicación. Los datos resultantes representan un conjunto de narrativas de texto codificadas con los indicadores mencionados. Así, el análisis de los datos está basado en técnicas de estadística descriptiva y es de tipo cualitativo.

Resultados

Los 10 artículos analizados presentaron evidencia de promover al menos uno de los indicadores de cultura estadística que fueron diseñados. En el cuadro 4 se observan las frecuencias de los indicadores identificados.

CUADRO 4. *Frecuencia de indicadores de cultura estadística identificadas en los diez artículos analizados*

Proyectos estadísticos	***Cultura estadística***
Leavy (2006)	40
Biajone (2006)	18
Bailey *et al.* (2013)	30
Nascimento *et al.* (2014)	48
Conti y Carvalho (2014)	106
Smith (1998)	27
Biehler (2005)	26
Grant (2016)	27
Inzunza (2017)	41
Rivas *et al.* (2019)	17
Total	380

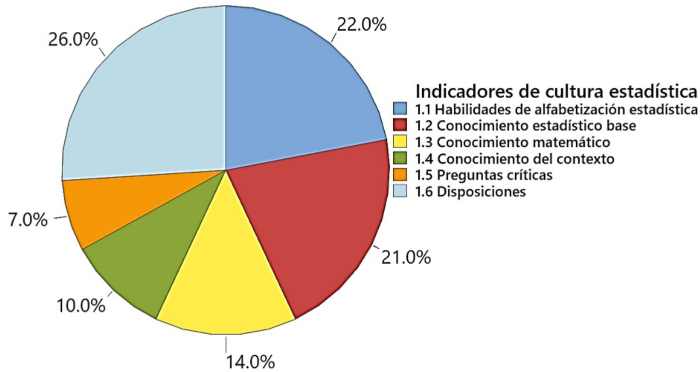
Indicadores de cultura estadística que se promueven en los proyectos estadísticos

En los artículos revisados, los indicadores de los elementos de disposiciones, habilidades de alfabetización estadística y conocimiento estadístico base aparecieron con mayor frecuencia; con menor frecuencia, los indicadores de conocimiento matemático, conocimiento del contexto y preguntas críticas (véase figura 1).

Por razones de espacio, en el cuadro 5 se muestran los indicadores con mayor frecuencia (f 10) y que se identificaron al menos en cinco de las 10 publicaciones (N) analizadas.

Los proyectos estadísticos revisados parecen promover la utilidad y la importancia de la estadística usando el contexto de los estudiantes (1.6.3a), lo cual es coherente con motivar el uso y la interpretación de la estadística en la vida diaria (1.4.3a). También involucran la traducción de resultados de un procedimiento estadístico (1.1.4a) y la exploración de las características de las medidas de centro según los datos (1.2.2b). Estos indicadores ejemplifican la promoción de los elementos de disposición, de habilidades de alfabetización estadística, de conocimiento del contexto y de conoci-

Figura 1. *Porcentaje de indicadores de los elementos de cultura estadística*



Fuente: elaboración propia.

Cuadro 5. *Indicadores de cultura estadística con mayor frecuencia*

Indicadores	*f*	*N*
1.6.3a Se promueve la utilidad y la importancia de la estadística usando el contexto de los estudiantes.	31	9
1.4.3a Se promueve el uso y la interpretación de la estadística en la vida diaria.	27	8
1.1.1b Se promueve la comprensión de herramientas estadísticas (e.g, tablas, gráficas, medidas de tendencia central, medidas de dispersión) presentadas en diferentes medios de comunicación.	23	5
1.1.3a Se promueve describir y analizar gráficos o distribuciones estadísticas.	23	6
1.2.2a Se promueve la comprensión básica de conceptos, vocabulario estadístico (e.g., dato, variable, muestra, población, tablas, gráficas, medidas de centro y medidas de dispersión).	23	6
1.6.3b Se promueve la utilidad y la importancia de la estadística a través de la solución de problemas que son de interés para el estudiante.	23	6
1.2.3a Se promueve la idea de que las tablas o gráficas sirven para detectar o comparar tendencia en los datos.	17	5
1.6.4d Se pide discutir y comunicar las reacciones a cierta información estadística.	17	7
1.1.4a Se promueve la traducción o interpretación de los resultados de un procedimiento estadístico.	15	9
1.6.4e Se pide dar significado a los datos.	12	6
1.2.2b Se promueve la exploración de las características de las medidas de tendencia central según los datos (e.g., la manera en que las medidas de tendencia central se ven afectadas por los valores extremos).	11	7
1.3.5c Se fomenta la comprensión de las matemáticas involucradas en la generación de algunos indicadores estadísticos.	10	5

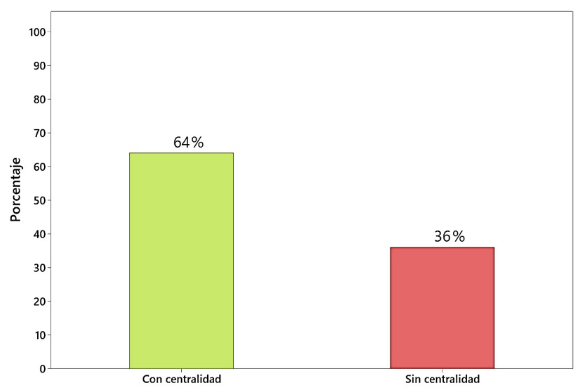
miento básico de estadística, todos ellos representantes de una cultura estadística. Destaca la escasa presencia de indicadores relacionados con el elemento de preguntas críticas.

El criterio de centralidad y la promoción de elementos de cultura

El segundo objetivo de este artículo tiene que ver con explorar si el hecho de implementar proyectos estadísticos como la única estrategia de enseñanza —centralidad— o como un medio de evaluación o trabajo para que los estudiantes apliquen los contenidos abordados en el curso, influye en la promoción de los elementos de aprendizaje de cultura estadística. Al respecto, en la gráfica comparan las frecuencias de los indicadores de cada enfoque entre los cinco artículos con centralidad y los cinco sin centralidad.

En general, hay una diferencia a favor de los proyectos estadísticos que son aplicados bajo el criterio de centralidad. Esta diferencia es notoria para la cultura estadística. Dado el enfoque del estudio y el tamaño de los artículos revisados no se pudo evaluar si esta diferencia es o no estadísticamente significativa.

Figura 2. *Diferencia entre la frecuencia de indicadores de cultura estadística presentes en los proyectos estadísticos con y sin centralidad*



Fuente: elaboración propia.

Existe un proyecto reportado por Conti y Carvalho (2014) mismo que se desarrolló ex profeso con el objetivo de promover elementos de una cultura estadística, por lo que no es de extrañar que haya sido el que presentó más indicadores (106) de este enfoque.

Conclusiones y consideraciones finales

En este artículo se ha propuesto un conjunto de indicadores que permiten identificar la promoción de elementos de objetivos de aprendizaje de la cultura estadística. Estos elementos son tanto de conocimiento de contenido como de disposiciones, lo que se considera una visión más global para apreciar el aprendizaje de estadística. Con el fin de mostrar uno de los usos de estos indicadores se estudió la promoción de esos elementos de aprendizaje en el desarrollo de proyectos estadísticos según dos modos de implementarlos en el aula: como una estrategia central para la enseñanza y el aprendizaje de estadística —con centralidad— y como un medio para aplicar o reproducir los contenidos enseñados en clase —sin centralidad—.

Los resultados muestran que los proyectos analizados promueven elementos de aprendizaje de una cultura estadística. Además, cuando se distingue el modo en que los proyectos estadísticos fueron implementados —con y sin centralidad— se observó un mayor número de indicadores de cultura estadística a favor de los proyectos con centralidad.

Si bien los proyectos estadísticos son una metodología o estrategia ampliamente reconocida por las ventajas que ofrece para el estudio de la estadística, la revisión de publicaciones sobre proyectos estadísticos nos mostró una falta de información más detallada sobre: *a)* el razonamiento de las grandes ideas estadísticas que se favorecen durante el desarrollo del proyecto, lo cual implica una mayor información sobre el grado de profundidad en que un tema o un contenido en particular puede ser abordado; *b)* los detalles que muestren el modo en que se implementó el proyecto, los cuales requieren explicitar aspectos implicados en los proyectos que se aplican como estrategia central de enseñanza; por ejemplo: cómo se integran los contenidos curriculares dentro del proyecto estadístico, cómo se organiza el curso alrededor del proyecto estadístico, cuál es el papel del profesor y cuál el del investigador y en qué consiste la evaluación y la retroalimentación.

Referencias

American Statistical Association (2016). *GAISE college report, revision committee. Guidelines for assessment and instruction in statistics education, college report 2016*. ASA, en http://www.amstat.org/education/gaise/collegeupdate/gaise2016_draft.pdf.

Baglin, J., Bedford, A., y Bulmer, M. (2013). Students' experiences and perceptions of using a virtual environment for project-based assessment in an online introductory statistics course. *Technology Innovations in Statistics Education*, *7*(2), 1-8, en http://iase-web.org/documents/papers/rt2012/IASE2012_Baglin_Bedford_Bulmer.pdf.

Bailey, B., Spence, D., y Sinn, R. (2013). Implementation of discovery projects in statistics. *Journal of Statistics Education*, *21*(3), 1-24.

Bakogianni, D. (2015). Studying the process of transforming a statistical inquiry-based task in the context of a teacher study group. En K. Krainer y N. Vondrová (eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 615-621). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME, en https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01287048/document.

Batanero, C., Arteaga, P., Ruiz, B. y Roa, R. (2010). Assessing pre-service teachers' conceptions of randomness through project work. En C. Reading (ed.), *Data and context in statistics education: towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July 2010), Ljubljana, Slovenia*. IASE, en https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots8/icots8_5a3_batanero.pdf.

Batanero, C., Arteaga, P., y Gea, M. (2011). El currículo de estadística: reflexiones desde una perspectiva internacional. *UNO*, *59*, 9-17.

Batanero, C., Contreras, J. M., y Arteaga, P. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. EM-TEIA. *Revista de Educaçao Matematica e Tecnologica Iberoamericana*, *2*(2), en http://emteia.gente.eti.br/.

Batanero, C., y Díaz, C. (2005). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. P. Royo, (ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas 9* (pp.

125-164). ICE, en http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig6/dra_carmen_doc.pdf.

Ben-Zvi, D., y Garfield, J. (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Kluwer Academic.

Bilgin, A., Newbery, G., y Petocz, P. (2015). Engaging and motivating students with authentic statistical projects in a capstone unit. En M. A. Sorto (ed.), *Advances in statistics education: developments, experiences and assessments. Proceedings of the Satellite conference of the International Association for Statistical Education (IASE), Rio de Janiero, Brazil*. IASE, en http://iase-web.org/documents/papers/sat2015/IASE2015%20Satellite%2028_BILGIN.pdf.

Binnie, N. (2002). Using projects to encourage statistical thinking. En B. Phillips (ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics. Town, South Africa* (pp.1-4). International Statistical Institute, en http://iase-web.org/documents/papers/icots6/10_69_bi.pdf.

Broers, N. J. (2006). Learning goals: the primacy of statistical knowledge. En A. Rossman y B. Chance (eds.), *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics*. International Association for Statistical Education. IASE.

Bulmer, M. (2010). Technologies for enhancing project assessment in large classes. En C. Reading (ed.), *Data and context in statistics education: towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics, Ljubljana, Slovenia*. IASE, en http://iase-web.org/documents/papers/icots8/icots8_5d3_bulmer.pdf.

Calle, C. (2013). *El enfoque por proyectos en la enseñanza de la estadística inferencial en la Institución universitaria Salazar y Herrera* [tesis de maestría no publicada]. Universidad Nacional de Colombia, en http://www.bdigital.unal.edu.co/12568/1/71794810.2014.pdf.

Callingham, R., y Watson, J. (2017). The development of statistical literacy at school. *Statistics Education Research Journal*, *16*(1), 181-201.

Carnell, L. (2008). The effect of a student-designed data collection project on attitudes toward statistics. *Journal of Statistics Education*, *16*(1), 1-15, en https://ww2.amstat.org/publications/jse/v16n1/carnell.pdf.

Chan, S., Ismail, Z., y Sumintono, B. (2016). A framework for assessing high school students' statistical reasoning. *PLoS ONE*, *11*(11), en doi:10.1371/journal.pone.0163846.

Chance, B. L. (2002) Components of statistical thinking and implications for instruction and assessment. *Journal of Statistics Education*, *10*, 1-18.

Conti, K., y Carvalho, D. (2014). Statistical literacy: developing a youth and adult education statistical project. *Statistics Education Research Journal*, *13*(2), 164-177, en https://pdfs.semanticscholar.org/6457/c617ad0a95f93ba6ae8b49f9a1f41c18087.pdf.

delMas, R. (2002). Statistical literacy, reasoning, and learning: a commentary. *Journal of Statistics Education*, *10*(3), 1-9, en http://ww2.amstat.org/publications/jse/v10n3/delmas_discussion.html.

delMas, R. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 79-95). Kluwer Academic Publishers.

delMas, R., Garfield, J., Ooms, A., y Chance, B. (2007). Assessing students' conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal*, *6*(2), 28-58, en https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ6(2)_delMas.pdf.

Dierker, L. Alexander, J., Cooper, J. L., Selya, A., Rose, J., y Dasgupta, N. (2016). Engaging diverse students in statistical inquiry: a comparison of learning experiences and outcomes of under-represented and non-underrepresented students enrolled in a multidisciplinary project-based statistics course. *International Journal for the Scholarship of Teaching and Learning*, *10*(1), 2, en http://digitalcommons.georgiasouthern.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1611&context=ij-sotl.

Figueroa, S., Baccelli, S., y Prieto, G. (2014). Idoneidad didáctica de un proceso de instrucción en una enseñanza de la estadística con proyectos. En P. Leston (ed.), *Acta Latinoamericana De Matemática Educativa 27* (pp. 541-550), ALME, en http://funes.uniandes.edu.co/5438/1/FigueroaIdoneidadALME2014.pdf

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2005). *A curriculum framework for K-12 statistics education. GAISE report*. American Statistical Association, en www.amstat.org/education/gaise/.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K-12 Curriculum Framework*. ASA, en http://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GaiseCollege_Full.pdf.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-51, en http://iase-web.org/documents/intstatreview/02.Gal.pdf.

——— (2004). Statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. En D. Ben-Zvi, y J. B. Garfield, (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning* *and thinking* (pp. 47-78). Kluwer Academic Publishers, en https://philpapers.org/archive/CAPTEO.pdf.

Garfield, J. (1999). *Thinking about statistical reasoning, thinking, and literacy* [ponencia]. First Annual Roundtable on Statistical Thinking, Reasoning and Literacy (STRL-1).

Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, *10*(3), 58-69, en http://ww2.amstat.org/publications/jse/v10n3/garfield.html.

——— (2011). *Statistical literacy, reasoning, and thinking*. En International encyclopedia of statistical science (pp. 1439-1442). Springer.

Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning. Connecting research and teaching practice*. Springer.

Garfield, J., y Chance, B. (2000). Assessment in statistics education: issues and challenges. *Mathematics Thinking and Learning*, *2*, 99-125.

Garfield, J., DelMas, R., y Chance, B. (2003). *Web-based assessment resource tools for improving statistical thinking*. Reporte de investigación presentado en The Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago.

Garfield, J., DelMas, R., y Zieffler, A. (2010). Assessing important learning outcomes in introductory tertiary statistics courses. *Assessment Methods in Statistical Education*, 75-86, en DOI:10.1002/9780470710470.ch7.

Godino J., Arteaga P., Estepa, A., y Rivas, H. (2013). Desafíos de la enseñanza de la estadística basada en proyectos. En J. Contreras, G. Cañadas, M. Gea y P. Arteaga (eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 173-180). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Groth, R., y Powell, N. (2004). Using research projects to help develop high school students' statistical thinking. *Mathematics Teacher, 97*(2), 106, en http://www.jstor.org/stable/20871523.

Halvorsen, K. (2010). Formulating statistical questions and implementing statistics projects in an introductory applied statistics course. En C. Reading (ed.), *Data and context in statistics education: towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia*, en http://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_4G3_HALVORSEN.pdf

Holmes, P. (1997). Assessing project work by external examiners. En I. Gal y J. B. Garfield (eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 153-164). IASE, en http://iase-web.org/documents/book1/chapter12.pdf.

Hovermill, J. (2003). *Technology supported inquiry learning in mathematics and statistics with fathom: a professional development project* [tesis doctoral no publicada]. Universidad de Colorado, en http://iase-web.org/documents/dissertations/03.Shamatha.Dissertation.pdf.

Inzunza, C. S. (2017). Potencial de los proyectos para desarrollar motivación, competencias de razonamiento y pensamiento estadístico. *Actualidades Investigativas en Educación*, *17*(3), 1-30.

Jolliffe, F. (2002). Statistical investigations–drawing it all together. En B. Phillips (ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics. Town, South Africa* (pp.1-6). ISI, en http://iase-web.org/documents/papers/icots6/3e2_joli.pdf.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Mooney, E. S. y Thornton, C. A. (2004). Models of development in statistical reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 97-117). Kluwer Academic, en https://doi.org/10.1007/1-4020- 2278-6_5.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W., Mooney, E. S., Perry, B., y Putt, I. J. (2000). A framework for characterizing children's statistical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *2*(4), 269-307, en doi:10.1207/s15327833mtl0204_3.

Koparan, T., y Güven, B. (2014). The effect of project based learning on the statistical literacy levels of student 8th grade. *European Journal of Educational Research*, *3*(3), 145-157, en http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1086050.pdf.

MacGillivray, H., y Pereira-Mendoza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 109-120). Springer.

Makar, K. (2004). *Developing statistical inquiry: prospective secondary mathematics and science teachers' investigations of equity and fairness through analysis of accountability data* [tesis doctoral no publicada]. Universidad de Texas, en https://repositories.lib.utexas.edu/bitstream/handle/2152/2083/makarkm042.pdf?sequence=2&isAllowed=y.

Makar, K., y Fielding-Wells, F. (2011). A model of learning to teach statistical enquiry. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman, *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher Education* (pp. 347–358). IASE.

Martonosi, S., y Williams, T. (2016). A survey of statistical capstone projects. *Journal of Statistics Education*, *24*(3), 127-135, en http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/10691898.2016.1257927?needAccess=true.

Ojeda, M. (2011). *Aprender estadística con proyectos. Memoria de una experiencia replicable*. Xalapa, México. Universidad Veracruzana, en http://www.uv.mx/personal/mojeda/files/2012/04/aprenderestadistica.pdf.

Pfannkuch, M., y Wild, C. J. (2000). Statistical thinking and statistical practice: themes gleaned from professional statisticians. *Statistical Science*, 132-152.

Porciúncula, M., y Samá, S. (2014). Teaching statistics through learning projects. *Statistics Education Research Journal*, *13*(2), 177-186.

Ramirez-Faghih, C. (2012). *Fostering change in college students' statistical reasoning and motivation through statistical investigation* [tesis doctoral no publicada]. Universidad de California, en http://iase-web.org/documents/dissertations/12.Ramirez.Dissertation.pdf.

Rivas, H., Godino, J. D., y Arteaga, P. (2019). Uso de la hoja de cálculo en el estudio de la estadística basado en proyectos: análisis de una experiencia formativa con futuros profesores de educación primaria. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (eds.), *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística*, en https://www.ugr.es/~fqm126/civeest/rivas.pdf.

Rivera, E. (2015). El aprendizaje de la estadística a partir de la investigación. *Uno*, *69*(1), 63-69, en http://uno.grao.com/revistas/uno/69-modelizacion/el-aprendizaje-de-la-estadistica-a-partir-de-la-investigacion.

Rumsey, D. J. (2002). Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. *Journal of Statistics Education*, *10*(3).

Sabbag, A. (2016). *Examining the relationship between statistical literacy and statistical reasoning* [tesis doctoral no publicada]. Universidad de Minessota, en https://conservancy.umn.edu/bitstream/handle/11299/182193/Sabbag_umn_0130E_17298.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Santana, A. (2020). Un estudio con futuros profesores de telesecundaria sobre el aprendizaje de estadística basado en proyectos [tesis doctoral]. Instituto Politécnico Nacional, en https://iase-web.org/documents/dissertations/20.AlbertoSantanaOrtega.Dissertation.pdf.

Snell, J. (1999). Using chance media to promote statistical literacy. Ponencia presentada en la *1999 Meeting of the American Statistical Association*, Section on Statistical Education.

Sovak, M. (2010). *The effect of student-driven projects on the development of statistical reasoning* [tesis doctoral no publicada]. Universidad de Pittsburgh, en http://d-scholarship.pitt.edu/7966/1/SovakM_Aug2010.pdf.

Spence, D., Sharp, J., y Sinn, R. (2011). Investigation of factors mediating the effectiveness of authentic projects in the teaching of elementary statistics. *Journal of Mathematical Behavior*, *30*(4), 319-332.

Spence, D., y Sinn, R. (2009). Authentic discovery projects in statistics. Reporte de investigación presentado en *3rd Annual Meeting of the Georgia Association of Mathematics Teacher Educators*. http://digitalcommons.georgiasouthern.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1020&context=gamte.

Starkins, S. (1997). Assessing student projects. En I. Gal, y J. B. Garfield, (eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 139-151), en http://iase-web.org/documents/book1/chapter11.pdf.

Thomas, J. (2000). *A review of research on project-based learning. San Rafael, CA: The Autodesk Foundation*, en http://www.bobpearlman.org/BestPractices/PBL_Research.pdf.

Tauber, L. (2010). Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas. *Revista de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL*, *8*(1), 53-67.

Verhoeven, P. (2013). Engaging students in statistics education: situated learning in statistics projects. En M. Saisana (ed.), *Proceedings 59th ISI World Statistics Congress* (pp. 25-30), en http://2013.isiproceedings.org/Files/IPS045-P3-S.pdf.

Villazcán, M. A. (2014). *Comparación de métodos de enseñanza sobre el aprendizaje de conceptos de estadística inferencial en normalistas* [trabajo recepcional no publicado]. Universidad Veracruzana, en http://www.uv.mx/eme/files/2012/11/Comparacion-de-Metodos-de-Ensenanza-Sobre-el-Aprendizaje-de-Conceptos-de-Estadistica-Inferencial-en-Normalistas.pdf.

Wallman, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy: enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*, *88*, 1-8.

Walsh, T. (2011). Implementing project based survey research skills to grade six ELP students with the survey toolkit and tinkerplots. *Journal of Statistics Education*, *19*(1), en http://ww2.amstat.org/publications/jse/v19n1/walsh.pdf.

Wardrop, R. (1999). Small student projects in an introductory statistics course. En T. Moore (ed.), *Teaching Statistics, MAA Notes* núm. *52* (pp. 19-25). Mathematical Association of America, en http://pages.stat.wisc.edu/~wardrop/papers/tmoore.pdf.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: growth and goals*. Lawrence Erlbaum.

Watson, J. M., y Callingham, R. (2003). Statistical literacy: a complex hierarchical construct. *Statistics Education Research Journal*, *2*(2), 3-46.

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-265, en http://iase-web.org/documents/intstatreview/99.Wild.Pfannkuch.pdf.

Zeleke, A., Lee, C., & Daniels, J. (2006). Developing projects based on student's data in introductory statistics. En A. Rossman y B. Chance (eds.), *Proceedings of the Sevent International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6). ISI, en https://www.ime.usp.br/~abe/ICOTS7/Proceedings/index.html.

Ziegler, A. (2014). *Reconceptualizing statistical literacy: developing an assessment for the modern introductory statistics course* [tesis doctoral no publicada]. Universidad de Minessota, en https://iase-web.org/documents/dissertations/14.LauraZiegler.Dissertation.pdf.

2. Actividad provocadora de modelos: propuesta para aprender matemáticas

Verónica Vargas Alejo[1]
Carlos Valenzuela García[2]
Martha E. Aguiar Barrera[3]

Resumen

Desde distintos enfoques, uno de los grandes retos al que se enfrentan los educadores matemáticos, llámense profesores o investigadores, es buscar alternativas para contribuir a la mejora de la calidad educativa en matemáticas. Durante años se han propuesto estrategias que apuntan a esa tarea; sin embargo, en la práctica no siempre se conocen estas opciones o existe temor de cambiar la práctica docente debido a no poder anticipar qué podría suceder al implementarlas e incluso no estar seguros de cómo crear un ambiente de aprendizaje idóneo. Con el afán de mostrar una alternativa de enseñanza, en este capítulo se expone la perspectiva de modelos y modelación y, mediante la descripción de los resultados de un estudio, se da evidencia de cómo las actividades provocadoras de modelos son una propuesta que potencia el aprendizaje de las matemáticas. Un grupo de estudiantes de posgrado con experiencia docente participó en el estudio mediante el cual se implementó una actividad provocadora de modelos. Al realizar la actividad, exhibieron conocimientos, habilidades y creencias, así como la modificación, la ampliación y el refinamiento de ello. Además,

[1] Doctora en ciencias en matemática educativa, con maestría en enseñanza de las matemáticas. Departamento de Matemáticas, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, Universidad de Guadalajara. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7431-0568

[2] Doctor en ciencias en matemática educativa, con maestría en enseñanza de las matemáticas. Departamento de Matemáticas, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, Universidad de Guadalajara. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0776-5757

[3] Doctora en diseño curricular y evaluación educativa, con maestría en enseñanza de las matemáticas. Departamento de Matemáticas, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, Universidad de Guadalajara. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7902-3405

en sus reflexiones hacen ver el potencial y la necesidad de considerar este tipo de actividades en su práctica docente.
Palabras clave: *perspectiva de modelos y modelación, actividades provocadoras de modelos, aprender matemáticas.*

Introducción

Cada vez más, los esfuerzos y el trabajo de investigadores, profesores y diseñadores del currículo han aportado y apostado por diferentes alternativas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, siempre con la intención de lograr una educación matemática de calidad. Se busca que los estudiantes desarrollen no sólo conocimientos sino también habilidades y creencias para resolver problemas más allá de los escolares (Lesh, 2010; Sevinc, 2021; Sevinc y Lesh, 2021). Se pretende que se les prepare para que logren transferir —de manera flexible, eficaz y eficiente— sus conocimientos y habilidades hacia la resolución de problemas cercanos a su entorno o a su futura profesión, así como para enfrentar los retos del futuro.

Cuando se busca apoyar el desarrollo de conocimientos, habilidades y creencias matemáticas, de manera natural surgen varias interrogantes; por ejemplo: ¿qué tipo de actividades se deben proponer en el aula?, ¿qué tipo de ambientes de aprendizaje se deben fomentar?, ¿qué conocimientos, habilidades y creencias deben desarrollar los estudiantes? La perspectiva de modelos y modelación (MMP, por sus siglas en inglés *models & modeling perspectives*) es una de las corrientes matemáticas que aportan respuestas a estas preguntas (Lesh, 2010; Lesh y Doerr, 2003; Sriraman y Lesh, 2006). Desde esa perspectiva, en adelante MMP, se señala que —para preparar a los estudiantes para la resolución de problemas cercanos a su entorno— la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se deben enfocar en las grandes ideas matemáticas a través de *1)* la resolución de problemas o situaciones cercanas a la vida real mediante estrategias grupales de trabajo cooperativo apoyado en la tecnología, y *2)* la expresión escrita y verbal de ideas o modelos construidos por los estudiantes —que propicien el desarrollo de su razonamiento matemático— al describir, explicar y predecir situaciones problemas cercanas a su entorno real (Lesh, 2010; Sriraman y

Lesh, 2006). Entre las actividades que sugiere la MMP para proponer en el aula están las actividades provocadoras de Modelos (MEA, por sus siglas en inglés *Model-Eliciting Activities*), las cuales son situaciones problemas cercanas a la vida real (Doerr, 2016; Lesh *et al.,* 2000; Sevinc, 2021).

Con el propósito de exponer el potencial de las actividades provocadoras de modelos, en adelante MEA, como una forma de enseñar matemáticas, en este capítulo se describen las implicaciones que tuvo la implementación de una MEA sobre el aprendizaje por un grupo de estudiantes de posgrado, con experiencia docente. Se muestra cómo los estudiantes exhibieron conocimiento, habilidades y creencias, así como la modificación, la ampliación y el refinamiento de éstos. Además, se incluyen reflexiones que este mismo grupo hizo sobre la forma de trabajar sugerida por la MMP y cómo podría apoyar su práctica docente.

Fundamentos teóricos

La MMP subraya la necesidad de que los estudiantes aprendan matemáticas a través de la resolución de problemas cercanos a la vida real que los conduzcan a la construcción de herramientas conceptuales útiles para dar sentido a sus experiencias y para crear nuevas realidades y experiencias (Lesh y Doerr, 2003).

Aprender matemáticas en la MMP puede concebirse como un proceso de desarrollo de modelos (o sistemas conceptuales), los cuales están en constante cambio, modificación, extensión y refinamiento en la medida en que los individuos (ya sea estudiantes, profesores, investigadores u otros) interactúan entre sí y están inmersos en ambientes en los que se tiene que resolver algún problema (Lesh, 2010).

> Los modelos son sistemas conceptuales (consisten en elementos, relaciones, operaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y que son utilizados para construir, describir o explicar los comportamientos de otros sistemas de tal manera que el otro sistema pueda ser manipulado o pronosticado [Lesh y Doerr, 2003, p. 10].

Los modelos o sistemas conceptuales residen en la mente y en los medios representacionales, mismos que pueden verse en la figura 1. Los medios representacionales utilizados para describir el comportamiento de una situación tienden a exhibir aspectos del fenómeno que se intenta describir. Debido a ello,

> *a)* los significados asociados a un sistema conceptual dado tienden a distribuirse a través de una variedad de medios de representación, *b)* la fluidez representacional subyace en algunas de las habilidades más importantes asociadas con lo que significa entender un sistema conceptual, y *c)* los procesos de solución para las actividades de desarrollo de modelos (u otros tipos de experiencias de resolución de problemas) con frecuencia implican ir y venir entre una variedad de representaciones relevantes [Lesh y Doerr, 2003, p. 12].

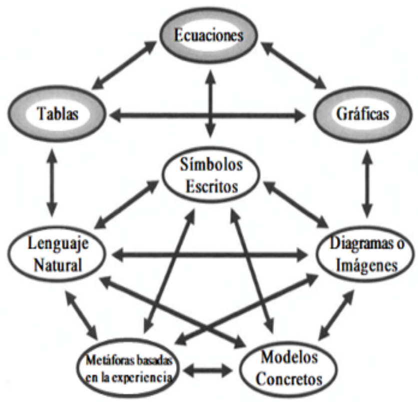
Lo anterior implica que la sofisticación de respuestas de los estudiantes puede ser diferente, dependiendo de qué sistemas de representación sean subrayados en su solución a un problema dado, cuántos y cómo los utilice, y qué tanta fluidez representacional tenga. La fluidez representacional requiere abstracción. Los sistemas de representación incluyen lenguaje escrito, lenguaje hablado, diagramas, metáforas, tablas, gráficas, ecuaciones (figura 1). Además, las herramientas tecnológicas se consideran un recurso que facilita la construcción de los medios representacionales.

Los modelos que construyen los estudiantes revelan características importantes de su forma de pensar.

> Los estudiantes no simplemente se involucran de manera lógica matemática; también involucran sus sentimientos, valores, creencias, disposiciones y una variedad de funciones metacognitivas; y a la inversa, en una situación dada, el compromiso o no con un sentimiento, valor, creencia, disposición o proceso metacognitivo depende de cómo se interprete la situación [Lesh, 2010, p. 21].

Dichos atributos, por ser parte de los modelos, también pueden modificarse. Además, “se espera que una parte importante de la competencia [que desarrollan los estudiantes al resolver los problemas] implique apren-

Figura 1. *Medios representacionales en los cuales pueden estar distribuidos los significados de los sistemas conceptuales*



Fuente: (tomado de Lesh y Doerr, 2003, p. 12).

der a manipular perfiles de sentimientos, valores y disposiciones para adaptarse a circunstancias cambiantes" (Lesh, 2010, p. 21).

La MMP propone el diseño y uso de MEA en la instrucción matemática, además de utilizarlas en la investigación (Lesh y Kelly, 2000). Como se mencionó, las MEA son situaciones-problema cercanas a la vida real, que permiten a los estudiantes desarrollar modelos como solución a un problema dado (Lesh, 2010; Sevinc, 2021). Estas actividades se construyen con base en seis principios: *1)* principio de realidad o del significado personal, *2)* principio de construcción del modelo, *3)* principio de reutilización o de compartibilidad, *4)* principio de documentación del modelo, *5)* principio de autoevaluación y *6)* principio de prototipo efectivo (Lesh *et al.,* 2000).

Los resultados de las investigaciones han mostrado que las MEA son herramientas poderosas para el aprendizaje efectivo (Lesh *et al.,* 2007; Zawojewski *et al.,* 2003) porque las respuestas de los estudiantes a las MEA implican el desarrollo de interpretaciones, descripciones o explicaciones complejas. Estas interpretaciones tienden a modificarse, ampliarse y refinarse a través de una serie de ciclos de modelación (Lesh y Doerr, 2003; Sevinc, 2021). Estos ciclos permiten a los estudiantes refinar sus modelos y desarrollar habilidades de razonamiento cada vez más complejas. Es decir, los estudiantes consideran nueva información en cada ciclo, lo cual implica que haya modificaciones, extensiones y refinamiento de los modelos iniciales. Con frecuencia los estudiantes, quienes al principio describen situaciones apoyados en una herramienta conceptual, pueden ir más allá, para pensar con profundidad en esa herramienta conceptual (Lesh y Doerr, 2003).

Metodología

Dado que el propósito de este estudio es describir las implicaciones que tuvo la implementación de una MEA sobre el aprendizaje por un grupo de estudiantes de posgrado, así como sus reflexiones sobre la implementación de esta, con el fin de resaltar el potencial de las MEA para aprender matemáticas, la metodología de la investigación expuesta en este trabajo es de corte cualitativo.

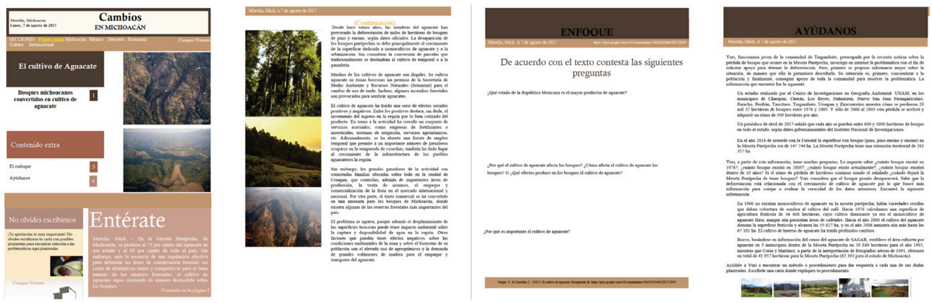
Participantes

Los participantes fueron un grupo de cinco estudiantes de posgrado (E1, E2, E3, E4 y E5) con experiencia docente en los niveles básico y medio superior. Cuando se implementó la MEA, estaban tomando un curso sobre resolución de problemas y la perspectiva de modelos y modelación como herramienta para apoyar el aprendizaje de las matemáticas en el aula. El curso fue híbrido. Se apoyó en la plataforma Moodle como medio para su desarrollo.

MEA deforestación

La MEA que se implementó y se discutió con el grupo de estudio fue diseñada y analizada previamente por Vargas-Alejo *et al.* (2018) siguiendo los seis principios de construcción de una MEA. El contexto de donde se deriva el problema puede observarse en la figura 2, y trata sobre la deforestación en el estado de Michoacán como consecuencia del incremento del área de cultivo de aguacate. En el cuadro 1 puede observarse el problema

FIGURA 2. *MEA deforestación*



FUENTE: (tomado de Vargas-Alejo *et al.,* 2018).

que se planteó a los estudiantes, en el cual se les solicita redactar una carta explicando los modelos que proponen y los procedimientos que siguen para responder al problema. En la MEA, los conceptos matemáticos que subyacen principalmente son función, ecuación, variación, crecimiento y razón de cambio.

Fases de implementación

La implementación de la MEA se llevó a cabo en las siguientes fases:

- Resolución individual de la MEA. Tarea extraclase solicitada en Moodle. A los estudiantes se les permitió utilizar herramientas tecnológicas para resolver la MEA, tales como GeoGebra y Excel.
- Discusión de la MEA en bina o equipo. Tarea extraclase solicitada en Moodle para realizarse de manera *on line.* Se formaron dos equipos: E3, E4 y E5, y E1 y E2; pero la bina no se reunió, siguió trabajando de manera individual.
- Discusión grupal. Se discutieron, en un ambiente presencial, los procesos de construcción de modelos elaborados individualmente o en equipo y los modelos finales.

Cuadro 1. *El problema propuesto*

Yuri, funcionaria joven de la comunidad de Tingambato, preocupada por la reciente noticia sobre la pérdida de bosque que ocurre en la Meseta Purépecha investigó en internet la problemática con el fin de solicitar apoyo para detener la deforestación. Su intención es, primero, concientizar a la población y, finalmente, conseguir apoyo de toda la comunidad para resolver la problemática. La información que encontró fue la siguiente:

Un estudio realizado por el Centro de Investigaciones en Geografía Ambiental UNAM, en los municipios de Charapan, Cherán, Los Reyes, Nahuatzen, Nuevo San Juan Parangaricutiro, Paracho, Peribán, Tancítaro, Tingambato, Uruapan y Ziracuaretiro, muestra cómo se perdieron 20 032 hectáreas de bosques entre 1976 y 2005. Y sólo de 2000 a 2005 esta pérdida se aceleró y adquirió un ritmo de 509 hectáreas por año.

Un periódico de abril de 2017 señaló que cada año se pierden entre 600 y 1 000 hectáreas de bosque en todo el estado, según datos gubernamentales del Instituto Nacional de Investigaciones.

En 2014, de acuerdo con la Forestal, la superficie con bosque (pino, pino-encino y encino) en la Meseta Purépecha era de 147 744 ha. La Meseta Purépecha tiene una extensión territorial de 381 357 ha.

Yuri, a partir de esta información, tiene muchas preguntas. Le inquieta saber: ¿cuánto bosque existió en 1976?, ¿cuánto bosque existió en 2005?, ¿cuánto bosque existe actualmente?, ¿cuánto bosque existirá dentro de 10 años? Si el ritmo de pérdida de hectáreas continúa siendo el señalado, ¿cuándo dejará la Meseta Purépecha de tener bosques? Yuri considera que el bosque pronto desaparecerá. Sabe que la deforestación está relacionada con el crecimiento de cultivo de aguacate, por lo que buscó más información para cotejar o evaluar la veracidad de los datos anteriores. Encontró la siguiente información.

En 1960 no existían monocultivos de aguacate en la Meseta Purépecha; había variedades criollas que daban cobertura de sombra al cultivo del café. Hacia 1976 calculamos una superficie de agricultura frutícola de 34 606 hectáreas, cuyo cultivo dominante ya era el monocultivo de aguacate Hass, aunque aún persistían áreas de cafetales. Hacia el año 2000 el cultivo del aguacate domina la superficie frutícola y alcanza las 55 627 ha, y en el año 2006 aumenta aún más hasta las 67 181 ha. El cultivo de huertas de aguacate ha traído profundos cambios.

Bocco, basándose en información del censo del aguacate de la Sagar, establece el área cubierta por aguacate en cinco municipios dentro de la Meseta Purépecha en 39 849 ha para 1993, mientras que Coria y Martínez, a partir de la interpretación de fotografías áreas de 1991, obtienen un total de 41 957 ha para la Meseta Purépecha (62 393 para el estado de Michoacán).

Ayúdale a Yuri a encontrar un método o procedimiento para dar respuesta a cada una de sus dudas. Escríbele una carta donde explique tu procedimiento

Fuente: (tomado de Vargas-Alejo *et al.,* 2018, p. 15).

Criterios de análisis

Debido a que en la MMP se concibe aprender matemáticas como un proceso de desarrollo de modelos (o sistemas conceptuales) en constante cambio (Lesh, 2010) el análisis se hizo sobre los modelos que se exponen en las cartas escritas por los estudiantes, así como en las reflexiones que emergieron al explicarlos durante la discusión grupal. Se hizo una clasificación sobre el tipo de modelo de acuerdo con los conocimientos matemáticos que se evidenciaron. Esta clasificación contempla conocimiento sobre función lineal, cuadrática y exponencial. Además, a través de la descripción que hicieron los estudiantes sobre el proceso de construcción de modelos se documentaron las habilidades de modelación, así como las creencias relacionadas con el proceso de construcción de modelos y modelos construidos. Se documentó cómo su sistema conceptual (habilidades de modelación, conocimiento matemático y creencias) cambió o se extendió y refinó durante el proceso de construcción de modelos y la interacción de los estudiantes (entre sí y con el profesor investigador) para resolver la MEA, al presentarla y discutirla en la sesión grupal. Asimismo, en la discusión con los estudiantes, ellos dieron cuenta sobre el potencial de la MEA para aprender matemáticas.

Fuentes de datos

La recolección de datos se hizo mediante grabaciones de audio de la discusión grupal del proceso de construcción de modelos y de modelos finales. A través de la plataforma Moodle se obtuvieron las cartas elaboradas por los estudiantes. El profesor investigador llevó una bitácora de lo acontecido con los cinco estudiantes durante el curso.

Resultados y análisis

Los resultados se muestran en dos partes; primero se expone de manera general la clasificación sobre los modelos que construyeron los estudiantes para responder la actividad, dejando ver un cambio en sus modelos inicial y final, lo que contempla una modificación, una ampliación y un refinamiento de su sistema conceptual (habilidades, conocimiento y creencias). Posteriormente se ofrece evidencia de las actuaciones de cada alumno, considerando su participación durante la discusión y los procesos que siguieron en la carta que escribieron como respuesta al problema.

Tipos de modelos construidos

Inicialmente, como puede verse en el cuadro 2, la mayoría de los estudiantes propuso un modelo lineal y sólo uno sugirió un modelo exponencial. Sin embargo, después de las etapas de reflexión y discusión, cuatro de ellos lograron hacer un cambio en su sistema conceptual, presentando al final ya sea un modelo cuadrático o uno exponencial (cuadro 2). En la discusión grupal, todos los estudiantes reportaron que ese cambio en los modelos se debió a la autoevaluación o a la discusión en equipo, resaltando además la importancia de aprender y poder llevar a cabo ese tipo de actividades y esa forma de implementarlas en sus aulas, porque tanto ellos como, en general, varios estudiantes están acostumbrados a seguir procedimientos.

El cambio en los modelos da cuenta del aprendizaje que los estudiantes desarrollaron al resolver la MEA. Puntualmente, enseguida se describe el conocimiento, las habilidades y las creencias de los estudiantes, reportados al momento de exponer sus procesos y a través de las cartas elaboradas para explicar sus modelos. El reporte se hace conforme los alumnos fueron participando en la discusión grupal.

CUADRO 2. *Tipo de modelos construidos (iniciales y finales)*

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>Modelo inicial</th><th>Modelo final</th></tr>
<tr><td>E1</td><td rowspan="4">Lineal</td><td>Lineal</td></tr>
<tr><td>E2</td><td>Exponencial</td></tr>
<tr><td>E3</td><td rowspan="3">Modelo cuadrático</td></tr>
<tr><td>E4</td></tr>
<tr><td>E5</td><td>Exponencial</td></tr>
</table>

Estudiantes E3 y E4

Inicialmente ellos contestaron las preguntas inmersas en la MEA a través de operaciones aritméticas. En sus cartas dejaron expresados los datos numéricos que extrajeron de la actividad que se les propuso y explicaron las relaciones aritméticas consideradas por ellos necesarias para dar respuesta a las preguntas que se plantean en el problema. Un ejemplo se muestra en el cuadro 3.

En las cartas y los audios se puede identificar cómo los estudiantes E3 y E4 establecieron ciertos supuestos, como los siguientes: "Se pierden aproximadamente de 600 a 1 000 hectáreas [por año], sacando el promedio se puede decir [que se pierden por año] 800 hectáreas" (cuadro 3).

> [1] E4: cuando yo hice las operaciones, determiné que, más o menos anual, eh, se iban como, como ciento y tantos. Se iban gastando, eh… 1 926 hectáreas anuales […] Entonces dije, ah, entonces, si cada año se sigue creciendo… se sigue cultivando aguacate en esa cantidad de hectáreas, entonces en determinado tiempo se va a acabar el bosque.

CUADRO 3. *Modelo inicial del estudiante E3*

Hola Yuri, creo que tengo un método para saber el fin del bosque de la meseta Purépecha:

PERDIDA O DATO DE HECTÁREAS	AÑO O AÑOS
Perdió 20,032 hectáreas	1976-2005
Perdió 600 a 1000 hectáreas por año	2017
Tenía 147,744 hectáreas	2014
Perdió 509 hectáreas por año	2000-2005
Extensión del territorio total	381,357

El bosque que existió en 1976:

Entre los años 1976 y 2005 se perdieron 20,032 hectáreas, ahora bien, se tiene conocimiento que del 2000 a 2005 perdió anual 506 hectáreas, en esos 6 años así que $509 \cdot 6 = 3{,}054$ hectáreas, ahora bien lo que se perdió del año 1999 al 1976 será $20{,}032 - 3{,}054 = 16{,}978$ hectáreas, posterior calculamos que de 1999 a 1976 existen 23 años y de esa forma sabemos cuanta perdida hubo por año $16{,}978 \div 23 = 738.173$ hectáreas; el bosque que existió en 1976 será $381{,}357 - 738.173 = \boxed{380{,}618.827}$ hectáreas.

El bosque que se existió en el 2005 se calcula: restando el total del terreno y lo perdido hasta ese año $381{,}357 - 20{,}032 = \boxed{361{,}325}$ hectáreas.

El bosque que existe actualmente se calcula sacando la diferencia de lo que se tenía en el 2005 $\boxed{361{,}325}$ ***hectáreas*** y en el 2014 $\boxed{147{,}744}$ ***hectáreas,*** así que $\mathbf{361{,}325 - 147{,}744} = \boxed{213{,}581}$ **hectáreas** eso se perdió en esos años lo dividimos entres 9 años que son los que se encuentran entre esas fechas y se tiene que cada año perdieron $\boxed{23{,}731.22}$, el relato no dice más respecto a lo que transcurre del año 2014 al 2017 así que anexamos la perdida de tres años sería $\boxed{71{,}193.66}$, se menciona que del 2017 en adelante se pierden aproximadamente de 600 a 1000 hectáreas, sacando el promedio se puede decir 800 hectáreas, dentro de 10años ¿cuánto habrá? Restamos

$\mathbf{147{,}744 - 71{,}193.66} = \boxed{76{,}550.34}$ **hectáreas hasta el 2017,** en 10 años estarán en el 2027 y sabemos que disminuye 800 hectáreas por año así que $800 \cdot 10 = 8{,}000$ hectáreas perdidas, en el 2027 se tendrá $\mathbf{76{,}550.34 - 8000} = \boxed{68{,}550}$ **hectáreas.**

La cuestión es cuándo dejará la meseta purépecha de tener bosque, lo que restan hasta el 2027 son $\boxed{68{,}550}$ **hectáreas,** entonces sabemos que pierde 800 hectáreas por año, así que dividimos $68{,}550 \div 800 = \mathbf{85.68}$ **aproximadamente en 85 años más no exista el bosque.**

Mediante estos supuestos dieron respuesta a las preguntas planteadas en el problema. Por ejemplo, E3 escribió: "Aproximadamente en 85 años más no exista el bosque" (cuadro 3). E3 y E4 explicaron así:

> [2] E3: Suponiendo [que] el cultivo de aguacate mantiene este ritmo [se refiere a una tasa constante] las hectáreas de la meseta libres de este sembradío se acabarían en el año 2090, aproximadamente.
> [3] E4: Considerando que aumentan los cultivos de aguacate en 1 926 hectáreas cada año, el bosque se perderá aproximadamente en 30 años.

En los siguientes extractos de la discusión grupal hay evidencia de sus explicaciones que confirman lo que se analizó:

> [4] E3: Yo fui dando respuesta a esas preguntas, como tal, pero no, no me enfoqué en hacer un modelo, como en este caso, el de mi compañero E5.
> [5] E4: Hice operaciones aritméticas y todo, y respondí las preguntas […] pero no se me ocurrió hacer un modelo.

Al comparar sus soluciones con las del estudiante E5, los estudiantes señalaron falta de habilidades para crear modelos:

> [6] E4: Yo tampoco sé cómo crear un modelo para resolver un problema. Se me complica mucho. Quizá porque no sé los pasos o quisiera que estuvieran los pasos: primero tienes que hacer esto, esto, y esto otro, porque no sé si así estoy acostumbrada.

Señalaron que reconocían tener conocimiento matemático:

> [7] E3: Al momento que yo veo el modelo que tiene E5, lo entiendo, lo comprendo; o sea, digo, tiene sentido. Pero no logro [logré] llegar a él.
> [8] E4: Creo que venía una parte, un elemento de los modelos, que era la representación gráfica, representaciones más ilustrativas, hacer representaciones. Pero no se me ocurrió que podía también hacer eso.

Después de agruparse como equipo (E3, E4 y E5), los estudiantes E3 y E4 decidieron que el modelo de E5 era más adecuado para describir el fenómeno y lo subieron a la plataforma como modelo final (cuadro 3), el cual se describirá más adelante.

Observaciones. Los estudiantes E3 y E4 reportaron que se concentraron en desarrollar cálculos para dar respuesta a las preguntas planteadas y no se enfocaron en la construcción de un modelo, debido a su falta de experiencia escolar [6]. Sin embargo, en los procedimientos aritméticos realizados para resolver la MEA, los estudiantes asumieron una tasa de crecimiento constante, [1] y [2], y con ese conocimiento dieron respuesta a las preguntas planteadas en la situación. Fue hasta la sesión grupal cuando reconocieron, a partir del análisis de sus procedimientos, que habían partido del supuesto de una tasa constante y eso los había llevado a interpretar el decrecimiento del bosque de una manera lineal. Había un modelo inicial en su interpretación de la situación. De acuerdo con Lesh y Doerr (2003) las MEA con frecuencia fomentan que los estudiantes, quienes al principio describen situaciones apoyados en una herramienta conceptual, pueden ir más allá para pensar ahora en la herramienta (Lesh y Doerr, 2003). La discusión en equipo y grupal de los modelos construidos para resolver la MEA permitió a estos estudiantes reflexionar sobre su propio sistema conceptual (habilidades, conocimientos y creencias), así como conocer y analizar otros modelos utilizados para describir y predecir el fenómeno.

Estudiante E1

Durante la discusión grupal este estudiante manifestó tener ciertas habilidades para la construcción de modelos y sus creencias al respecto, cuando comentó a sus compañeros E3 y E4 lo siguiente después de que ellos intervinieran (véase extracto [6]).

> [9] E1: No estoy entendiendo qué pasos quieren o necesitan ver. Una modelación es una generalización. Si ya habíamos hecho lo del hotel, pues nomás era que… algo le quitaban y algo crecía, y ya. Eventualmente esa gráfica significaba algo.

El estudiante E1 señaló haber utilizado conocimiento lineal para describir el fenómeno de deforestación:

> [10] M: ¿Alcanzaste a hacer un modelo?
> [11] E1: El modelo que yo pienso que, bueno…, ¿un modelo así como ése? [se refería a la gráfica exponencial dibujada por E2 en el pizarrón] pues… nada más la generalización, de que quitas una cosa para poner otra cosa y pues salen dos rectas así, cruzadas.

El estudiante E1 mencionó haber tratado de construir sin éxito un modelo cuadrático:

> [12] E1: No, ni yo tampoco encontré una cuadrática. Lo vi como optimización, una línea de puro bosque respecto al tiempo y otra de los aguacates respecto al tiempo. Son dos rectas.

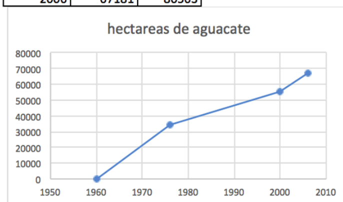
El estudiante entregó el modelo final que puede observarse en el cuadro 3, el cual corresponde a un modelo lineal y está apoyado en representaciones tabulares y gráficas. En su modelo puede observarse el crecimiento del cultivo del aguacate y el decrecimiento de la extensión del bosque.

El estudiante E1, con base en su modelo lineal, reportó cuándo podría desaparecer el bosque: "Considerando que aumentan los cultivos de aguacate en 1 975 hectáreas cada año, el bosque se perderá en aproximadamente 30 años" (cuadro 4).

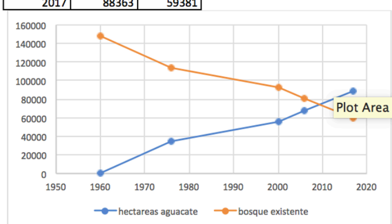
Observaciones. Para el estudiante E1 los modelos se construyen al analizar la situación planteada, en términos de qué cambia y cómo cambia. Cuando E1 señaló "ya habíamos hecho lo del hotel", se refería a que todos los estudiantes habían resuelto la MEA El Hotel (Aliprantis y Carmona, 2003; Vargas-Alejo y Cristóbal-Escalante, 2019) en un curso previo. Uno de los modelos para resolver la MEA El Hotel había incluido la construcción de dos rectas que se intersecan, previamente a la construcción de la función cuadrática. Lesh y Yoon (2004) mencionan que cuando se resuelve una MEA los estudiantes usualmente utilizan ese conocimiento desarrollado en la

Cuadro 4. *Modelo final del estudiante E1*

año	hectáreas aguacate	bosque existente
1960	0	147744
1976	34606	113138
2000	55627	92117
2006	67181	80563



año	hectáreas aguacate	bosque existente
1960	0	147744
1976	34606	113138
2000	55627	92117
2006	67181	80563
2017	88363	59381



Carta a Yuri

¿cuánto bosque existió en 1976?

113,138 hectáreas

¿cuánto bosque existió en 2005?

80,563 hectáreas

¿cuánto bosque existe actualmente?

59,381 hectáreas

Si el ritmo de pérdida de hectáreas continua siendo el señalado ¿cuándo dejará la Meseta Purépecha de tener bosques?

Considerando que aumentan los cultivos de aguacate en 1,925 hectáreas cada año, el bosque se perderá en aproximadamente 30 años.

nueva experiencia. Esto explica por qué E1 utilizó conocimiento lineal e intentó describir la deforestación mediante una función cuadrática [12].

Estudiante E2

En el primer modelo, el estudiante señaló haber utilizado su conocimiento sobre ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales:

> [13] E2: Ahorita que están mencionando ¿por qué no lo pudimos haber resuelto con una ecuación lineal o algo así? Yo en todo trato de meter las ecuaciones lineales o los sistemas de ecuaciones lineales, y me acordaba de estarlo resolviendo así. Pero, había cosas que no concordaban.

El estudiante reportó que inicialmente buscó una tasa de cambio constante para generar un modelo lineal. Los datos de la MEA, provenientes de distintas fuentes, le hicieron dudar respecto del uso del modelo lineal, ya que vio ciertas inconsistencias. Reportó, además, creencias y tener ciertas habilidades para crear un modelo:

> [14] E2: Yo sé que parte de la metodología que se sigue en esta perspectiva es que no tenemos que dejar que nuestro estado de frustración llegue a tal, que no hagamos nada; sino que es empezar a hacer algo y ver si eso que hiciste te funcionó, y si no, pues a la mejor tomas *[sic]* otro camino, y otro camino, y es como intentar e intentar.

Esta creencia le permitió a E2 tomar la decisión de graficar y tratar de analizar la situación con un modelo distinto; es decir, lo llevó a presentar un modelo final basado en una función exponencial (cuadro 5).

En ese modelo se pueden observar representaciones tabulares y gráficas, a partir de las cuales describió la situación, pero no se comprometió a dar respuestas puntales a las preguntas del problema.

Debido a que no supo cómo encontrar una expresión algebraica que describiera el comportamiento de la gráfica obtenida, que ajustara a los datos, decidió no comprometerse con una respuesta para la pregunta del problema: ¿cuándo desaparecerá el bosque?, y en cambio respondió que no pasarán muchos años para que el bosque desaparezca.

Observaciones. El estudiante E2 mostró habilidad para usar su conocimiento desarrollado para resolver el problema. Primero modeló a través de sus conocimientos sobre funciones lineales y posteriormente utilizó su conocimiento sobre las funciones exponenciales. En su sistema conceptual existía la creencia de que la gráfica por sí sola no podría ayudar a estimar y predecir cuándo se acabaría el bosque. Buscaba valores exactos, así que requería una función algebraica, lo cual, posteriormente se dio cuenta, podría haberla obtenido a través de Excel. De acuerdo con Lesh y Doerr (2003), las MEA fomentan que los estudiantes, quienes al principio describen situaciones apoyados en una herramienta conceptual, en este caso exponencial, pueden ir más allá para ahora pensar en la herramienta (Lesh y Doerr, 2003). El estudiante se encontraba en la fase de reflexión sobre su gráfica construida y la representación algebraica asociada.

CUADRO 5. *Modelo final construido por el estudiante E2*

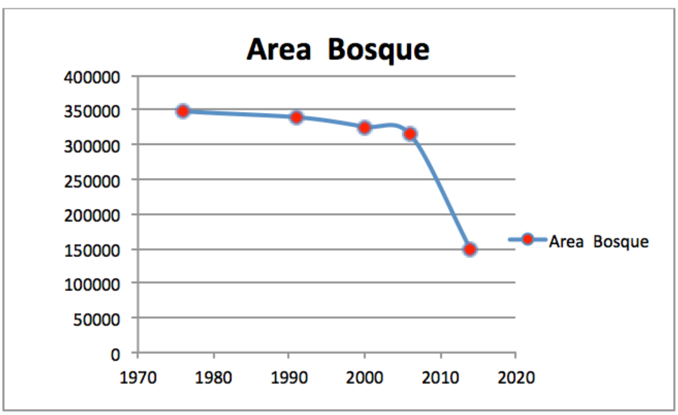
Carta

Estimada Yuri:

Tu preocupación por la conserva del bosque que se encuentra en la región de la Meseta Purépecha, es una problemática real que de no ser que el gobierno tome acciones prontas por regular el área de deforestación del bosque y cese su permisiva y asigne otras áreas para el cultivo de aguacate diferentes a el área del bosque puede ocasionar en pocos años que se termine completamente el bosque.

De acuerdo con la información que recolectaste, que por cierto es de diferentes fuentes y por lo mismo puede haber variaciones de la realidad; te muestro el resumen de los datos y una gráfica con la que se distingue una disminución exponencial del bosque y por lo tanto no pasarán muchos años para que desaparezca.

Año	Area Bosque
1976	346,751
1991	339,400
2000	325,730
2006	314,176
2014	147,744



Estudiante E5

Durante la discusión grupal, el **estudiante E5** reportó que el análisis de los datos inicialmente lo condujo a pensar en la creación de un modelo exponencial para describir el crecimiento del cultivo de aguacate:

> [15] E5: Estos datos los metí en Excel… y hallé una línea de tendencia. Inicialmente yo vi, y dije: "¡Ah debe ser una aproximación exponencial!"

En cuanto a sus habilidades de modelación, estuvo analizando los datos con cuidado, observando las diversas fuentes, y el patrón de decrecimiento del bosque, y con apoyo de Excel graficó para buscar la curva de mejor ajuste.

> [16] E5: Si fueran datos sólo de una fuente, muy probablemente sí ajustaría la exponencial.

Para el modelo final, E5 mencionó haber hecho regresión cuadrática (cuadro 6). Al evaluar resultados, encontró coincidencias con la aseveración de Greenpeace.

CUADRO 5. *Modelo final construido por el estudiante E5, consensuado por los estudiantes E3 y E4*

Carta de Ayuda a Yuri

Querida Yuri, espero se encuentre bien, he revisado la información que recopiló y he planteado algunas cosas que quizá puedan ayudarla a resolver las dudas que se plantea. Aunque teniendo en cuenta que el documento está escrito en agosto del 2017, quizá las respuestas no sean tan "inmediatas" como se quisiera.

Trataré de ser explícito en el procedimiento que he seguido. Recopilé y organicé la información relacionada a las cantidades de cultivo "aproximadas" en los años mencionados, se presenta dicha información en la siguiente tabla:

Año	Hectáreas en la Meseta (Pino, Pino-Encino y Encino)
1976	34606
1991	41957
1993	39849
2000	55627
2006	67181
2014	147744

Con ésta, utilicé el paquete ofimático Excel, para realizar un gráfico y determinar una línea de tendencia (polinomial) con el fin de encontrar una fórmula que describiera aproximadamente el comportamiento del cultivo en función de los años.

La ecuación que describe aproximadamente el comportamiento es

$$y = 132.3602006x^2 - 525492.5004x + 521601161.1$$

donde y es la cantidad de hectáreas de cultivo y x es el año.

Además, usted recopiló que La Meseta de Purépecha tiene una extensión territorial total de 381357 ha, con la función descrita y este dato, podemos hacer los cálculos necesarios para aproximar las respuestas a sus preguntas. El orden que usted las plantea:

¿Cuánto bosque existió en 1976?, en el año 1976, basados en la función descrita, el cultivo de aguacate tendría una extensión territorial de 38442.93 ha aproximadamente, con lo cual, el bosque tendría en ese momento aproximadamente 342914.07 ha.

¿Cuánto bosque existió en 2005?, de igual manera, basados en la función, en 2005 tendríamos aproximadamente 80013.22 ha de cultivo de aguacate, por ende, sólo 301343.78 ha de bosque.

¿Cuánto bosque existe actualmente?, como lo mencionaba antes, quizá para esta fecha no resulten útiles las respuestas que le dé, pues ha pasado casi un año desde su nota. Sin embargo, la función planteada, en 2018, prevé una cantidad aproximada de 170916.84 ha de cultivo de aguacate, con lo cual quedarían unas 210440.16 ha de bosque aproximadamente.

¿Cuánto bosque existirá dentro de 10 años? Tomando en cuenta que su pregunta se hizo en 2017, para 2027 tendremos un aproximado de 260057.44 ha de cultivo de aguacate, por ende, habrá un aproximado de 121299.54 ha de bosques.

¿Cuándo dejará la Meseta Purépecha de tener bosques? Según la función, en aproximadamente 2036, el cultivo de aguacate tendría la extensión total del bosque de La Meseta de Purépecha.

Quizá no sean noticias muy alentadoras, pero cabe aclarar que no hay "tantas" lecturas de hectáreas en los distintos años como para predecir con exactitud lo que ocurrirá ni cuando, sin embargo, la tendencia de aumento se mantiene y se intensifica con los años.

Análisis de principios de diseño de las actividades provocadoras de modelos:

Efectivamente, la actividad cumple con los 6 principios considerados, pues provoca la construcción de modelos que permitan describir, explicar y predecir el comportamiento del

[17] E5: Me daba que en el 2036; o sea, coincidiendo con lo que dice Greenpeace, en poco más de 30 años, decían ellos que se iba a acabar [el bosque].

Observaciones. Este estudiante, al explicar su proceso de solución de la MEA durante la discusión grupal, no sólo describió la situación apoyándose en su conocimiento matemático, sino que exhibió dominio del mismo, lo cual le permitió evaluar cuál era el más pertinente para obtener una descripción. Mostró fluidez representacional, aspectos importantes de acuerdo con Lesh y Doerr (2003), como parte del conocimiento matemático que deben poseer los estudiantes. Asimismo, compartió con el resto de sus compañeros ese conocimiento, influyendo significativamente en el desarrollo de sus sistemas conceptuales.

Observaciones generales a los modelos construidos

Los resultados anteriores dejan ver que la MEA deforestación permitió a los estudiantes incluir procedimientos aritméticos, gráficos y algebraicos como parte de sus modelos. Discutirlos en equipo y en la sesión grupal los condujo a reflexionar sobre su propio conocimiento matemático y sus habilidades para utilizarlo. También se observaron creencias, como no ser capaces de proponer un modelo —debido a la forma como se les enseñó las matemáticas en el aula— pero ser conscientes de su potencial.

Los estudiantes revelaron que efectivamente no sólo se involucraron de manera lógica matemática sino que involucraron sentimientos, valores, creencias y disposiciones. Este sistema conceptual estuvo en constante cambio, modificación y refinamiento en la medida en que reflexionaron e, interactuaron entre sí y al resolver el problema; es decir, resolver la MEA les permitió aprender matemáticas como se concibe en la MMP (Lesh, 2010; Lesh y Doerr, 2003). Algunos aspectos, observados en la evolución del aprendizaje (ciclos de modelación), que pueden subrayarse, además de los ya mencionados, son los siguientes:

Hubo reinterpretación de modelos construidos por todos los estudiantes. Por ejemplo, E3 y E4 modificaron sus ideas iniciales e identificaron que su modelo se podía caracterizar como lineal, además de que determinaron posteriormente que el modelo cuadrático describía y predecía mejor el fenómeno de deforestación. E2 y E5 reportaron haber autoevaluado su propio modelo y esa autoevaluación les permitió modificarlo y, por lo tanto, hubo al menos un nuevo ciclo de modelación (en términos de Lesh y Doerr, 2003).

Se observó la necesidad de utilizar diversidad de representaciones. E3 y E4 mencionaron que les faltó el uso de diversidad de representaciones. Su interés se centró en buscar respuestas [8], pero ahora entendían por qué debían utilizar diversidad de representaciones. E1 y E2 usaron representaciones tabulares y gráficas (cuadros 4 y 5), además de lenguaje escrito, mientras que E5 utilizó, además de las representaciones tabulares y gráficas, las algebraicas (cuadro 6). Para estos últimos estudiantes las herramientas tecnológicas (GeoGebra y Excel) fueron un recurso que les facilitó la construcción de los medios representacionales.

Se describió qué es modelar y cómo hacerlo. En las intervenciones de E1 y E2 se observan conversaciones al respecto: [9] y [14]. Una intervención más de E2 da muestra de lo anterior.

> [18] E2: Donde dices que estabas perdida [refiriéndose a E2] en el problema, en realidad estabas ocupada en el problema; estabas tratando de encontrar una solución […] Eso es parte de lo que es el proceso de modelación.

Se reconoció que los modelos se construyen, modifican y refinan. Los estudiantes se dieron cuenta de que la experiencia matemática y el conocimiento que cada uno tenía fue fundamental para construir modelos. Ellos lo reportaron al mencionar qué conocimiento tenían, por qué decidieron utilizarlo y por qué decidieron cambiar algunas de sus ideas iniciales.

Se mostró sensibilidad hacia la situación problema. Los estudiantes mostraron empatía y sensibilidad ante el problema, reconociendo que la situación planteada debía cambiar, porque de lo contrario afectaba al ecosistema, en particular a la Meseta Purépecha.

> [19] E5: Eso es delicado [refiriéndose al problema y a la posibilidad de perder el bosque] porque México no es que cuente con muchas reservas de bosque.

Conclusiones

Esta actividad (MEA) permitió a los estudiantes construir modelos lineales, cuadráticos y exponenciales. La discusión en equipo y en grupo de los modelos construidos y de los ciclos de modelación desarrollados al resolver la MEA les permitió reflexionar sobre conocimiento matemático, manejo de información, estimación, sistematización y creencias, hacia las matemáticas y hacia la modelación. Tuvieron la oportunidad de profundizar en conceptos como función, ecuación, variación e incógnita, y de relacionarlos entre sí. La tecnología, por su facilidad para elaborar modelos e incluir varias representaciones, les permitió utilizar diferentes representaciones. Reflexionaron sobre la importancia de profundizar en su conocimiento sobre modelos, utilizar varias representaciones, desarrollar fluidez representacional y, consecuentemente, habilidades de modelación. Consideramos, por lo tanto, que las MEA pueden ser excelentes propuestas de aprendizaje de matemáticas porque no sólo permiten el desarrollo y la profundización de conocimiento y creencias por parte de los estudiantes, sino también la autoevaluación constante y el desarrollo de habilidades matemáticas.

Referencias

Aliprantis, C. D., y Carmona, G. (2003). Introduction to an economic problem: a models and modeling perspective. En R. Lesh y H. M. Doerr (eds.), *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 255-264). Lawrence Erlbaum Associates.

Doerr, H. M. (2016). Designing sequences of model development tasks. En C. R. Hirsch y A. R. McDuffie (eds.), *Annual perspectives in mathematics education 2016: mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 197-205). National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, *1*(2), 16-48.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., y Zawojeswski, J. S. (2003). Model development sequences. En R. Lesh y H. M. Doerr (eds.), *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 35-58). Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., y Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. E. Kelly (ed.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 35-44). Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Yoon, C., y Zawojewski, J. S. (2007). John Dewey revisited: making mathematics practical versus making practice mathematical. En R. A. Lesh, E. Hamilton y J. J. Kaput (eds.), *Foundations for the future in mathematics education* (pp. 315-348). Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism. Models and Modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 3-34). Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. y Kelly, A. E. (2000). Multitiered teaching experiments. En A. E. Kelly (ed.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 197-230). Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., y Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind in which development involves several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 205-226, en https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_7

Vargas-Alejo, V., y Cristóbal-Escalante, C. (2019). Entendimiento de postulados básicos de la perspectiva de modelos y modelación por profesores en formación. En S. Quiroz, E. Nuñez, M. Saboya y J. Soto, (eds.), *Investigaciones teórico prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico* (pp. 75-96). Amiutem.

Vargas-Alejo, V., Reyes-Rodríguez, A., y Cristóbal-Escalante, C. (2018). La deforestación como consecuencia del incremento de áreas de cultivo: actividad provocadora de modelos. *Épsilon, Revista de Educación Matemática, 99*, 7-28.

Sevinc, S. (2021). Toward a reconceptualization of model development from models-and-modeling perspective in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 1-28, en https://doi.org/10.1007/s10649-021-10096-3.

Sevinc, S., y Lesh, R. (2021). Preservice mathematics teachers' conceptions of mathematically rich and contextually realistic problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-29, en https://doi.org/10.1007/s10857-021-09512-5.

Sriraman, B., y Lesh, R. A. (2006). Modeling conceptions revisited. *ZDM*, *38*(3), 247-254.

Zawojewski, J. S., Lesh, R., y English, L. (2003). A models and modeling perspective on the role of small group learning activities. En R. Lesh y H. Doerr (eds.), *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 337-358). Lawrence Erlbaum Associates.

3. El proceso inquisitivo como un elemento central en la resolución de problemas: una tarea sobre cuadriláteros

Marcos Campos Nava[1]
Agustín Alfredo Torres Rodríguez[2]

Resumen

Se presentan resultados preliminares de la implementación de una tarea de aprendizaje en el contexto de la geometría, particularmente en el tópico de los cuadriláteros. La investigación es un estudio de caso, pues se trabajó con un estudiante de primer semestre de licenciatura de física una universidad pública de México. Los datos recabados son de naturaleza cualitativa y consisten principalmente en diálogos entre el profesor y el estudiante. Por motivos de la contingencia sanitaria actual, la actividad se llevó de manera virtual y sincrónica, por medio de una plataforma de videoconferencia que hizo posible grabar la sesión de trabajo. En el análisis de los datos se da especial énfasis al *proceso inquisitivo* que detonó el profesor por medio de preguntas, como uno de los principales elementos de la estrategia didáctica de la resolución de problemas, y que nos permitió identificar procesos de *aprendizaje con entendimiento.*

Palabras clave: *resolución de problemas, proceso inquisitivo, tareas de aprendizaje matemático, cuadriláteros.*

Introducción

[1] Doctor en ciencias en física educativa, y profesor investigador del Área Académica de Matemáticas y Física de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo y coordinador de la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7534-3193

[2] Doctor en ciencias de la Educación. Profesor del Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Atitalaquia, Jefe del Departamento de Desarrollo Académico. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9112-3070

Existe consenso entre la comunidad de educadores, investigadores y profesores de matemáticas sobre la importancia de privilegiar el *entendimiento versus* la *memorización* en las clases de matemáticas (Barrera *et al.*, 2021; Barrera y Reyes, 2014). Según estos autores, el entendimiento se considera fundamental en los procesos de aprendizaje, ya que al entender una idea ésta se puede usar y adaptar para resolver problemas, y para abordar otros conceptos y otros métodos. Barrera y Reyes (2014) definen el *aprendizaje con entendimiento* como aquel que permite comprender y profundizar en los conceptos, ideas y procesos centrales, además de identificar las relaciones entre estos elementos. Y refiriéndose al término *entendimiento*, parten de la definición de Hiebert *et al.* (2000), quienes lo considera cuando una *cosa* se relaciona o se conecta con otra ya conocida previamente. Es importante añadir que relaciones tienen que ser estructuradas, lo que significa que esas deben permitir profundizar en dichas ideas o conceptos. Estas ideas son acordes con la concepción de las matemáticas como una disciplina donde lo relevante consiste en comprender ideas, conceptos y procesos, así como la forma en que se relacionan entre sí.

Un posible medio para tratar de lograr lo anterior es el planteamiento de tareas de aprendizaje matemático (en adelante usaremos el acrónimo TAM, [Campos y Torres, 2018; 2017]. Las TAM se definen como el medio a través del cual el profesor puede organizar los tópicos a abordar en clase. Stein, Remillard y Smith (2007) consideran que la instrucción puede organizarse alrededor de estas tareas, en las que se determina qué y cómo aprende el estudiante. Adicionalmente, estas tareas pueden estructurarse con base en la aproximación didáctica denominada *resolución de problemas,* originalmente planteada por Polya en 1945 y revisitada por Schoenfeld (1985).

De acuerdo con autores como Santos-Trigo (2007) o Torres *et al.* (2022), cuando se utiliza un enfoque de enseñanza basado en la resolución de problemas, un elemento de especial interés es el proceso inquisitivo en el que los aprendices se vean involucrados, a través de las preguntas que les realiza el instructor, para, entre otras cosas, mantener un nivel adecuado de *demanda cognitiva* (Smith y Stein, 1998) durante el desarrollo de la actividad.

Este término, *demanda cognitiva*, se refiere al grado en que una actividad pone en juego un conjunto de características que pueden favorecer los procesos de comprensión o *aprendizaje con entendimiento*. Este modelo teórico fue propuesto en 1998 por las investigadoras Stein y Smith y consiste en una escala para valorar la complejidad del razonamiento requerido para resolver problemas. En términos generales, se considera que una actividad o tarea de aprendizaje con *alta demanda cognitiva* debe considerar los siguientes elementos: favorecer la creación de conexiones entre distintos conceptos e ideas, proporcionar un tiempo suficiente para su realización y propiciar que los estudiantes realicen preguntas, formulen conjeturas y elaboren explicaciones o justificaciones.

En relación al tema seleccionado para la TAM considerada en esta contribución, los autores tomamos en cuenta dos aspectos principales: en primer lugar, que el tópico de los cuadriláteros articulados se puede introducir en un curso universitario de física, particularmente en el área de la cinemática, y, en segunda instancia, que en este contenido habíamos identificado elementos potenciales para poner en práctica nuestras ideas acerca de las tareas de aprendizaje matemático, basadas en la aproximación de la resolución de problemas, con énfasis en el proceso inquisitivo que puede desarrollar el profesor de matemáticas.

En este sentido, los autores identificamos que el tópico de los cuadriláteros resulta de interés por dos razones que evaluamos a continuación. La primera razón de este interés es de naturaleza puramente matemática (procesos de razonamiento) o incluso del contexto científico (como una representación de fenómenos físicos o mecánicos). En el primer caso, los autores identificamos que una tarea de este tipo puede potenciar los procesos de razonamiento y descubrimiento en los estudiantes. La idea central es que la tarea de aprendizaje contribuya al desarrollo de algunas habilidades y actitudes en los estudiantes que incluyan el desarrollo de estrategias para resolver problemas, así como el fortalecimiento de actitudes inquisitivas, elementos que consideramos fundamentales para el logro de los aprendizajes, además de estar en concordancia con los referentes teórico-metodológicos considerados. La segunda razón se identifica en el hecho de que este contenido se puede relacionar estrechamente con el estudio en los cursos de física, de tópicos relativos a los mecanismos articulados de cuatro barras, cuyo análisis de movimiento es de interés en el estudio de la cinemática, ya que incluye la revisión de aspectos como desplazamiento, rotación, rapidez y aceleración (Olmedo y Echeverría, 2018).

Referentes teóricos

La aproximación didáctica de la resolución de problemas

La aproximación didáctica conocida como *problem solving* (resolución de problemas) propuesta inicialmente por George Polya como un enfoque práctico dirigido a los profesores de matemáticas y posteriormente retomado por Alan Schoenfeld para afianzarlo como una línea de investigación orientada más hacia los educadores matemáticos, considera que los elementos del *pensar matemáticamente* se ven favorecidos en un ambiente de resolución de problemas. Schoenfeld (1985) establece que "Aprender a pensar matemáticamente involucra más que tener una gran cantidad de conocimiento de la materia *al dedillo*. Incluye ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina, usar el conocimiento propio eficientemente, y comprender y aceptar las reglas tácitas de juego. (p. xii)".

Sobre la pregunta: ¿qué son las matemáticas? De hecho estamos de acuerdo con la idea de que las matemáticas son la *ciencia de los patrones* (Steen, 1988, 1998), y con la perspectiva de Halmos (1980), de que *el corazón de las matemáticas son los problemas,* si los profesores están de acuerdo con eso, probablemente busquen proponer actividades enfocadas a desarrollar en sus alumnos el reconocimiento de patrones, y esas actividades estarán enfocadas a través de la resolución de problemas.

Estas características asociadas al enfoque de resolución de problemas se relacionan con la forma en que se conceptualiza a las matemáticas. En este sentido, Schoenfeld reconoce que las matemáticas son la ciencia de los patrones: "Las matemáticas revelan patrones escondidos que ayudan a comprender el mundo que nos rodea […] El proceso de 'hacer' matemáticas es más que cálculos y deducciones; involucra la observación de patrones, la prueba de conjeturas, la estimación de resultados (Schoenfeld, 1992, p. 343).

Aprendizaje con entendimiento

En este sentido, de qué significa entender en matemáticas, autores como Carpenter y otros (1994) definen la *comprensión* en términos de las *conexiones* entre lo que ya se conoce y lo nuevo por aprender que una persona puede hacer; pero muchas conexiones no significan necesariamente comprensión, porque "las conexiones particulares entre constructos pueden de hecho representar conceptos erróneos, mientras que la verdadera comprensión de un constructo particular puede requerir que el conocimiento esté conectado de maneras muy específicas" (Carpenter *et al.,* 1994, p. 3).

Además, Hiebert *et al.* (2000) definen la *comprensión* en términos de acciones o procesos que una persona es capaz de realizar: "Entendemos algo si vemos cómo está relacionado o conectado con otras cosas que sabemos" (p. 4).

Otro tema importante relacionado con la comprensión en matemáticas son los *diferentes significados* que los estudiantes pueden dar a algún *concepto matemático.*

Carpenter *et al.,* (1994) afirman que es posible dar una comprensión profunda a través de *diferentes formas de representación,* porque "se pueden construir conexiones entre las diferentes formas de representación (física, pictórica, simbólica, hablada y escrita) y dentro de una forma de representación particular"(p. 4).

En este sentido, autores como Stein, Remillard y Smith (2007) consideran que el tipo de *conocimiento* desarrollado en la clase de matemáticas está íntimamente relacionado con el *tipo de tarea elegida por los profesores* para trabajar con sus alumnos; por lo tanto, las creencias de los profesores sobre ¿qué son las matemáticas, qué significa aprender matemáticas y el tipo de tarea de aprendizaje matemático introducido en clase, son elementos importantes para definir las formas de *conocimiento* que promueven.

Las acciones del profesor: el proceso inquisitivo

Cuando se plantean tareas de instrucción con un enfoque de resolución de problemas que busquen desarrollar entendimiento, el rol del profesor es fundamental, tal como señalan Barrera *et al.* (2021) y Barrera y Reyes (2014). El papel del profesor empieza desde diseña de un ambiente propicio para el aprendizaje, conocer cómo piensan sus estudiantes, identificar diferentes formas o estilos de aprendizaje y, desde luego, diseñar o adecuar una tarea de aprendizaje, que se definen como tareas que permiten al estudiante discutir acerca de ideas matemáticas importantes y comunicar los resultados de estas reflexiones.

Pero no basta solamente con elegir o diseñar la tarea, sino también resultan relevantes el tipo y las características de las acciones que el profesor realiza durante su implementación, en este orden de ideas, Hiebert (2000) propone, entre las dimensiones del aprendizaje con entendimiento, el papel del profesor (véase figura 1).

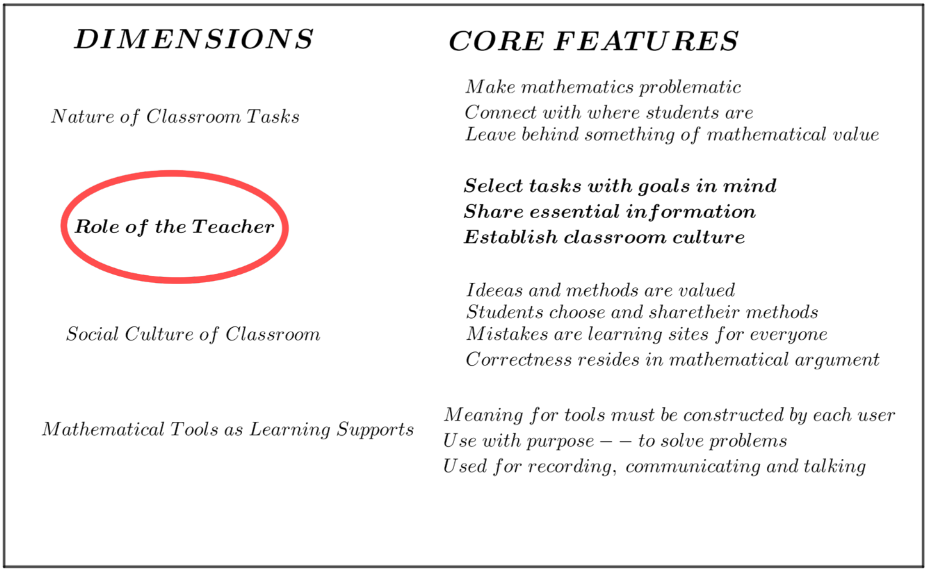
Dentro de esa dimensión, el autor considera como características centrales del rol del profesor las siguientes: en primer lugar la selección de tareas tomando en cuenta el propósito de las mismas; en segundo lugar, proporcionar al estudiante la información esencial que le permita resolverla, y en tercer lugar, crear un ambiente o una cultura propicios dentro del aula que promueva el desarrollo del proceso de resolución.

Los autores de esta propuesta, consideramos adicionalmente que, dentro de este rol del docente, reviste importancia el conjunto de acciones relativas a la forma de guiar las acciones desarrolladas durante la TAM, principalmente el proceso inquisitivo (Campos y Torres 2018, 2017).

Consideramos que una de las funciones más relevantes durante la implementación de tareas de aprendizaje con este enfoque es precisamente ese *proceso inquisitivo* que el profesor desarrolla con sus estudiantes.

¿Cómo ocurre este proceso? No existen fórmulas infalibles que aseguren resultados óptimos de este proceder; sin embargo, creemos que son de utilidad las siguientes consideraciones: el profesor deberá elaborar una serie de preguntas que vayan guiando la actividad y decidir el momento en que las deberá presentar en el escenario elegido; lo anterior con la finali-

FIGURA 1. *Dimensiones del aprendizaje con entendimiento, según Hiebert* et al. *(2000)*



dad de conducir a los estudiantes al desarrollo de competencias matemáticas de interés, tales como la argumentación, la justificación, la generalización, la elaboración de conjeturas y la comunicación de resultados.

Este proceso, además, debe permitir extender la actividad en el sentido de poder proponer, a partir del enunciado original, otras actividades que pudieran complementar el logro de las competencias buscadas. Este *proceso inquisitivo* puede permitir que una tarea o una actividad de aprendizaje matemática pueda alcanzar distintos niveles de *demanda cognitiva* (Campos y Torres, 2018, 2017).

El empleo de herramientas digitales en la enseñanza

Diversas investigaciones han identificado el importante rol que pueden jugar las herramientas digitales en la enseñanza de la matemática, dado su carácter de mediadores instrumentales entre el aprendiz y el objeto de estudio (Santos-Trigo, 2020; Moreno-Armella, 2014). En este sentido, autores como Hillmayr *et al.* (2020) consideran que dichas herramientas digitales promueven formas de pensar y aprender distintas, en contraste con el empleo de lápiz y papel.

Aunque la integración de las tecnologías digitales conlleva un gran potencial para *l*a enseñanza y el aprendizaje, incluye algunos factores que pueden resultar decisivos en el trabajo matemático que se desarrolla en el aula. Se considera que los factores más importantes que pueden llevar al éxito o al fracaso en la implementación de una tarea de aprendizaje en el aula, van desde el diseño de la herramienta digital, el potencial pedagógico desarrollado dentro de la tarea, hasta el rol del profesor y el contexto de la actividad (Drijvers, 2013). De este modo, es importante identificar y caracterizar los factores decisivos para que la implementación de una tarea de aprendizaje funcione o no funcione adecuadamente. De lo anterior se reconoce que uno de los factores fundamentales para que una tecnología digital funcione o no se relaciona estrechamente con las prácticas y las experiencias de los profesores, lo que desde luego incluye sus acciones durante la implementación de esas tareas en el aula.

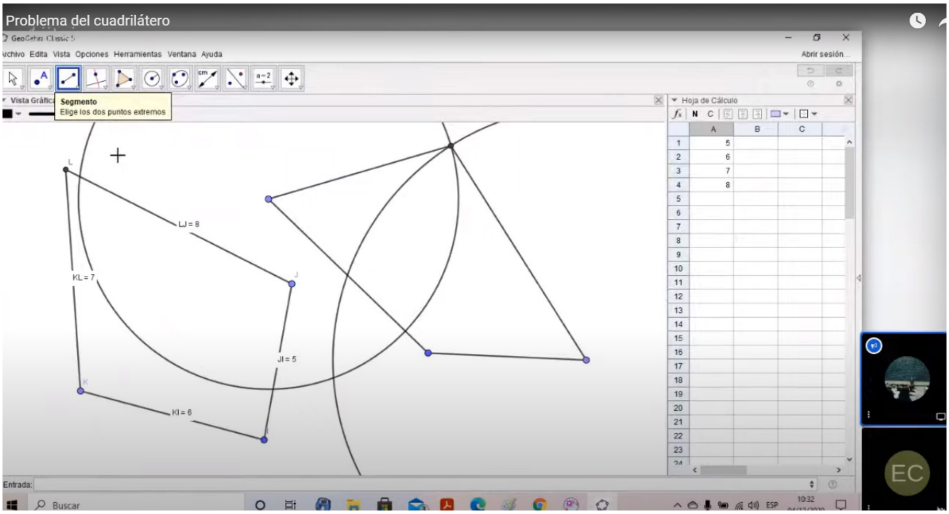
Metodología

La investigación realizada tuvo como propósito analizar si el proceso inquisitivo establecido por un profesor al plantear una tarea de aprendizaje sobre cuadriláteros permitió que el estudiante desarrollara algunas de las competencias mencionadas.

El profesor propuso la actividad al estudiante por medio de la plataforma *jitsi meet*; además fomentó el uso de GeoGebra como una forma de verificar posibles conjeturas o simplemente para explorar ciertas ideas que fueran surgiendo durante la implementación. El enunciado de la tarea consistió en solicitar al estudiante que tratara de establecer un criterio similar a la conocida *desigualdad del triángulo*, pero en este caso para cuadriláteros.

Sin embargo, no sólo para saber si dados cuatro segmentos era posible construir un cuadrilátero, sino que se buscaba, además, que, sin importar la configuración de los cuatro lados, es decir, el orden en que se conecten,

FIGURA 2. *Vista de una construcción en GeoGebra de la propuesta implementada*



pudieran estar siempre conectados, incluso si éstos tuvieran que cruzarse (véase figura 2).

La sesión se videograbó y se realizó su transcripción para posteriormente analizar el proceso inquisitivo efectuado por el profesor y cómo condujo al estudiante al logro de las competencias deseadas.

Para el análisis de la implementación de la actividad durante la sesión estudiada se consideró a la clase entera como un "gran episodio", según la clasificación de Schoenfeld (2000), retomada por Fernández *et al.* (2018). Con base en este tipo de análisis, se propone identificar subepisodios. Un subepisodio viene representando entonces un momento o un conjunto de reacciones encadenadas que tienen un propósito específico (Fernández *et al.,* 2018). Con base en este esquema de análisis, identificamos los fragmentos de transcripción de la grabación con subepisodios específicos, tomando en cuenta, además, el elemento inquisitivo de nuestro interés.

Es importante indicar que este elemento inquisitivo tiene estrecha relación con una de las dimensiones o factores enlistados por Schoenfeld (1992) en su modelo de resolución de problemas: las heurísticas, entendidas como los recursos de búsqueda que incluyen identificar nexos, relaciones, así como casos, y explorar rutas distintas (Día y Díaz, 2018). Las res-tantes dimensiones antes mencionadas son: conocimientos específicos, control, prácticas y, finalmente, creencias y afectos.

Consideramos asimismo que este proceso inquisitivo, como parte del enfoque de resolución de problemas, permite al aprendiz identificar y analizar la información clave dentro del problema que se está resolviendo (Santos-Trigo, Barrera y Camacho, 2021).

Análisis de resultados

A continuación se presentan algunos fragmentos de la transcripción realizada a partir de la grabación de la sesión. Estos fragmentos, tal como lo mencionamos en la metodología, corresponden a subepisodios o momentos clave de la sesión, considerados de esa manera en virtud de su aporte a la comprensión del desarrollo de la sesión.

En la primera parte de la sesión, el profesor introdujo la noción de la *desigualdad del triángulo* como un antecedente para posteriormente plantear la construcción del cuadrilátero y de esa forma detonar la actividad con las preguntas iniciales:

Profesor*: Considerando lo visto acerca de la desigualdad del triángulo, ¿cómo debiera ser un criterio para el caso de los cuadriláteros?, ¿se puede proporcionar un criterio análogo?, ¿cómo se transita de un caso a otro?*

Ante estas preguntas, el estudiante inició realizando los primeros intentos por resolver estas cuestiones, en tanto el docente le proporcionó algunos minutos para que desarrollara sus primeros procedimientos.

Este tipo de preguntas que se formulan al inicio de la sesión contienen el planteamiento del problema a resolver y tienen el propósito de detonar las acciones iniciales del estudiante. Puede clasificarse como un tipo de preguntas cuya finalidad es el establecimiento de la comunicación (según la tipología de preguntas de Benoit [2020]; (véase el cuadro del apéndice A). Este tipo de preguntas promueve habilidades cognitivo-lingüísticas como describir, explicar y justificar.

Estudiante *(después de realizados algunos intentos): ¿Tengo que encontrar un criterio similar al de los triángulos?*

Profesor: *¿qué criterio podría yo encontrar o proponer […] para decidir si cuatro segmentos de recta pueden ser los lados de un cuadrilátero o no?*

Con esta nueva pregunta, el docente intenta reafirmar la interrogante central planteada inicialmente, esto es, tiene la finalidad de verificar la información (Benoit, 2020).

Según esa autora, dependiendo del momento de la clase, el cuestionamiento proporciona la "posibilidad de que el estudiante haga uso de su sistema cognitivo para poner en juego una serie de estrategias para el aprendizaje […] al inicio de la sesión el profesor invita a proyectar la información a la generación de hipótesis" (p. 102).

En otro momento de la sesión el estudiante comienza a plantear casos particulares y se detiene en uno en el que utiliza las medidas de los lados: 5, 6, 7 y 8 unidades, corroborando que en este caso el cuadrilátero se forma correctamente y además mantiene su configuración.

Estudiante: *¿si son números enteros consecutivos los lados del cuadrilátero, éste siempre existe?*

Profesor: *"Este es el cuadrilátero de lados 5, 6, 7 y 8, y al construirlo se ve que existe, y que al manipularlo se aprecia que siempre se forma; entonces esa observación que tú haces de que si son números enteros consecutivos, el cuadrilátero siempre existe, ¿tiene sentido? Ahora yo te diría: ¿este resultado puede generalizarse?*

Esta pregunta da paso a que el estudiante ensaye con otros conjuntos de números que tienen la condición de ser enteros consecutivos. Yang (2017) identifica que la estimulación hacia el descubrimiento de nuevos aprendizajes requiere una retroalimentación por parte del docente, tanto en los momentos en que el profesor formula preguntas, como cuando responde a las del aprendiz.

En el siguiente fragmento de transcripción en particular, que siguió al subepisodio previo, se puede observar que tras una propuesta por el estudiante (si los lados del cuadrilátero son números enteros consecutivos, éste siempre se puede construir), el profesor lo empieza a guiar por medio de nuevas preguntas para tratar de obtener un criterio más general.

Profesor: *Siempre existe, exactamente. Por eso parece que tiene cierto sentido eso que tú propusiste: lados como números enteros consecutivos, parece que siempre va a haber cuadrilátero; tiene sentido…*

Estudiante: *pero debería ser más general, ¿no?... Será que tenga que ver con que un número sea más grande que otro, es decir, con el valor absoluto*

Como puede apreciarse en este fragmento previo, el estudiante conjetura acerca de si la existencia y la movilidad del cuadrilátero está garantizada porque las longitudes de los lados son números enteros consecutivos.

El profesor identifica la oportunidad de que el explore otras posibilidades, proporcionando la pauta para que el recorra otras rutas de indagación, lo que induce realizando nuevas preguntas que guían la secuencia de reflexiones y acciones del alumno:

Profesor: *Los lados se conectaron en orden consecutivo, de menor a mayor, siguiendo un orden, es decir, primero el lado de 5, luego el de 6, luego el de 7 y al último el de 8. ¿Qué sucede si conectamos los lados en orden diferente?, ¿se sigue formando un cuadrilátero?*

En este caso se identifica que la pregunta tiene el propósito de verificar la información, así como de propiciar nuevos aprendizajes (véase cuadro del apéndice A), lo que puede detonar procesos y habilidades de tipo definir, describir, explicar y argumentar (Benoit, 2020).

En un subepisodio posterior, el docente plantea una nueva interrogante que puede identificarse del tipo de reflexión y nuevos aprendizajes:

Profesor: *Puede ser… pero fíjate lo que acabas de proponer. Tiene que ver con que un número sea mayor que otro. ¿Sabes, por ejemplo, qué caso no se ha contemplado?, ¿qué pasa si, por ejemplo, tres lados son iguales y sólo el cuarto es diferente, o qué pasa si dos lados son iguales, pero diferentes a los otros dos, pero que también son iguales entre sí?*

Estudiante**:** *Ajá…*

Con esta intervención, el docente estimula al estudiante para que analice más casos particulares y asegura que la actividad tenga continuidad. En la literatura de la resolución de problemas, estas ideas se identifican como el *análisis de casos particulares* (Díaz y Díaz, 2018), y la *extensión del problema,* respectivamente (Jaime, Gutiérrez y Benedicto, 2018).

El *análisis de casos particulares* permite al estudiante (resolutor) el desglose detallado de las distintas relaciones o conexiones presentes para una configuración particular del problema, que aunque no se cumplan para otras le brinda ideas para continuar con el análisis de nuevos casos (Díaz y Díaz, 2018). Por su parte, la *extensión de un problema* se refiere a un conjunto de estrategias que permiten prolongar la duración de la TAM, con base en algunas acciones como introducir nuevos conceptos, inducir nuevas discusiones, modificar algún dato, plantear una nueva dificultad o un reto, entre otras (Jaime *et al.,* 2018).

Adicionalmente, en su estudio de casos Fernández *et al.* (2018) identifican en este tipo de subepisodios una interacción en la que tanto la sustancia de la pregunta como la dirección vienen del profesor, lo que depende de su propia capacidad para hilvanar las respuestas que proporciona el alumno con las siguientes preguntas que le plantea:

Profesor: *¿O qué pasaría si los cuatro lados fuera iguales?*
Estudiante: *Iguales…sí, pues como en un cuadrado…*
Profesor: *Exacto, como en un cuadrado. Queda claro que un cuadrado es un cuadrilátero y que sus cuatro lados son iguales… ¿Será que sólo los cuadrados son cuadriláteros con lados iguales?*

En este otro fragmento se hace evidente lo que Fernández *et al.,* (2018) señalan: la necesidad de que el profesor provoque activar la memoria del estudiante para rescatar conceptos previos, procedimientos e, incluso, actitudes que le permitan ir avanzando en la resolución del problema. Santos-Trigo (2008) señala al respecto que la comprensión o el desarrollo de ideas matemáticas conllevan un proceso de reflexión, en el que el estudiante afina o transforma sus ideas y sus formas de pensar, como resultado de participar en una comunidad de práctica o aprendizaje.

En el contexto de la resolución de problemas, lo anterior significa que la TAM debe proveer las características que permitan al estudiante ir desarrollando sus recursos y sus estrategias y hacer uso de herramientas para sortear las dificultades iniciales cuando se comienza a resolver un problema (Santos-Trigo, 2008).

Para finalizar este análisis de los resultados obtenidos es necesario señalar que el objetivo propuesto por la tarea presentada al estudiante no se cumplió a cabalidad, ya que se trataba de encontrar un criterio similar a la desigualdad del triángulo. Pese a ello, los autores consideramos que el empleo del proceso inquisitivo por parte del instructor permitió que se hicieran presentes algunas características que favorecen el desarrollo del pensamiento matemático: el análisis de casos particulares, el planteamiento y la prueba de conjeturas, el seguimiento de distintas heurísticas con la guía del docente, la comunicación de resultados, entre otras.

Los resultados preliminares obtenidos pueden servir como base para volver a trabajar sobre esta propuesta de TAM y, en particular, para realizar un análisis y una reelaboración de las preguntas a realizar por el instructor de la actividad, con la finalidad de acompañar en forma más eficaz al resolutor y promover el cumplimiento del objetivo, el cual consiste en deducir un criterio general que pueda aplicarse al caso de los cuadriláteros, en forma análoga al caso triangular.

Conclusiones

Al haber analizado la implementación de la actividad consideramos que el proceso inquisitivo realizado por el profesor constituye una de los factores clave no sólo para mantener el interés del estudiante, sino para fomentar que explore distintas rutas y formule algunas conjeturas, coadyuvando con ello a mantener un nivel de demanda cognitiva aceptable.

En este punto es necesario aclarar que desde la perspectiva de la resolución de problemas, la meta no es simplemente hallar una respuesta, ya no digamos la respuesta correcta, sino que el estudiante logre identificar, contrastar y explorar distintas rutas de solución, además de fomentar otras habilidades, como formular conjeturas o comunicar resultados (Santos-Trigo, 2008).

El proceso inquisitivo desarrollado por el profesor resultó importante, como se detalla a continuación: se identificó que el estudiante se comportaba de manera pasiva durante varios episodios de la implementación de la tarea, se quedaba callado o no hacía propuestas relevantes. Sólo por medio del proceso inquisitivo efectuado por el profesor la tarea de instrucción pudo avanzar, y si bien no se concluyó satisfactoriamente, se logró que el estudiante identificara algunos patrones (como el de los lados siendo enteros consecutivos), propuso una alternativa de desigualdad para cuadriláteros y, en general, aventuró conjeturas aunque no concretó en la generalización.

En lo que respecta al empleo de una herramienta digital, en este caso GeoGebra, como elemento central de la tarea implementada, es relevante señalar que su uso facilitó la exploración de las distintas estrategias, así como el análisis de algunos casos particulares. En la literatura se reporta que el empleo de este tipo de herramientas tiene el potencial de extender el repertorio de heurísticas empleadas (Santos-Trigo, 2007). En particular, un sistema de geometría dinámico como GeoGebra contribuye a que emerjan nuevas rutas de representación, de exploración y de discusión (Santos-Trigo *et al.*, 2021).

Asimismo se ha identificado que la incorporación pertinente de herramientas digitales en el diseño de una TAM, en combinación con el elemento inquisitivo desplegado por el docente, permite transformar una actividad, en apariencia sencilla, en una actividad más robusta (o lo que también se denomina en la literatura una tarea enriquecida (Jaime *et al.*, 2018), atendiendo al propósito señalado con anterioridad: contribuir a alcanzar un *aprendizaje con entendimiento*, fortaleciendo simultáneamente el desarrollo de los procesos de reflexión y del *pensar matemáticamente*.

Referencias

Barrera, F., y Reyes, A. (2014). Sobre el aprendizaje con entendimiento en matemáticas. *Boletín Científico Pädi*, 2(3), consultada en https://www.uaeh.edu.mx/scige/boletin/icbi/n3/e2.html.

Barrera, F., Reyes, A., Campos, M., y Rodríguez, C. (2021). Resolución de problemas en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. *Boletín Científico Pâdi*, 9 (especial), 10-17, en https://doi-org/10.29057/icbi.v9iEspecial.7051.

Benoit, C. G. (2020). La formulación de preguntas como estrategia didáctica para motivar la reflexión en el aula. *Cuadernos de Investigación Educativa*, 11 (2), 95-115, en DOI: 10.18861/cied.2020.11.2.2994.

Campos-Nava, M., y Torres-Rodríguez, A. (2018). Diseño de tareas de aprendizaje matemático con GeoGebra: mecanismos articulados. *Boletín Científico Pädi*, 10, 81-86, en DOI: 10.29057/icbi.v5i10.2939.

Campos-Nava, M., y Torres-Rodríguez, A. (2017). Las tareas de aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas a distancia. *Revista Mexicana de Bachillerato a Distancia*. 9 (17), 147-155, en DOI: https://doi.org/10.22201/cuaed.20074751e.2017.17.64975.

Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Oliver, A. y Wearne, D. (1994). *Teaching mathematics for with learning understanding in the primary grades*. National Center Research in Mathematical Sciences Education. Madison: Wisconsin.

Díaz, J. A., y Díaz, R. (2018). Los métodos de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático. *Revista Bolema*, 32 (60), 57-74, en DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a03.

Drijvers, P. (2013). Digital technologies in mathematics education: why it works (or doesn't). *PNA*, 8(1), 1-20.

Fernández, J., Carrillo, J., y Conde, S. M. (2018). Un estudio de caso para analizar cómo ayudan los profesores en resolución de problemas matemáticos. *Educación Matemática*, 30 (3), 247-276, en DOI: 10.24844/EM3003.10.

Hibert, J., Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., Oliver, A. y Human, P. (2000). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth: Heinemann.

Hillmayr, D., Ziernwald, L., Reinhold, F., Hofer, S., y Reiss, K. (2020). The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: a context-specific meta-analysis. *Computers and Education*, 153, 103897, en DOI: 10.1016/j.compedu.2020.103897.

Jaime, A., Gutiérrez, A., y Benedicto, C. (2018). Problemas con extensiones: propuestas para estudiantes con alta capacidad matemática. *Revista Uno de Didáctica de la Matemática*, 79, 7-14.

Moreno-Armella, L. (2014). Educación matemática: del signo al pixel. Ediciones Universidad Distrital Santander, Colombia.

Olmedo, J. F., y Echeverría, J. F. (2018). Máquinas y mecanismos: implementación con Wolfram Mathematica. Ecuador: ESPE Ediciones.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Santos-Trigo, M., Barrera-Mora, F., y Camacho-Machín, M. (2021) Teacher's use of technology affordances to contextualize and dinamically enrich and extend mathematical problem solving strategies. *Mathematics*, 9, 273, en https://doi.org/10.3390/math9080793.

Santos-Trigo, M. (2020). La resolución de problemas matemáticos: conectando el trabajo de Polya con el desarrollo de un razonamiento digital. En Yuri Morales-López y

Ángel Ruiz (eds.), *Educación matemática en las Américas.* Comité Interamericano de Educación Matemática, República Dominicana, pp. 29-40.

Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En *Memorias del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Badajoz, España, septiembre.

——— (2007). *Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain*. *ZDM*, 39, 523-536.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Florida: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En: D. Grows, (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* (pp. 334-370). Nueva York: Macmillan.

——— (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behaviour*, *18*(3), 243-261, en DOI: 10.1016/S0732-3123(99)00031-0.

Smith, M. S., y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematical Teaching in the Middle School*, 3 (5), 344-350.

Stein, M., Remillard, J., y Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. En F. Lester (ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Nueva York: Macmillan.

Torres, A. A., Campos, M., Reyes, A., y Soto, C. A. (2022). Diseño de tareas con tecnología: entre investigación y docencia. *Boletín Científico Pâdi*, 9 (18), 29-34, en DOI: https://doi.org/10.29057/icbi.v9i18.7133.

Yang, H. (2017). A research on the effective questioning strategies in class. *Science Journal of Education*, 5 (4), 158-163, en DOI: http://spgjedu.com/ article/197/10.11648.j.sjedu.20170504.16.

Apéndice A

Tipología de preguntas de acuerdo con su finalidad

Finalidad	***Habilidad cognitiva-lingüística predominante***
Verificación de información	Definir/describir
Fines prácticos	Explicar
Reafirmación de la emotividad	Justificar
Establecimiento de la comunicación	Describir/explicar/justificar
Reflexión	Describir/explicar/justificar/argumentar
Aprendizaje	Definir/describir/explicar/justificar/argumentar

Fuente: Benoit (2020).

4. Reflexiones sobre modelación y covariación desde situaciones de aprendizaje

Marcela Ferrari Escolá[1]
María Esther Magali Méndez Guevara[2]

Reflexionamos en este espacio sobre la experiencia vivida en la octava edición del *T*aller Internacional Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación que cobijó el desarrollo de las actividades que aquí presentamos. En la modalidad de taller en línea nos propusimos que los participantes conocieran, discutieran y vivenciaran dos diseños de aprendizaje sustentados por el entrelace de dos constructos teóricos: uno, la *modelación escolar,* categoría socioepistemología, y otro, la *covariación*, invocada para estudiar el desarrollo del razonamiento covariacional que emerge en el acto de modelar fenómenos logarítmico-exponenciales.

La metodología que organiza esta exploración es la investigación basada en diseño. Reportamos en este escrito la estructura y la intención de dos diseños de aprendizaje desarrollados de forma sincrónica en sendas sesiones con 13 participantes del evento, así como reflexiones sobre las producciones recogidas en los momentos asíncronos vinculados al taller.

Palabras clave: *Modelación escolar; razonamiento covariacional logarítmico exponencial*

[1] Doctora en ciencias con especialidad en matemática educativa (otorgado por Cinvestav), Facultad de Matemáticas, y miembro del núcleo académico básico de la Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas y del Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Guerrero. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8759-4387

[2] Doctora en ciencias con especialidad en matemática educativa (otorgado por Cinvestav), Facultad de Matemáticas, y miembro del núcleo académico básico de la Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. https://orcid.org/0000-0003-0681-9482

Introducción

La noción de *función* es uno de los conceptos más estudiados en matemática educativa. Varias son las posturas y las perspectivas que se han desarrollado para comprender, cognitiva y didácticamente, lo que demanda a estudiantes y profesores apropiarse de este objeto. Evidencias de ello se pueden encontrar, por ejemplo, en el compendio de investigaciones publicadas por Harel y Dubisnky (1992), desafío que se mantiene vigente, generando diferentes acercamientos teóricos y metodológicos. Sin embargo, en este trabajo, nos enfocamos en dos constructos teóricos específicos: la modelación y la covariación, íntimamente relacionados con el estudio de variaciones conjuntas.

Respecto de la modelación en matemática educativa existe una variedad de acepciones teóricas, la pragmática y la científico-humanista de las cuales se han desprendido muchas más, que posicionan a la modelación como un proceso cíclico que ayuda a comprender la matemática, a investigar en la enseñanza de las matemáticas o a construir conocimientos matemáticos. Bastaría revisar los reportes hechos por Trigueros (2006), Arrieta y Díaz (2015), Kaiser (2017) u Oliva (2019) en los que se hace una reflexión sobre las posturas de modelación en las investigaciones en matemática educativa.

Las actividades basadas en estas acepciones atienden diversas aristas de las problemáticas del aula de matemáticas; por una lado, se puede proponer una secuencia didáctica desencadenada desde una situación de referencia extramatemática que provoque cuestionarse sobre conceptos matemáticos y de otras disciplinas para fomentar la aplicación de conceptos matemáticos y su relación con los de otras disciplinas al interpretar o solucionar la situación de referencia planteada (Rodríguez y Quiroz, 2016). También podemos encontrar actividades de modelación que se hacen tácitas en la resolución de una serie de problemas que implican pasar por procesos cíclicos de análisis de resultados, en contraste con los problemas (López, Molina y Castro, 2017), o bien situaciones de aprendizaje que promueven exaltar la naturaleza y la transversalidad del conocimiento matemático en diversos dominios, matemáticos y no matemáticos, con énfasis en las prácticas que se usan para explicar y comunicar mediante la conformación de argumentos que permitan tomar decisiones en una situación particular (Zaldívar y Briceño, 2019).

Por supuesto, esto refleja una variedad de razones y formas de incluir la modelación en la enseñanza de las matemáticas, en tanto se muestra como un proceso que permite la aplicación, la significación o la construcción y el desarrollo de conocimientos matemáticos por parte de quien modela.

Particularmente, la perspectiva de modelación que sustenta el segundo diseño de aprendizaje que se exhibe en este escrito se basa en la teoría socioepistemológica. Desde esta postura sus estudios *modelan la construcción social del conocimiento matemático* (Cantoral, 2013, p. 97); en este sentido, nos interesa poner en juego el proceso de modelación siempre que permita a los estudiantes construir sus conocimientos matemáticos en tanto reconocemos que sus construcciones están cargadas de argumentos socioculturales del contexto en que se construyen y de quien los construye.

En esta génesis de saberes se entrelaza el razonamiento covariacional que da forma y sustenta la descripción de fenómenos. Un ejemplo lo encontramos en Gonzales (2021), quien, tomando el cambio climático como eje central de discusión sobre modelación, evidencia que, a medida que el razonamiento covariacional de los participantes avanza al trabajar en las tareas, también profundizan su análisis de los constructos necesarios para entender y modelar el cambio climático. Una síntesis de la variedad de reportes de investigación que apoyan la afirmación de que el razonamiento covariacional es una base poderosa para la comprensión de diferentes ideas matemáticas puede consultarse en Thompson *et al.,* (2017), en particular sobre funciones específicas.

Así también, la inclusión de la modelación en la matemática escolar, para tratar contenido de funciones específicas, se reconoce potencial porque ayuda a describir cómo una cantidad covaría con respecto a otra; además, en general se reconoce a la modelación como un proceso creativo que da sentido al mundo real al describir, controlar y optimizar aspectos de una situación, interpretar los resultados y hacer modificaciones al modelo propuesto si no son adecuadas a la situación (Kaiser, 2017, p. 268). Como ya se mencionó, en la literatura se pueden encontrar diversas acepciones de modelación y su particularidad puede identificarse en los objetivos que motivan su implementación. Nuestra acepción se acerca al enfoque científico-humanista de Freudental (Kaiser, 2017), en tanto que se concibe a la matemática como una actividad humana y nos cuestionamos por qué la matemática es útil para el estudiante. Consideramos, además, que la matemática adquiere significados en múltiples contextos, mismos que pueden generar escenarios de construcción o desarrollo de saberes matemáticos para los estudiantes

Por otro lado, como constructo teórico, la covariación se incorpora al discurso de los investigadores desde dos posturas diferentes (Jhonson, 2015). Una considerada "estática", propuesta por Confrey (Confrey y Smith, 1994, 1995); la otra "dinámica", presentada en los trabajos de Carlson *et al.*, (2002), Saldhana y Thompson (1998), entre otros. En efecto, Fonger *et al.,* (2020) consideran importante caracterizar y apoyar el aprendizaje significativo de las funciones en el desarrollo del razonamiento covariacional, en particular en las dificultades que presentan los estudiantes para entender funciones no lineales, ya que a menudo generalizan la linealidad de forma inapropiada. Idea que refuerzan Hohensee *et al.* (2021), proponiendo regresar a la reflexión sobre funciones lineales luego de haber tratado las funciones cuadráticas. Evidencian, en sus resultados, que la enseñanza de las funciones cuadráticas impulsa a los estudiantes a niveles más altos de razonamiento covariacional sobre las funciones lineales, aportando así nuevas ideas sobre las características de la transferencia hacia atrás de conocimientos adquiridos. Ideas que extendemos hacia el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial que presentamos en este artículo.

En efecto, varios son los acercamientos a la función exponencial y logarítmica reportados desde distintas perspectivas, donde las relaciones logarítmicas y exponenciales se desarrollaron en el aula con el fomento de la coordinación del crecimiento aritmético y el crecimiento geométrico (Ellis *et al.,* 2015; Ferrari-Escolá *et al.,* 2016; Gruver, 2018; Kuper y Carlson, 2018).

En este trabajo nos proponemos compartir nuestras reflexiones sobre la génesis de diseños de aprendizaje, disparadores de la modelación-covariación logarítmica exponencial en el aula (Ferrari, Martínez y Méndez, 2016), imprescindibles para propiciar la emergencia de la noción de función.

Constructos teóricos involucrados

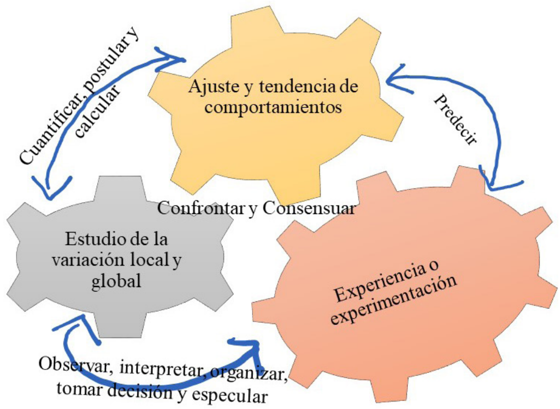
Se concibe la modelación, desde una postura socioepistemológica, como una construcción de conocimiento en sí misma, sobre la realidad o sobre parte de ella, que se realiza al enfrentar una situación en la que se ponen en juego los conocimientos de quien modela (Suárez, 2014, Arrieta, 2003). La modelación es una actividad humana que trasciende y se resignifica transformando al objeto matemático (Cordero, 2016), que privilegia el lenguaje de las herramientas sobre el lenguaje de los objetos. En ese sentido, lo importante no es enseñar el proceso de modelación sino construirlo; además, no sólo importa el modelo matemático sino reconocer su construcción en el escenario en el que emerge y su desarrollo ante la o las situaciones subsecuentes, es decir, el desarrollo del uso del conocimiento matemático.

Se ha formulado un mecanismo de intervención basado en epistemologías de práctica, al que se ha nombrado *categoría de modelación escolar* (CME), la cual explicita elementos básicos para fomentar en el aula de matemáticas la modelación (Méndez, 2013). Estos son prácticas y momentos de análisis de variación (figura 1). La CME promueve, desde la experimentación o la experiencia evocada, el estudio de la variación local y global para ajustar tendencias de comportamientos de variación. Con ellos suceden los usos de conocimiento matemático para lo gráfico, lo numérico y lo analítico articulado por prácticas que se vislumbran en la argumentación de los participantes.

Concebimos que un momento clave en la modelación consiste en identificar, mediante una práctica tan básica como la observación y el análisis, qué variables están involucradas en la experimentación evocada o simulada. Así se da paso al estudio de su variación para abstraer su coconstrucción, es decir, lograr un razonamiento covariacional continuo suave (Thompson y Carlson, 2017). Lograr el desarrollo del razonamiento covariacional en los estudiantes en tanto modelan implica que los profesores, como difusores del conocimiento, hayan construido su propia experiencia y su abstracción de la simultaneidad de dos cantidades que varían.

En esta investigación sintetizamos los elementos base de una modela-

Figura 1. *Elementos de la categoría de modelación escolar (adaptado de Méndez, 2013)*



ción-covariación logarítmica exponencial (véase figura 2), adaptando los niveles propuestos por Thompson y Carlson (2017) para el desarrollo del razonamiento covariacional desde estudios socioepistemológicos (Ferrari y Farfán, 2010; Ferrari, 2008) que sustentan la construcción del saber (cuadro 1).

Consideramos, además, que en la modelación, la experimentación o la experiencia evocada provoca la necesidad de *observar* e *interpretar* lo que varía, para que al *recolectar* datos esto implique *decidir* qué se estudia; prácticas que demandan *organizar* la información. Y por ende, estudiar la variación local y global de las variables seleccionadas da paso a *cuantificar* la variación, *postular* patrones de comportamiento y ajustar mediante el *cálculo* con datos conocidos para poder plantear una tendencia de comportamientos de variación y con ello *predecir* datos o momentos futuros de la variación. En cada práctica mencionada subyacen usos de lo numérico, lo gráfico y lo algebraico. Entrelazado con estos elementos, consideramos importante explicitar las demandas cognitivas que asociamos a cada actividad (figura 2) para propiciar el desarrollo del razonamiento covariacional desde situaciones de modelación.

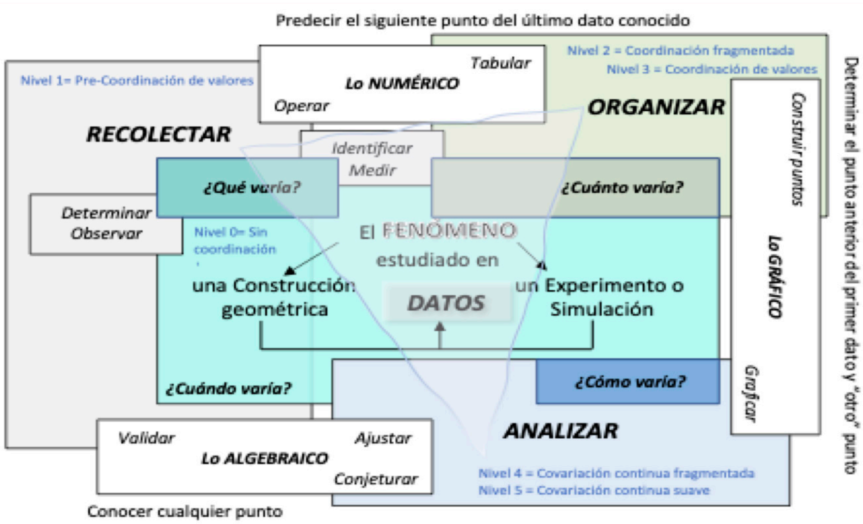
Bajo esta mirada se han generado diseños de situaciones de aprendizaje que han propiciado la construcción de conocimientos matemáticos en escenarios de investigación con estudiantes del nivel medio superior (Méndez, 2013; Ferrari, Martínez y Méndez, 2016). Ahora cuestionamos

CUADRO 1. *Síntesis de los niveles de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial*

Nivel	*Características*
0. Sin coordinación	La atención está en el crecimiento brusco de una variable sin reparar en el crecimiento lineal de la otra.
1. Precoordinación de valores	Se percibe que si una variable aumenta una unidad el valor de la otra variable cambia (aumenta o disminuye) de forma brusca.
2. Coordinación fragmentada de valores	Se percibe que una variable cambia sumándole una constante (progresión aritmética), y la otra variable cambia multiplicándose por otra constante (progresión geométrica), sin abstraer un objeto multiplicativo, pero se visualiza un vínculo flexible entre las variables.
3. Coordinación de valores	Se coordinan los valores de una variable con los valores de otra variable creando una colección discreta de pares. Emerge un objeto multiplicativo al predecir, en conjunto, el siguiente par de datos, uno sumando y el otro multiplicando.
4. Covariación continua fragmentada	Se puede esbozar una gráfica continua que ajuste todos los puntos construidos, pero no se abstrae la completitud de los conjuntos de valores que se involucran, siendo implícitamente el dominio Z. Se abstrae una relación entre las variables.
5. Covariación continua suave	Se explicita una relación entre las variables considerando que $f(x+\Delta x)/f(x)$ es constante e involucrando los números reales en dominio e imagen.

NOTA: Adaptación de niveles de razonamiento covariacional de Thompson y Carlson (2017)

FIGURA 2. *Modelación-covariación logarítmica-exponencial*



cómo incluir estos diseños en el escenario de la matemática escolar, es decir, cómo estudiar su inclusión en las prácticas del docente de matemáticas en su contexto cotidiano. Por eso desarrolla un proyecto de investigación que pone a disposición del profesor los diseños de situaciones de aprendizaje, para que ellos los adapten y los usen en su práctica docente, acompañándolos en este desafío.

Buscamos elementos que nos permitan generar el contexto en que el aprendizaje sea un componente colectivo y central para construir y/o ampliar un conocimiento teórico con fundamento contextual y aplicable a la práctica docente más allá de la investigación en sí misma. Es decir, no sólo cuestionamos sobre qué funciona, sino también reflexionamos para quién debe funcionar (Biesta *et al.,* 2019, citado en Fowel *et al.,* 2022). Entonces el proyecto busca generar estas reflexiones.

Elementos metodológicos de la investigación

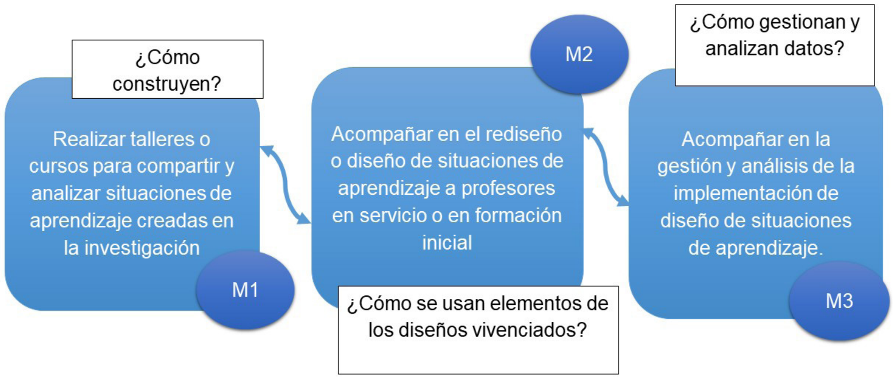
La investigación basada en diseño, como metodología que estructura nuestras indagaciones (figura 3), permite testear los constructos teóricos y reconocer su funcionalidad en el proceso de construcción de conocimientos matemáticos. En particular, interesa estudiar cómo sucede un proceso de inclusión de diseños de aprendizaje en las prácticas docentes de profesores de matemáticas.

Si bien esta metodología es transversal a los tres momentos del proyecto, en este reporte se muestra sólo el momento uno (MI) del proyecto general mediante algunos ejemplos de construcciones matemáticas que consideramos se han alcanzado con un grupo de testeo en un ambiente de difusión, en el VIII Taller Internacional Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación (TEMBI 8).

Participantes y contexto

La discusión que compartimos en este reporte surge de la interacción, en modalidad virtual, con 13 profesores y estudiantes de posgrado durante el evento mencionado. Los participantes se mostraron interesados en re-

Figura 3. *Síntesis de momentos del proyecto de investigación*



flexionar sobre cómo diseñar actividades matemáticas desde la modelación y la covariación, motivados por nuestra propuesta.

En este evento se desarrollaron dos sesiones síncronas de una hora y media y se compartieron las actividades de reflexión, para trabajo asíncrono, organizadas en un libro de GeoGebra. Si bien se videograbaron las sesiones, no se logró recuperar ese material para analizar a detalle las discusiones verbales. Sin embargo, se resguardaron en un salón virtual de Google-Classroom las evidencias escritas durante las sesiones síncronas y asíncronas así como fotos de pantalla del desarrollo del taller.

Dinámica de trabajo síncrono-asíncrono

En nuestro proyecto sobre modelación y covariación se han elaborado diseños de situaciones de aprendizaje, de los cuales se seleccionaron dos para analizarlos y discutirlos en las sesiones del taller exploratorio. En la primera sesión se reflexionó sobre la modelación-covariación con pase en la construcción geométrica de triángulos como generadores de datos. Preguntas como ¿qué varía?, ¿cómo varía?, ¿cuánto varía? fueron discutidas para estudiar el fenómeno propuesto en un libro de GeoGebra en el que se organizaron las tareas síncronas así como las asíncronas a desarrollar de manera independiente.

En la segunda sesión síncrona se compartió una situación de modelación desde el análisis de la variación de la temperatura, donde lo sustancial fue reflexionar sobre qué interviene en el cambio de la temperatura y qué elementos pueden ayudar a describir la variación general de la variación de las temperaturas. Posteriormente, se invitó a analizar los datos que provoca generar, desde lo numérico o lo gráfico, modelos que permitan describir, controlar o predecir la variación global, y, desde ahí, usar procedimientos para cuantificar el cambio. Nótese que esto también implica dar respuesta a las preguntas que se señalaron en la sesión 1.

En las sesiones síncronas se priorizaron las discusiones colectivas sobre los diseños de aprendizaje y, posteriormente, de manera asíncrona, los participantes reportaron sus reflexiones y sus análisis de las actividades matemáticas propuestas.

A continuación se describen de forma breve los diseños implementados y el análisis sobre las producciones que se tuvieron.

Diseños de aprendizaje compartidos

Diseño 1. Construyendo datos desde la geometría

La importancia del uso de elementos geométricos para sustentar y presentar argumentos variacionales ha ido diluyéndose en el discurso matemático de la escuela actual, uso que consideramos relevante rescatar. En nuestra exploración sobre qué argumentos emergentes en la construcción del cálculo se han perdido en el actual discurso matemático escolar, en particular en la enseñanza de funciones exponenciales y logarítmicas (Ferrari y Farfán, 2010), nos interesamos en estudiar el libro *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* (Agnesi, 1747) considerado como uno de los primeros textos de cálculo para alumnos que se publica en medio de la construcción y los acuerdos sobre el estudio de las variaciones, influido por las ideas infinitesimales de Newton y Leibniz.

Analizamos en particular el libro tercero*: Del calcolo integrale*, capítulo I, “Delle regole dell’integrazioni espresse da formule finite algebriche, o ridotte a quadrature supposte” (pp. 613-700) centrándonos en los puntos donde se caracteriza a las funciones exponenciales y logarítmicas, conocidas en el siglo XVIII como “curva logarítmica”

FIGURA 4: *Libro de Agnesi del siglo XVIII*

Agnesi presenta varias curvas y, en el punto 9 de este libro, comenta: "En cuanto a la logarítmica, es una curva de tal propiedad, que tomando las abscisas en progresión aritmética, las ordenadas correspondientes están en progresión geométrica" (1747, p. 617, trad. propia, véase figura 4). Explica la necesidad de generar una partición del eje x con una progresión aritmética, es decir que AB = BC = CD =…, y construir, en los puntos A, B, C, D… rectas perpendiculares (AE, BF, CG...) en proporción geométrica para que los puntos E, F, G… pertenezcan a la curva (figura 5).

Menciona también que al subdividir las líneas AB, BC, etc., en partes iguales, y en esas divisiones levantar perpendiculares en la misma proporción geométrica, se obtienen otros puntos intermedios de la curva. Afirma luego que, "por último, multiplicando las divisiones al infinito, tendremos infinitos puntos, o la propia curva" (p. 618), explicitando así su continuidad.

Más adelante explica que la curva logarítmica no se puede describir geométricamente y por eso se llama curva mecánica. Para generar una progresión aritmética como el crecimiento de las abscisas y una progresión geométrica en las ordenadas, propone la siguiente construcción (figura 6).

Agnesi establece que al mantener una progresión aritmética en las abs-

FIGURA 5. *Imagen tomada de Agnesi (1747)*

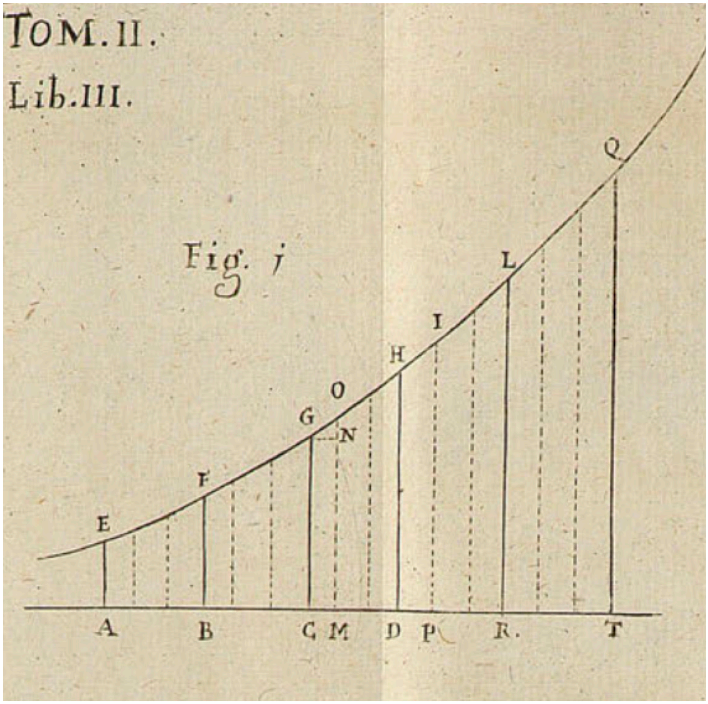
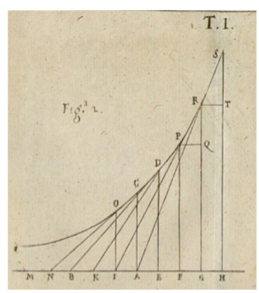


FIGURA 6. *Elementos tomados de Agnesi (1747, p. 619, trad. propia)*

- *Dividir la recta indefinida MK en partes iguales (MN ,NB, BK, etc)*
- *Tomar NI a placer, en el punto I construir la perpendicular IO de cualquier magnitud;*
- *Trazar NO, y en el punto A trazar la perpendicular AC para que en la intersección con NO produzca C.*
- *Desde el punto B dibujar BC, y en el punto E trazar la perpendicular ED, que se encuentra con BC y determinan el punto D.*
- *Desde el punto K se dibuja KD, y en el punto F se levanta la perpendicular FP, que se encuentra con KD producida en el punto P.*

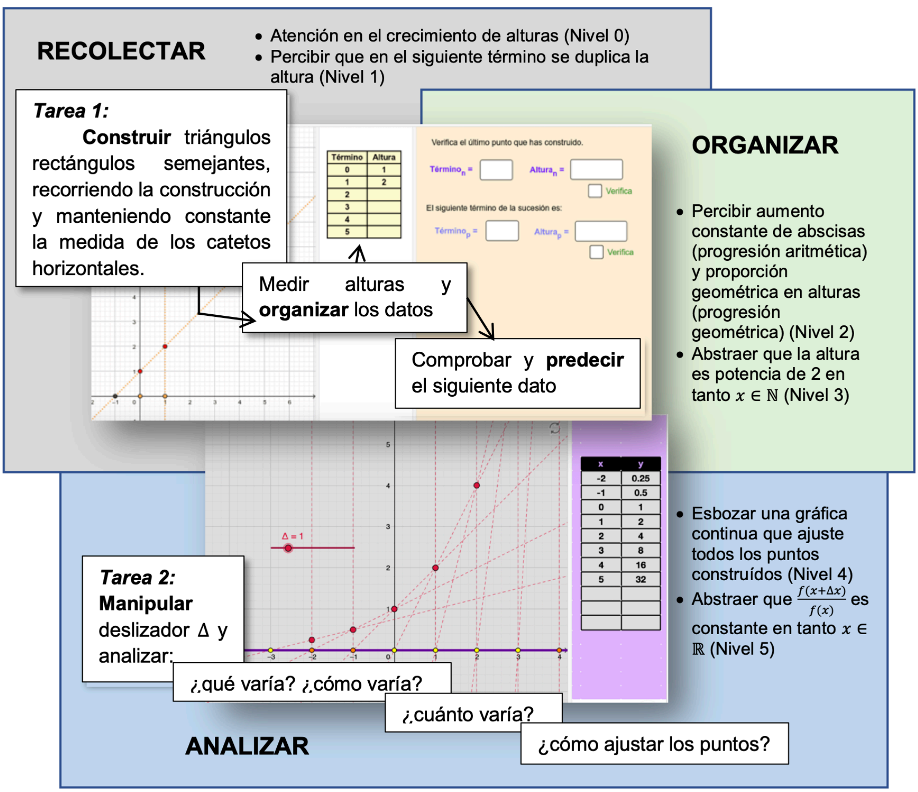
De la misma manera, continuar la operación al infinito, y los puntos O,C,D,P, etc. estarán en la curva logarítmica. Para tener los puntos intermedios entre O,C,D,P etc. dejar que las porciones MN, NB.... sean bisecadas, y repetir la misma operación.



cisas de los puntos construidos, en tanto las ordenadas mantienen una proporción geométrica, se puede extraer de la gráfica que, si dx es la separación (infinitamente pequeña), entre dos puntos consecutivos cuyas ordenadas sean y y z, entonces $dy/y = dz/z$; es decir, la subtangente es constante, argumento ajeno al discurso escolar actual, idea que rescatamos para este diseño de situación de aprendizaje.

El desarrollo del razonamiento covariacional se propicia al interactuar con los datos. En esta propuesta, sugerimos que se construyan, geométricamente, puntos de una "curva logarítmica", es decir, que se establezca una relación entre una progresión aritmética y otra geométrica, que denominamos covariación logarítmica-exponencial. En este sentido hemos generado un libro en GeoGebra dosificando las actividades y aprovechando todos los recursos que ofrece esta plataforma, declarando una trayectoria hipotética de aprendizaje desde el razonamiento variacional propiciado al poner acento en las alturas de los puntos hasta abstraer la covariación altura-partición (figura 7).

FIGURA 7. *Trayectoria hipotética de aprendizaje del diseño 1.*



Diseño 2. Enfriamiento del silicón

La situación de aprendizaje, modelado el enfriamiento del silicón, propicia argumentos variacionales para la estabilidad de la relación de variación que se forma entre el decremento de la temperatura y el tiempo que tarda en enfriarse el silicón hasta la temperatura ambiente. Ha sido diseñada y explorada con estudiantes de educación media superior mexicana, quienes formularon argumentos sobre la relación de las condiciones iniciales, en tanto temperatura ambiente y temperatura inicial, con la velocidad del enfriamiento del silicón. Esto fue posible argumentarlo con base en aspectos gráficos que permitieron significar la solución del modelo diferencial del fenómeno del enfriamiento (Méndez, 2013).

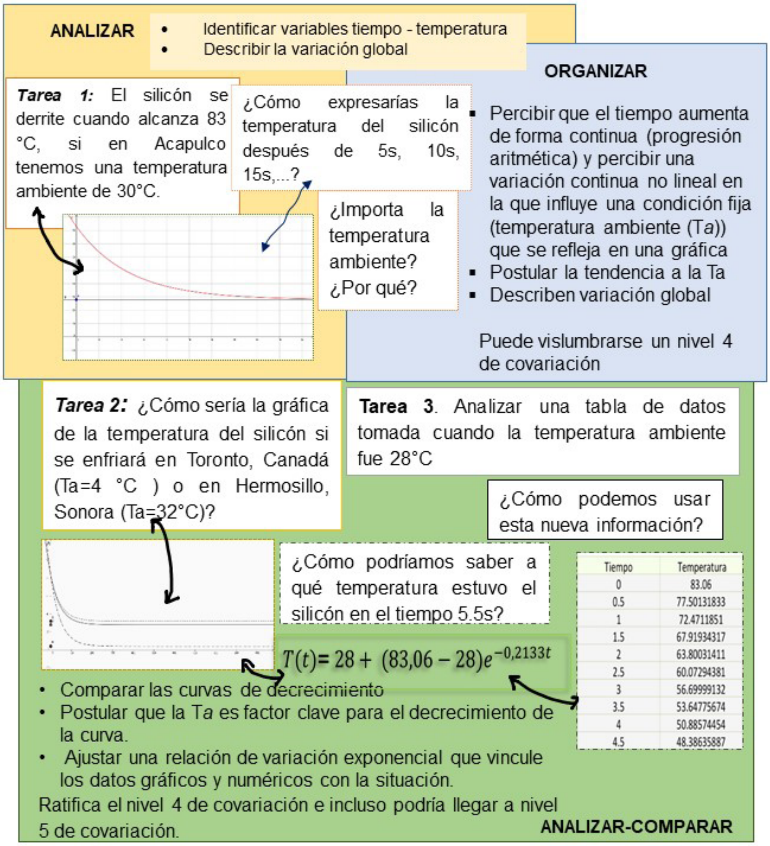
Puesto que se trabajó previamente una situación en la que se puso énfasis en el análisis de datos numéricos y gráficos para que se construyeran modelos característicos de lo logarítmico-exponencial, con la segunda situación de aprendizaje se esperaba que los participantes lograran poner en juego procedimientos creados previamente (figura 8).

Durante el taller se desarrolló una variante del diseño original, adaptada a la condición virtual, en tanto que los datos no se tomaron de forma experimental y se sintetizan las tareas. Por el tiempo del que se disponía no fue posible completar todas las tareas, sólo se llegó a reflexionar acerca de las primeras dos tareas con los participantes.

Reflexiones promovidas por los diseños de situaciones de aprendizaje

Para iniciar el taller se formularon dos preguntas: ¿qué entiendes por variación? Y ¿qué entiendes por "modelar" un fenómeno que podemos observar?, lo cual dio luz sobre sus concepciones. Las respuestas a estas preguntas fueron plasmadas en una tarea del libro de GeoGebra. Se encontró que todos los participantes utilizaron la palabra *cambio* para expresar sus ideas. Sin embargo, siete de ellos asociaron "cambio" con "comparar dos elementos", evidente en frases como las siguientes:

FIGURA 8. *Trayectoria hipotética de aprendizaje del diseño 2*



- cambio de una variable a medida que pasa el tiempo.
- *cambio de una variable respecto de otra, por ejemplo, el tiempo*
- cambio que depende de algo.
- *cambio que se produce entre dos magnitudes.*

Los demás participantes se refirieron a un objeto que cambia, utilizando frases como las siguientes:

- la variación trata del cambio, bien sea de una variable, un objeto etcétera.
- tiene que ver con cambio de valores.
- realizar cambios.

En las respuestas podemos reconocer que no es trivial reflexionar sobre "variación", es decir, cuestionar ¿qué es?, ¿cómo se mide?, ¿surge de una relación de dos entes o de uno?, evidenciando el campo de oportunidad para discutir y construir significados y formas de promover en este ámbito. Respecto de la palabra *modelar,* la mayoría de los participantes la asociaron con "representar" un fenónemo (o una situación de la vida cotidiana o de la realidad, entre otras ideas) con expresiones matemáticas (funciones, objetos matemáticos, herramientas matemáticas, entre otras palabras), pero no se profundiza en cómo se logra "representar" y para qué son usadas esas "representaciones" o cómo se relaciona la representación, el uso de ésta con el contexto y el quién representa.

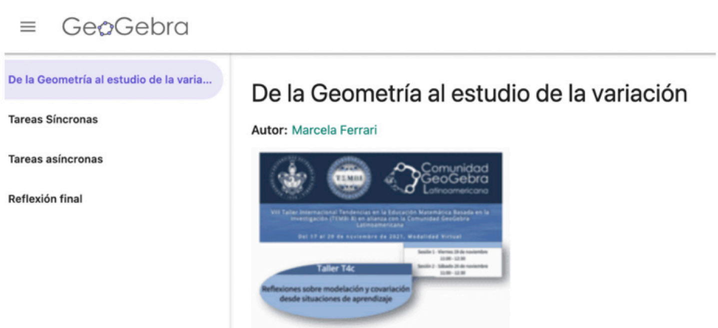
Lo anterior resulta importante porque sin lugar a dudas estas concepciones permean sus producciones y sus prácticas docentes. Sobre las producciones, en esta ocasión permitieron generar el escenario para reflexionar sobre la modelación y la covariación. A continuación se describen algunos hechos.

Observaciones de la implementación del Diseño 1

Las actividades del primer diseño de aprendizaje fueron desarrolladas utilizando las tareas del libro de GeoGebra (figura 9). Se inició guiando paso a paso la construcción geométrica, propuesta por Agnesi, de los primeros tres puntos de la curva que se deseaba estudiar.

El desarrollo de la tarea 1 fue realizado en conjunto y discutiendo so-

Figura 9. *De la geometría al estudio de la variación*

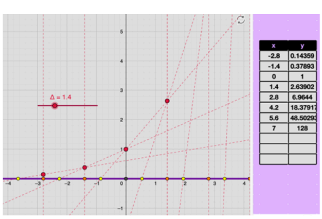


bre qué varía y cómo varía. La atención, como se esperaba, se centró en el rápido crecimiento de las alturas de los triángulos involucrados en la construcción. En conjunto, se abstrae que el crecimiento de las alturas se rige por *2n,* en tanto que los términos de la sucesión del triángulo aumentaban 1 a 1. Es decir, la partición de las abscisas está regida por $\Delta x = 1$, medida que también se utilizó en la construcción del triángulo rectángulo isósceles inicial, que propicia el crecimiento de las alturas, es decir, una progresión geométrica de proporción 2.

En la tarea 2 se involucró un *applet* de GeoGebra, diseñado para propiciar discusión sobre el papel de la partición de las abscisas y la repercusión en el crecimiento de las alturas de triángulos rectángulos construidos, es decir, en esa progresión geométrica. Surge visualmente la continuidad de la curva, por lo cual es más complejo contestar: ¿cuánto cambia?, abstracción que involucra la medida de Δx, misma que es manipulada con el deslizador de GeoGebra. Entre las producciones registradas en el libro de GeoGebra encontramos que algunos profesores evidencian un nivel 1 de razonamiento covariacional al percibir que ambas variables crecen, pero no logran expresar una relación entre sí (cuadro 2). En este caso, se asocia la variación de las abscisas para describir lo que se observa en la vista gráfica del *applet* y la variación de las ordenadas para describir los cambios en la hoja de cálculo que muestran las coordenadas de los puntos.

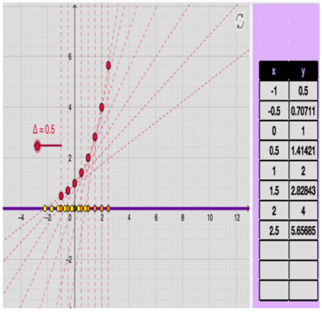
Otros evidencian un nivel 3 de razonamiento (cuadro 3) al reconocer la relación entre las operaciones aritméticas (suma y multiplicación) que determinan las coordenadas de los puntos. Es decir, abstraen un objeto multiplicativo articulando la suma de x con Δ (manipulado por el deslizador) y la multiplicación en las ordenadas correspondientes. La estrategia

CUADRO 2: *Evidencia de nivel 1 de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial*



¿qué cambios produce el movimiento de Δ en lo puntos?¿por qué?	**¿qué cambios produce el movimiento de Δ en la tabla ¿por qué?**
Se dan valores continuos en el eje x, es decir, con punto decimal.	La base no es entera, por lo que toma valores decimales.
Se dan valores continuos en el eje x, es decir, con punto decimal.	*La base no es entera por lo que toma valores decimales.*

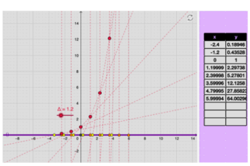
TABLA 3. *Evidencia de nivel 3 de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial*

	¿qué cambios produce el movimiento de Δ en lo puntos? ¿por qué?	**¿qué cambios produce el movimiento de Δ en la tabla ¿por qué?**
	A los valores de "x" se va sumando el valor que indica el deslizador y los valores de "y" se obtienen multiplicando por el valor de "y" que corresponde a "x" marcado en el deslizador. A los valores de "x" se va sumando el valor que indica el deslizador y los valores de "y" se obtienen por el valor de "y" que corresponde al "x" marcado por el deslizador.	Si el deslizador marca 1.9 sería "x", el valor de "y" sería 3.73213. Este último valor afecta a las demás "y". El punto (0, 1) queda fijo todo el tiempo. El siguiente valor de (1.9, 3.73213) sería (1.9+1.9, 3.73213 x 3.73213)= (3.8, 13.9287943) y así sucesivamente. *Si el deslizador marca 1.9 sería "x", el valor de "y" sería 3.73213. Este último valor afecta a las demás "y". El punto (0,1) queda fijo todo el tiempo..*

que propone es particular, ya que establece que siendo $x = \Delta$ y altura $= 2\Delta$, el siguiente punto sería $x = \Delta + \Delta$ y por lo tanto la altura sería $= 2\Delta*2\Delta$. Entremezcla en su explicación el papel de la abscisa con la unidad de medida de la partición.

Otro participante explicita de manera muy sucinta cómo crecen las coordenadas de los puntos, logrando establecer una expresión general de un caso particular de $\Delta = 0.4$ y evidenciando la no abstracción de la completitud en el dominio de esta curva (nivel 4 [véase cuadro 4]). Abstracción que es lograda por otro participante, quien involucra los números reales en su expresión algebraica percibiéndose un tránsito del nivel 4 de

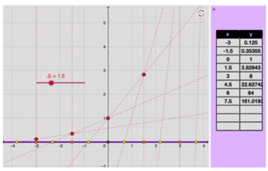
CUADRO 4. *Evidencia de nivel 4 de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial*

	¿qué cambios produce el movimiento de Δ en lo puntos?¿por qué?	**¿qué cambios produce el movimiento de Δ en la tabla ¿por qué?**
	Al alejar la vista gráfica y movel el deslizador pareciera que los puntos rojos tienen a formar una parábola, por la curva que va dejan *Al alejar la vista gráfica y mover el deslizador pareciera que los puntos rojos tienden a formar una parábola, por la curva que dejan*	Tanto la variable x como la y crecen *Tanto la variable x como la y crecen*
¿Es posible encontrar una expresión algebraica tal que al colocarla en la entrada del applet muestre una gráfica que pase por todos los puntos para cualquier posición del deslizador? ¿por qué?		ría: $T(n) = 2^{(0.4(n-1))}$

su compañero al nivel 5 del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial (cuadro 5).

Observamos así que es muy rica la evidencia que nos deja la interacción con estos profesores en el taller desarrollado. Nos proporcionan un valioso material para analizar y confrontar con nuevos ciclos de esta investigación basada en diseño con el desafío de seguir afinando las actividades y los constructos teóricos involucrados.

CUADRO 5. *Evidencia de nivel 5 de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial*

	**¿qué cambios produce el movimiento de Δ en lo puntos?¿por qué?**	**¿qué cambios produce el movimiento de Δ en la tabla ¿por qué?**
	cambia x y y *Cambia x y y*	x cambia en Δ y cambia en 2^{Δ} *x cambia en Δ* *y cambia en 2^{Δ}*
¿Es posible encontrar una expresión algebraica tal que al colocarla en la entrada del applet muestre una gráfica que pase por todos los puntos para cualquier posición del deslizador? ¿por qué?		$y = 2^x$

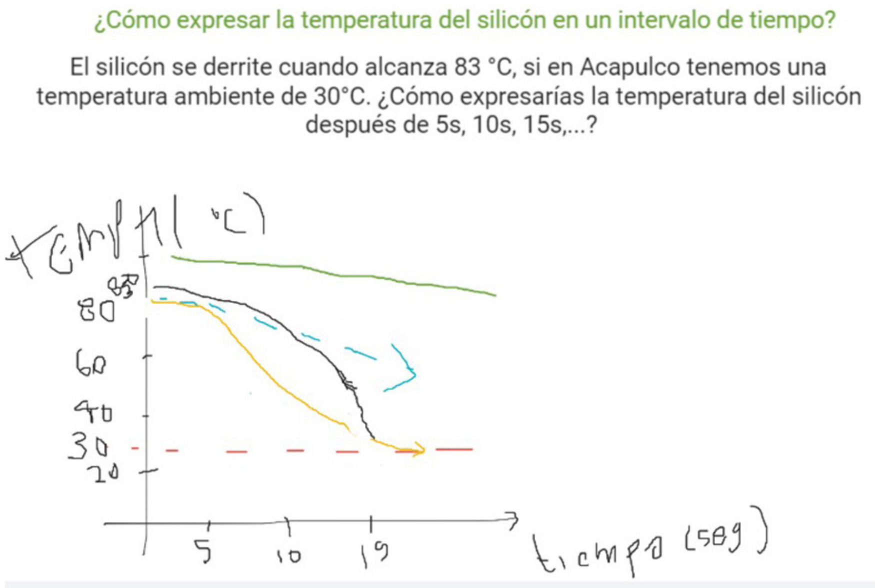
Observaciones de la implementación del diseño 2

La situación de aprendizaje desarrollada en la segunda sesión síncrona del taller se trabajó con base en datos que emulaban el enfriamiento de una sustancia, el silicón. Este fenómeno invitó a los participantes a describir qué influencía en éste, dando inicio a la modelación.

La figura 10 muestra una producción colectiva durante la reflexión sobre cómo podrían expresar la variación. Se decidió expresar la variación mediante una gráfica y se tomó como variables al tiempo y la temperatura. Nótese que hay una línea punteada que marca la temperatura ambiente. Se postularon dos tipos de comportamientos: uno, que de manera global se podía mostrar mediante una línea recta con pendiente negativa, considerando que decremento la temperatura; y otro, un comportamiento decreciente más marcado con una curva suave que tiende a la temperatura ambiente.

Por otro lado, la figura 11 muestra la reflexión colectiva hecha para poder conjeturar que la velocidad del enfriamiento del silicón está relacio-

Figura 10. *Producción colectiva del taller para las preguntas 1 y 2*



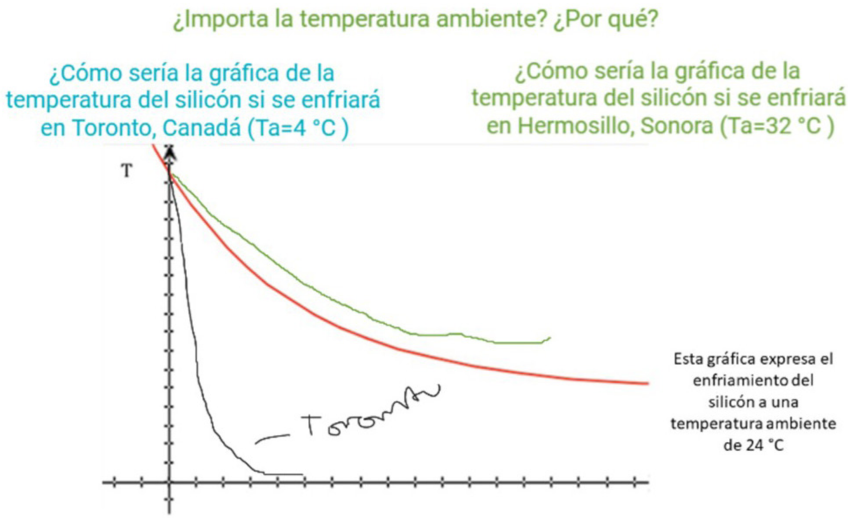
nada con la temperatura en donde se enfría. En este sentido se realizaron dos curvas que, aunque tienen el mismo comportamiento, tienden a equilibrarse en puntos distintos.

Dado que no fue posible recuperar las grabaciones de este taller, no se puede tener mayor evidencia para asegurar qué nivel de razonamiento se logró alcanzar por los participantes, aunque pareciera que se alcanza un nivel 4, pero consideramos que hacen falta más argumentos para ratificarlo. Sin embargo, esta experiencia nos lleva a repensar la estructura y los momentos en los que se deben desarrollar las situaciones, así como los tiempos de las mismas.

6. Reflexiones sobre los resultados y lo que falta por afinar en el proyecto

El testeo de los diseños de situaciones de aprendizaje que fueron compartidos con los colegas participantes del taller nos lleva a reconocer que, sin

Figura 11. *Producción colectiva del taller para las preguntas 3 y 4*



lugar a dudas, las actividades propuestas generan un escenario para reflexionar sobre covariación y modelación, en tanto que se discuten con ellos sus propias producciones.

Sin embargo, esta exploración dejó saber que en este momento del proyecto (primer ciclo) hace falta poner énfasis en la reversibilidad en los niveles de razonamiento covariacional para poder afianzar los mismos en su potencialidad de describir un fenómeno, es decir, modelar.

Una forma puede ser al hacer explícita la covariación matemática de las progresiones que determinan el comportamiento de la relación de las variables; en este caso, una covariación logaritmico-exponencial, ya que en los argumentos suscitados no se tienen elementos suficientes que evidencien el eje que articula ambos diseños.

Referencias

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula* [tesis doctoral no publicada], Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Arrieta, J., y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(1), 19-48.

Cantoral, R. (2013*). Teoría socioepistemológica de la matemática educativa: estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Aplying covariational reasoning while modelling dynamic events: a framework and study. *Journal for Research in Mathematics Education 23* (5), 352-378.

Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (coords.), *Investigaciones latinoamericanas en modelación: matemática educativa* (pp. 59-88). Gedisa: México.

Ferrari-Escolá, M., Martínez-Sierra, G., y Méndez-Guevara, M. E. M. (2016). *"Multiply by adding"*: development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *Journal of Mathematical Behavior, 42(June)*, 92-108, en http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.03.003.

Ferrari, M., y Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13(4-I), 53-68.

——— (2008). *Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: de multiplicar sumando a una primitiva* [Tesis inédita de doctorado], Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Fowler, S., Cutting, C., Fiedler, S. H. D., y Leonard, S. N. (2022). Design-based research in mathematics education: trends, challenges and potential. *Mathematics Education Research Journal,* en https://doi.org/10.1007/s13394-021-00407-5.

Harel, G. y Dubinsky, E. (1992). *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.* Mathematical Association of America. Notes Series, 25.

Johnson, H. L. (2015). Together yet separate: students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics,* en http://doi.org/10.1007/s10649-014-9590-y.

Kaiser, G. (2017) The teaching and learning of mathematical modeling. En J. Cai (ed.). *Compendium for research in mathematics Education* (pp. 267-291). The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. USA.

López, R., Molina, M., y Castro, E. (2017). Modelización en el aula de ingeniería: un estudio de caso en el marco de un experimento de enseñanza. PNA, *11*(2), 75-96.

Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modela-*

ción para la matemática escolar [esis doctoral no publicada], Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Oliva, J. (2019). Distintas acepciones para la idea de modelización en la enseñanza de las ciencias. *Educación Matemática, 37*(2), 5-24.

Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Educación Matemática, 28*(3) 91-144.

Saldanha, L., y Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: simultaneous continuous variation. En S. B. Berensah y W. N. Coulombe (eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education* - North America. Raleigh: North Carolina State University.

Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar.* Díaz de Santos.

Thompson, P. W. y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai, (ed.), *Compendium for research in mathematics Education* (pp. 421-456). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Trigueros, M. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo: un estudio desde una perspectiva de modelación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 11*(31), 1207-1240.

Zaldívar, J., y Briceño, E. (2019). ¿Qué podemos aprender de nuestros estudiantes? Reflexiones en torno al uso de las gráficas. *Educación Matemática*, 31(2). 212-240.

Sección 2

INVESTIGACIONES SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

5. Patrones conversacionales en futuros profesores de matemáticas al resolver tareas de potencias

Landy Sosa Moguel[1]
Eddie Aparicio Landa[2]
Katia Campos Ucan[3]

Resumen

Considerando la conversación reflexiva como un medio para el desarrollo de conocimiento y aprendizaje profesional docente en matemáticas se inició, a través del planteamiento, la resolución y la discusión de tareas matemáticas de potencia, un espacio de conversación reflexiva entre estudiantes para profesor de matemáticas con el fin de analizar los patrones conversacionales asociados al funcionamiento de la interacción conversacional y el desarrollo de conocimiento sobre potencia. Para el análisis de los datos recolectados en audio y video se utilizó el método del análisis conversacional. Se identificaron patrones conversacionales relativos a la pertinencia y la suficiencia del razonamiento utilizado en la resolución de las tareas, a la naturaleza de las tareas implementadas y a la conceptualización escolar de potencia.

Palabras clave: *patrones conversacionales, potencia, conocimiento matemático.*

[1] Doctora en matemática educativa. Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8771-0800

[2] Doctor en matemática educativa. Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4400-3919

[3] Licenciada en Enseñanza de las matemáticas. Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9034-7128

Introducción

En los análisis de los procesos de formación docente en matemáticas, el conocimiento del profesor ha sido reconocido como uno de los factores que inciden en la calidad de la enseñanza (Hill *et al.,* 2008; Ponte, 2012). Y, por ende, la caracterización del tipo de conocimiento matemático para la enseñanza que deben poseer los profesores en vías de un ejercicio profesional de su práctica ha adquirido cada vez más atención de los investigadores en matemática educativa (e.g. Carrillo *et al.,* 2018; Hoover *et al.,* 2016; Pino-Fan y Godino, 2015).

Sin embargo, aún es poca la información basada en la investigación acerca de cómo aprenden los profesores de matemáticas y de cómo es posible desarrollar su conocimiento matemático para la enseñanza (Potari y Ponte, 2017; Silverman y Thompson, 2008). Algunos estudios en esta dirección han mostrado el impacto positivo que procesos de aprendizaje profesional docente estructurados en torno de la reflexión colectiva y conversacional logran tener en la mejora del conocimiento y la práctica del profesor (e.g. Earl y Timperley, 2009; Simoncini, Lasen y Rocco, 2014). Con la intención de contribuir en esta misma dirección, aquí examinamos de qué manera futuros profesores generan conocimiento matemático a través de la interacción conversacional, específicamente en un espacio orientado a la reflexión colectiva acerca de tareas que involucran potencias y su solución.

La potencia de un número o variable, más conocido como el trabajo con exponentes, es uno de los contenidos matemáticos de compleja comprensión tanto para estudiantes como para profesores. Escolarmente, la noción de potencia que se fija en la mente de las personas es la multiplicación repetida de un número por sí mismo, que se convierte en un obstáculo y carente de sentido para interpretar expresiones de potencias como 2^{-1} o $2^{½}$, así como para el aprendizaje de funciones exponenciales y logarítmicas (Weber, 2002).

Además de esta noción limitada, algunas investigaciones han reportado dificultades de los estudiantes para distinguir la dimensión conceptual y procedimental de la potencia (Kieran, 1992), interpretar expresiones con exponente cero o negativo y realizar operaciones aritméticas con potencias (Avcu, 2010; Castillo, Galvis y Parada, 2015; Pochulu, 2009; İymen y Duatepe-Paksu, 2015), reconocer la estructura funcional de las potencias y comparar potencias cuando la base es un número decimal menor que uno o el exponente es negativo (Ramazan, 2010).

El origen de estas dificultades ha sido atribuido a un acercamiento intuitivo del concepto a partir de casos numéricos con exponentes naturales, así como a una enseñanza basada en reglas o leyes de los exponentes, sin una adecuada base conceptual (Crider, 1998; İymen y Duatepe-Paksu, 2015; Weber, 2002). Asimismo, una ruptura conceptual de las potencias con exponente natural respecto de aquellas con exponente entero o fraccionario ha sido identificado en el tratamiento escolar y en los libros de texto y se ha vinculado a la ausencia de referentes semióticos o situacionales para entender lo exponencial (Lithner, 2004; Martínez y Penalva, 2006; Pitta-Pantazi, Christou y Zachariades, 2007).

Diversos autores argumentan que la comprensión del concepto y la adecuada operación con potencias de exponente no natural implica que los profesores generen condiciones en el aula que permitan a los estudiantes lograr un cambio conceptual y generalizar la noción de potencia para dar cabida y sentido al exponente cero, fraccionario, negativo, etc. (Lehtinen, Merenluoto y Kasanen, 1997; Pitta-Pantazi *et al.*, 2007). Al respecto, reconocer la potencia como una relación matemática, asociarla e interpretarla en situaciones de comportamiento exponencial y desarrollar procesos de generalización para transitar del exponente entero positivo al negativo y fraccionario, son parte del conocimiento matemático requerido para la enseñanza del concepto (Campos y Sosa, 2021).

Existen indicios de que el conocimiento matemático del profesor sobre este contenido matemático necesita ser ampliado, pues se percibe predominantemente procedimental y de bajo nivel conceptual. En el estudio de Levenson (2012), los profesores presentaron, formal o intuitivamente, sólo definiciones de potencia que refieren a la idea de multiplicación repetitiva y muestran confusión sobre si la definición del exponente cero debe ser o no probada. Por otra parte, dificultades como las señaladas líneas arriba no sólo conciernen a los estudiantes, sino también al profesor. En particular, a éste se le dificulta interpretar y ofrecer argumentos de expresiones de potencias con exponente no natural (Martínez, 2005).

Por consiguiente, para analizar y describir patrones conversacionales durante una conversación reflexiva en la que se busca desarrollar conocimiento en estudiantes para profesor de matemáticas, se eligió el concepto de potencia, entendida como una operación pero también como una relación matemática.

Marco conceptual

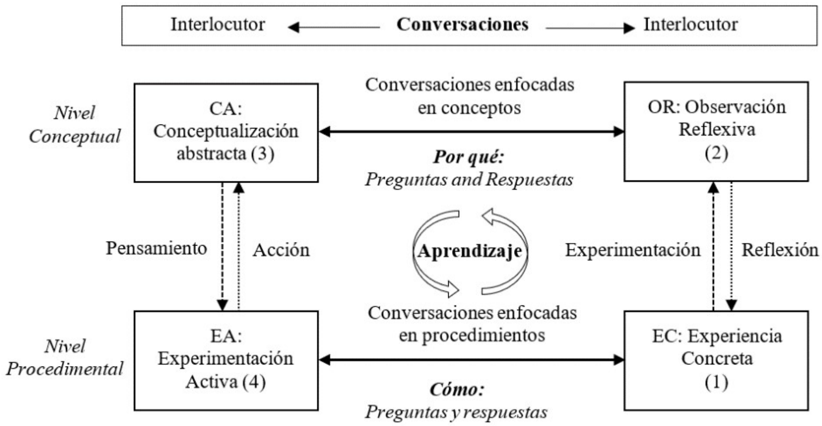
Diversos trabajos se han enfocado en investigar fundamentalmente de manera separada los procesos de reflexión y conversación (Chauraya y Brodie, 2018; Feldman, 1999; Kaminski, 2003; Louie, 2016; Saylor y Johnson, 2014) en relación con la formación y la práctica docente en matemáticas. Sin embargo, algunos autores han señalado los beneficios de estudiar de manera conjunta estas dos formas de propiciar y examinar el aprendizaje profesional docente (e.g. Aparicio *et al.,* 2021; Kanevsky, 1993; Simoncini *et al.,* 2014).

Las posibilidades que brinda la conjunción de estos dos procesos —de ahora en adelante *conversación reflexiva*— para este fin pueden elucidarse si, por un lado, se tiene en mente lo afirmado por Dewey (1933), esto es, que los individuos aprenden cuando reflexionan sobre sus experiencias. Y, por otro lado, se considera la conversación como un conducto para las reflexiones, pues mediante ésta se construyen significados en forma colectiva y las experiencias se transforman en conocimiento (Kolb y Kolb, 2017). En este sentido, el principal supuesto teórico que sostiene esta investigación es que la conversación reflexiva es un medio para promover el desarrollo de conocimiento y aprendizaje profesional docente.

La conversación reflexiva consiste en

> hablar y escuchar reflexivamente, es decir, una voluntad de entablar un diálogo en el que se intercambien y articulen ideas a través de la negociación de significados, la aceptación de preguntas y la argumentación de ideas que eventualmente podrían conducir a una nueva comprensión del tema de conversación [Aparicio *et al.,* 2020, p. 1800].

FIGURA 1. *Conversación reflexiva y aprendizaje profesional docente en matemáticas*



FUENTE: Aparicio, Sosa y Cabañas (2021, p. 45).

Para promover el desarrollo de conocimiento de futuros profesores de matemáticas e identificar patrones conversacionales cuando se dialoga reflexivamente en torno de tareas que involucran el concepto de potencia, se usó el modelo de conversación reflexiva y aprendizaje colectivo que se ilustra en la figura 1.

Este modelo opera en dos niveles de interacción conversacional: horizontal y vertical. Las conexiones horizontales representan intercambios verbales respecto al *cómo* y el *por qué* de las respuestas a un problema o tarea, es decir, respecto al conocimiento procedimental y conceptual, respectivamente. Junto con éstas, las conexiones verticales ponen en funcionamiento un ciclo de cuatro modos de aprendizaje que implican un tránsito entre la captación y la transformación de la experiencia. La captación o comprensión de la experiencia involucra el establecimiento de una dialéctica entre los modos de experiencia concreta (EC) y conceptualización abstracta (CA) y la transformación de la experiencia por medio de relacionar la observación reflexiva (OR) con la experimentación activa (EA). Estas relaciones dialécticas —y, por ende, el aprendizaje— se producen cuando los participantes del habla confrontan o se mueven entre formas opuestas de reflexión, actuación, experimentación y pensamiento.

Método

Esta investigación es de tipo cualitativo con un enfoque interpretativo y hace uso del método de análisis conversacional (Mazeland, 2006), pues, interesó identificar las regularidades o los patrones conversacionales que describan el funcionamiento de la interacción del habla cuando se sostiene una conversación reflexiva sobre la resolución de tareas matemáticas asociadas al concepto de potencia. La interpretación de la interacción conversacional se llevó a cabo a partir de la identificación de los turnos del habla, las secuencias de intervención (por ejemplo "pregunta-respuesta"), la organización de las secuencias y el tránsito entre éstas (Gallardo-Paúls, 1996).

Este método se justifica debido a que en el análisis conversacional (AC) se asume como hipótesis que "en toda comunicación los participantes observan reglas que ordenan el discurso, es decir, no existe un caos en la conversación" (Hamel, 1984, p. 12). De este modo, el proceso analítico se realiza con base en tres principios: *1)* el desarrollo de la interacción en forma natural; *2)* su almacenamiento en audio o video, y *3)* su transcripción (Hamel, 1984; Mazeland, 2006). En este sentido, el AC ayuda a observar detalladamente las interacciones verbales entre personas, así como a desarrollar una investigación sistemática con el fin de comprender lo que los seres humanos dicen e implican en distintos encuentros (González y Labov, cit. en González y Lema, 2016).

Se contó con la participación de ocho estudiantes —dos hombres (H) y seis mujeres (M)— de un programa de formación de profesores de matemáticas de una universidad pública en México. La participación fue voluntaria y el requisito para su selección fue haber cursado asignaturas del área de matemáticas y didáctica de las matemáticas con contenidos relacionados con el concepto de potencia, tales como álgebra elemental y didáctica del álgebra. Asimismo, una de las autoras de este trabajo participó en la conversación invitando (cuando se consideró pertinente) a los participantes a ampliar o a precisar sus comentarios de modo que hubiera un flujo mayor de la interacción, sin sesgar la intervención de algún interlocutor ni influir en la misma.

Conversación reflexiva en torno del concepto de potencia

Con base en el modelo de conversación reflexiva antes referido se plantearon dos tareas matemáticas de manera individual, las cuales implicaban el concepto de potencia como parte del proceso resolutivo y de los procesos de generalización inductiva. Posteriormente, se llevó a cabo la interacción conversacional mediante el hecho de compartir los procedimientos y los razonamientos realizados para la resolución de esas tareas. Para esto, la coordinadora invitó a los participantes a expresar cómo habían procedido a resolver las tareas (pregunta de nivel procedimental en el modelo de conversación reflexiva) y posteriormente pidió que explicaran el por qué de su procedimiento (nivel conceptual).

A continuación se describen las tareas y los tipos de preguntas planteadas a los participantes (figuras 2 y 3), en dos sesiones de dos horas cada una, con la intención de promover el flujo entre los distintos niveles de interacción y los modos de aprendizaje indicados en el modelo de conversación reflexiva.

- Sesión 1. Flujo entre los modos de aprendizaje EC y OR

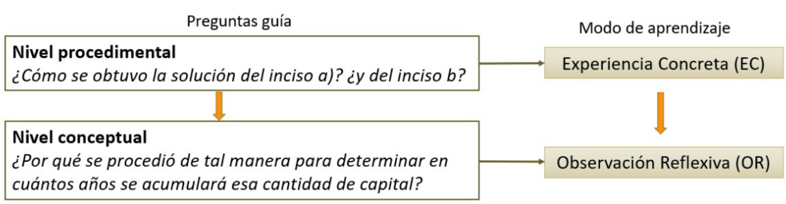
Tarea 1. Una persona decide invertir \$10 500 en un banco para que le genere ganancias. El banco le ofrece un plan de inversión mediante el cual su capital crezca 3% anualmente.

a) Determine en cuántos años el capital de la persona será mayor a \$12 500.

b) Proponga una fórmula o una expresión algebraica para determinar el capital acumulado en cierta cantidad de años.

En la tarea 1 se trabaja con potencias donde el exponente es un número natural y se requiere reconocer un comportamiento exponencial creciente para su resolución.

Figura 2. *Preguntas para la conversación reflexiva sobre la tarea 1 y modos de aprendizaje asociados*



- Sesión 2. Flujo entre los modos de aprendizaje CA y EA

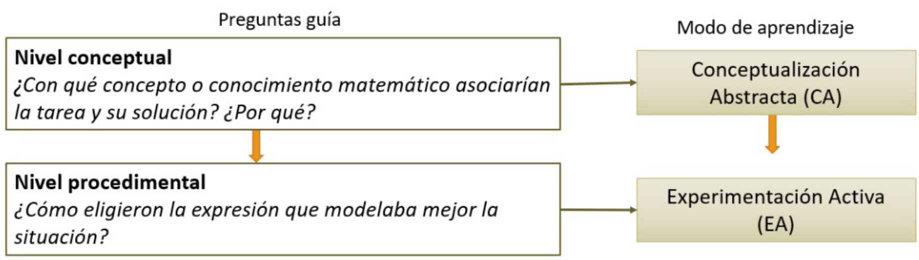
Tarea 2. Una persona adquiere un préstamo de \$10 000 con un familiar y se compromete a pagarlo de manera que cada mes la deuda se reduzca a la mitad. Después de un año con ese esquema de pago, la persona se compromete a finiquitar la deuda. Con base en la experiencia anterior, determina cuál de los siguientes modelos representa mejor la disminución de la cantidad (*D*) que adeuda la persona conforme transcurren los meses de pago.

a) $10\,000(\frac{1}{2})x$ *b)* $10\,000(2)^{-x}$ *c)* $10\,000\,(-\frac{1}{2})^{x}$ *d)* Otro

En caso de elegir otro, propón el modelo de la situación: ____________________

La tarea 2 involucra potencias expresadas con exponente negativo, de modo que exige ampliar la noción de potencia operacional y abstraer la idea de ésta como una relación matemática.

FIGURA 3. *Preguntas para la conversación reflexiva sobre la tarea 2 y modos de aprendizaje asociados*



En cada sesión, los datos obtenidos mediante las grabaciones en audio y video se complementaron con las respuestas escritas a las tareas y con las respuestas proporcionadas por los participantes a la pregunta final siguiente: ¿qué conocimientos matemáticos consideran están implicados en ambas tareas?

Análisis de las interacciones conversacionales

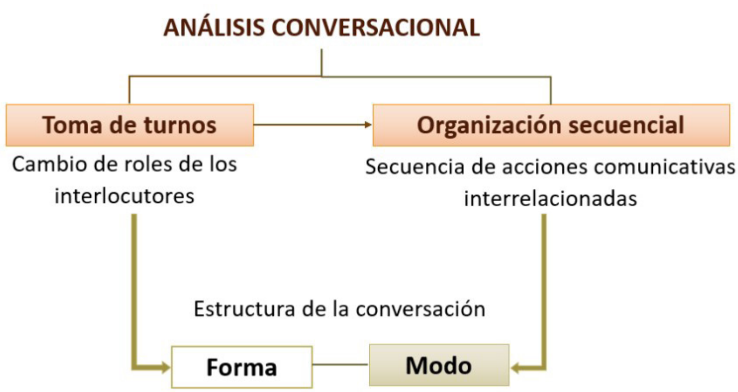
La organización y el análisis de los datos se hizo con base en el método del AC, pues, como se ha indicado, permite describir, analizar, categorizar y comprender las interacciones verbales entre personas y los encuentros conversacionales (González y Lema, 2016), los cuales son aspectos importantes para examinar el papel de la conversación reflexiva en relación con el desarrollo de aprendizaje y conocimiento profesional docente.

La base de datos para el análisis fue la transcripción de todos los episodios conversacionales registrados originalmente en audio. El método consistió en trabajar con estos datos en dos niveles: la toma de turnos y la organización secuencial (Mazeland, 2006). En el primero se organizan y se analizan las participaciones de los interlocutores con base en el hecho de identificar cambios en sus roles (hablante-oyente). Estos cambios se identifican a través de la búsqueda de palabras, frases u oraciones denominadas unidades construccionales de turnos (TCU, por sus siglas en inglés), las cuales son reconocidas por los participantes y detonan su conversión en interlocutores. La información obtenida en la toma de turnos ofrece una visión de la forma en que se llevó a cabo la conversación y cómo cada participante interactuó en ésta para ir dando sentido a lo que se conversa.

En un segundo nivel se analizan las acciones comunicativas que coordinan los participantes en series de turnos, en las cuales atribuyen significado a los enunciados de la conversación según las situaciones en que tienen lugar y el razonamiento contextual que guía sus intervenciones. Tales acciones comunicativas conforman una organización secuencial de las interacciones conversacionales de los participantes.

Con los análisis en ambos niveles (figura 4), el AC permite obtener información de dos elementos sobre los que se estructura la conversación: la

FIGURA 4. *Esquema de acciones de análisis y estructura de la conversación*



FUENTE: elaboración propia.

forma y el modo (Wooffitt, 2005). En particular, se reporta el modo en que los estudiantes para profesor conversaron reflexivamente, es decir, la manera en que logran coordinar acciones comunicativas interrelacionadas para atribuir significado o dar sentido a los enunciados que tuvieron lugar durante la conversación reflexiva. Estas acciones proporcionan información de los patrones conversacionales en los que se generaron entendimientos compartidos sobre los tópicos de la conversación y dan cuenta del modo en que se conversa (Mazeland, 2006).

Resultados

Durante la conversación reflexiva se identificaron patrones de interacción verbal que condujeron a los futuros profesores, en primer lugar, al reconocimiento y la integración del concepto de potencia en dos dimensiones: lo conceptual y lo procedimental, en segundo lugar, a una reflexión colectiva en relación con la enseñanza de ese concepto matemático. Estos patrones fueron el resultado de la interrelación de las acciones comunicativas durante la interacción conversacional concerniente a las dos tareas planteadas. A continuación se presentan y se describen los tres patrones identificados:

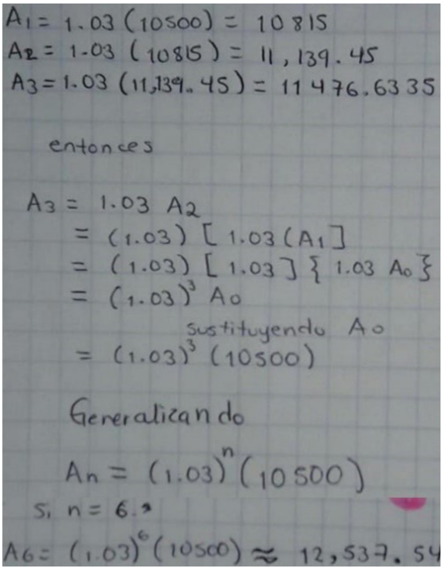
1. *Primer patrón conversacional. Análisis de la pertinencia y suficiencia del razonamiento empleado en la resolución de las tareas*

Las primeras acciones comunicativas de la conversación giraron en torno de *cómo* los participantes interpretaron y razonaron la resolución de la tarea 1. El punto de partida fue la exposición de los procedimientos matemáticos usados e, inmediatamente después, el análisis de los razonamientos asociados. Los participantes siguieron distintos razonamientos y argumentaron el *porqué* del procedimiento utilizado; por ejemplo, mientras algunos razonaron aritméticamente, otros lo hicieron algebraicamente (figura 5).

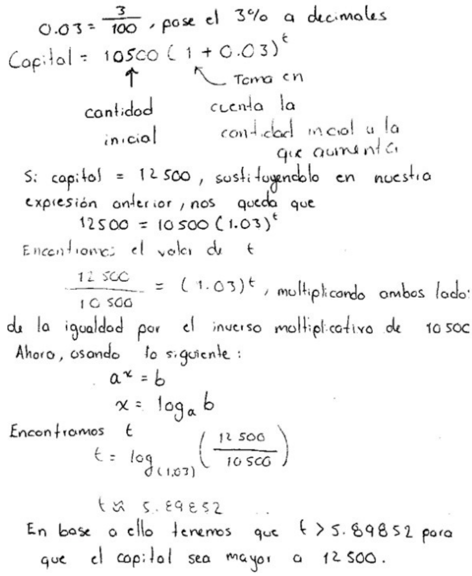
Cabe señalar que si bien para determinar en cuántos años el capital de la persona sería mayor a $12 500 (inciso *a*) bastaría con que los participan-

Figura 5. *Ejemplos de razonamientos aritméticos y algebraicos empleados por los participantes en la resolución de la tarea 1*

Razonamiento aritmético
Respuesta de H1:



Razonamiento algebraico
Respuesta de M2:
Primero propondré una fórmula o una expresión algebraica para determinar el capital de la persona en t *años.*



tes analizaran casos particulares de manera numérica, lo solicitado en el inciso *b* los llevó a generalizar el comportamiento exponencial de los valores implicados en la tarea mediante una fórmula o expresión algebraica, como se muestra en los siguientes extractos tomados de la interacción entre M1, H1 y H2.

> M1. ***Hice un proceso iterativo*** *[tarea 1, inciso b] […] Fui viendo que en el segundo año es lo que se tenía [en el primero] más el 3%; el tercer año es todo lo que se tenía más el 3%. Así me di cuenta de que se multiplicaba 1.03 un número igual de veces al número de años y así me dio la fórmula y la tuve que aplicar.*
>
> H1. *Sí, supongo que* n *vale cualquier tiempo, al realizar las operaciones se observaba que tomando* ***la expresión era multiplicar 1.03 por la cantidad***

que tuviera *[…] el* ***exponente*** *varía y lo sustituyo por n y multiplico por 10 500. Cuando resuelvo ese tipo de ejercicios,* ***observo cuál es el patrón*** *que se va repitiendo […] analizo de manera minuciosa qué se va repitiendo para establecer la expresión. En primer lugar, empecé a usar la aritmética […] Se me dificulta plantear la expresión* [algebraica]*, necesito plantear casos particulares para llegar a lo general.*

H2. *Para resolver el inciso* b*)* ***requieres un razonamiento algebraico*** *[…] Es interesante lo que comenta H1 porque* ***si lo hubiese visto de manera aritmética íbamos a ver el patrón,*** *pero a mí me costó mucho trabajo.*

El patrón conversacional en la tarea 1 estuvo compuesto por turnos de habla situados en torno del proceso matemático iterativo reconocido por los participantes. Es así como la acción comunicativa de ese patrón consistió no sólo en buscar el logro matemático de la tarea; además, fue necesario buscar la comprensión mutua de los razonamientos y los procedimientos matemáticos desarrollados en la resolución de la tarea y el tipo de contenido matemático implicado, en este caso, el concepto de potencia.

2. Segundo patrón conversacional. Reconocimiento de la naturaleza matemática de las tareas

En este patrón se identificó que la interacción conversacional tuvo lugar con respecto a discutir la naturaleza matemática de las tareas, en particular el carácter lineal o exponencial asociado al comportamiento de los valores presentes en la situación de análisis. De esta manera, cuando algunos participantes expresaron sus pensamientos respecto de cómo interpretaron que el capital de dinero presente en la situación de la tarea 1 se incrementaba de manera constante año con año, se abrió la oportunidad de que la conversación se convirtiera en un diálogo, toda vez que algunos otros participantes reconocían, dada las condiciones de los datos presentes en la tarea, una naturaleza exponencial más que lineal. Algunos extractos de la conversación reflexiva en esta dirección son los siguientes:

M4. *Al inicio lo planteé como un* ***problema lineal****, pero mientras lo realizaba me di cuenta de que* ***no había algo constante*** *que me ayudara a identificar* *esa linealidad, pero después de escuchar a M2 y en lo que se conversó, sí identifico más* ***una situación exponencial****.*

H2. *Va a haber un* ***crecimiento anual****, vas a tener tu cantidad inicial y una ganancia y* ***de esa ganancia vas a tener otra ganancia*** *[…]* ***Esto es exponencial*** *[…] Me di cuenta de que voy generando más dinero y fue cuando vi que la situación* ***no es lineal*** *sino* ***exponencial****, porque* ***tenemos una tarea de potenciación.***

En este segundo patrón conversacional se inicia una transición del carácter procedimental del contenido matemático inmerso en las tareas al carácter conceptual. La tarea 2 requería determinar el modelo que representa adecuadamente la disminución de la cantidad de dinero que adeuda una persona al ir pagando un préstamo. A diferencia de la tarea 1, era insuficiente la idea y el trabajo con potencias mediante el procedimiento de multiplicación reiterada, pues el modelo solicitado implicaba exponentes negativos de una base entera. Por lo tanto, para resolver la tarea 2 era necesario que los participantes analizaran el tipo de comportamiento (exponencial decreciente) de las cantidades de dinero que adeudaba la persona año con año.

Como parte del diálogo que caracterizó y estuvo presente en este patrón conversacional, los participantes lograron contrastar el comportamiento de los datos en las tareas resueltas y validar que, en efecto, ambas eran de naturaleza exponencial (creciente y decreciente, respectivamente) y se expresaban por medio de potencias de un número. A continuación se presentan algunos extractos que muestran parte del diálogo construido:

M1. *Como lo entendí,* [la tarea 2] ***era igual que la anterior****,* ***pero al revés*** *[…] en ese sentido la primera opción* ***quedó descartada por ser lineal*** *y me quedaron las otras dos, pero el inciso* c *tiene un signo menos, por eso elegí el* b*, ya que el signo afecta.* [En el modelo de *c*] el resultado *va a ser positivo, negativo y va a ir variando así, y no tendría sentido, por eso decidí analizar el* b.

M5. *Creo que en este caso es un medio y en el otro el 3% lo que se conservaba; en la tarea 1 afectaba a la cantidad inicial un 3% y luego a la cantidad obtenida otro 3% y eso hacía que no sea algo constante, y lo mismo pasó aho-*

ra, sólo que ***en vez de que aumente es una disminución*** *de un medio. Eso me ayudó a ver que* ***es similar a la anterior****.*

M3. *En ambas tareas hay una cantidad inicial y* ***disminuye o incrementa****, pero todos concordamos que es una modelación* ***de forma exponencial.***

Este segundo patrón conversacional relativo a la tarea 2, se compuso por turnos de habla asociados tanto a la naturaleza variacional de las situaciones de las tareas como al carácter procedimental y conceptual del contenido matemático presente en ellas. Es así como la acción comunicativa en ese patrón fue la búsqueda de un consenso y el convencimiento de que detrás de las tareas está presente el concepto de potencia como una relación que representa el aumento o la disminución exponencial de una cantidad, y no sólo como una operación matemática.

Además de lo anterior, la interacción conversacional contribuyó a darle sentido a las expresiones de potencias con exponente negativo. Asimismo, los participantes identificaron al comportamiento exponencial como la característica invariante de las situaciones inmersas en ambas tareas. La abstracción de esta idea en su pensamiento es parte del proceso de formación de un concepto (Dreyfus, 2000) que fungió como soporte del consenso y el conocimiento compartido.

3. Tercer patrón conversacional. Conceptualización (escolar) de la potencia

Las acciones comunicativas que caracterizaron a este patrón conversacional fueron el consenso y la comprensión mutua, ambas detonadas por las acciones antes descritas, pero también por un interés colectivo de reflexionar sobre la diferencia (conceptual) entre *potencia* y *potenciación*, ya que ambos términos fueron parte del contenido matemático asociado a las tareas. En los extractos siguientes se ejemplifica parte de lo conversado por los participantes al respecto:

H2. *Esta* **tarea** [tarea 2] ***algebraica es de potenciación*** *[…] En* ***la primera tarea vemos un crecimiento y en la segunda un decrecimiento****, pero lo que comparten es la presencia de una* ***base elevada a un exponente y eso es lo***

que relaciona a ambas tareas *[…] Se me hizo más fácil responder la tarea 2 porque ya veía el comportamiento […] Cuando hablamos de* ***exponentes*** *estoy pensando en* ***potencias****.* ***No es lo mismo la potencia que potenciación****: la potencia se refiere a representar al objeto de exponente, y la potenciación, a ese comportamiento que estamos tratando con potencias.*

M4. *Cuando se hizo el análisis aritmético, es decir,* ***la multiplicación de 1.03*** *a eso se le puede decir* ***potenciación,*** *y* ***potencia*** *es cuando se llega a* **la expresión 10500 $(1.03)^n$.**

M1. ***Potenciación*** *es el* ***procedimiento, (10500)(1.03), (10500)(1.03)(1.03), y*** *y la* ***potencia*** *es el* ***resultado.***

Con base en una mirada del conocimiento matemático involucrado en las tareas se puede afirmar que los participantes lograron consensuar qué es potencia y qué es potenciación. Y aunque ese consenso queda enmarcado en una visión (colectiva) de proceso-resultado, como puede extraerse de las expresiones lingüísticas anteriores, también se reconoce una conceptualización de la potencia entendida como una relación matemática que cualifica y cuantifica ciertas situaciones de variación exponencial.

Reflexiones y conclusiones

En este estudio se identificaron tres patrones conversacionales asociados al funcionamiento de la interacción al hablar y reflexionar entre estudiantes para profesor de matemáticas sobre la solución de tareas que involucran potencias. Los patrones fueron los siguientes: el análisis de la pertinencia y la suficiencia del razonamiento utilizado en la resolución de las tareas, la naturaleza de las tareas implementadas y la conceptualización escolar de potencia. Estos patrones aportan información del modo en que la conversación reflexiva puede contribuir al aprendizaje y al desarrollo de conocimiento matemático en los futuros profesores, particularmente en lo relativo al concepto de potencia. Es decir, informan de las acciones (sociales) comunicativas y de los tópicos de la conversación que hacen posible la generación de significados o entendimientos compartidos para el desarrollo de ese conocimiento.

Desde el primero hasta el tercer patrón conversacional se puede ver que los participantes lograron articular la parte conceptual y procedimental del aprendizaje matemático. Conceptualmente, reconocieron la potencia como una relación matemática de aumento o disminución de una cantidad de manera exponencial, distinguieron entre potencia y potenciación e interpretaron el significado de expresiones de potencias con exponente negativo. Procedimentalmente, realizaron la multiplicación iterativa de un número por sí mismo, generalizaron algebraicamente relaciones numéricas con potencias y representaron numérica y algebraicamente comportamientos exponenciales de cantidades.

De manera que, la conversación reflexiva fomentó la distinción de la dualidad objeto-proceso del concepto potencia (Sfard, 1991). Además de la importancia que para la enseñanza de los conceptos matemáticos tiene reconocer su carácter dual, en relación con el proceso instructivo del concepto abordado en este estudio, otro aspecto que favoreció la conversación reflexiva en los futuros profesores fue la conceptualización (y la generalización) de la potencia como una relación matemática en el contexto de ciertas situaciones de variación exponencial. La visión del comportamiento exponencial que resulta de un proceso de potenciación es esencial para generalizar el entendimiento de la potencia e interpretar expresiones con exponente no natural (Weber, 2002; Pitta-Pantazi *et al.,* 2007).

Algunos elementos del espacio de conversación reflexiva que pudieron producir los patrones conversacionales observados fueron, por un lado, el desarrollo de experiencias de aprendizaje colectivas centradas en la resolución y la discusión de tareas matemáticas, las cuales implicaban entender la potencia como operación y relación en situaciones de comportamiento exponencial. Por otro lado, el cuestionar, confrontar, argumentar e intentar entender el cómo y el porqué de los procesos y los conocimientos involucrados en las tareas. Y, finalmente, reflexionar entre pares mediante la conversación para generar consensos sobre las acciones y los pensamientos opuestos que tuvieron lugar en la interacción del habla, tales como lo lineal *vs.* lo exponencial y el razonamiento aritmético *vs.* el algebraico.

Aun cuando la verificación de las características del espacio de conversación reflexiva no estuvo al alcance de este estudio, se dejaron entrever elementos como los anteriores. Por consiguiente, se considera pertinente ampliar el campo de las investigaciones acerca de los procesos de aprendizaje y desarrollo de conocimiento profesional docente en matemáticas, especialmente en la línea de clarificar y validar las características de los espacios de conversación reflexiva que pudieran contribuir al desarrollo de esos procesos.

Referencias

Aparicio, E., Sosa, L., y Cabañas, G. (2021). Reflective conversation and knowledge development in pre-service teachers: the case of mathematical generalization. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST), 9*(1), 40-62, en https://doi.org/10.46328/ijemst.977.

Aparicio, E., Sosa, L., Cabañas, G., y Gómez, K. (2020). Reflexive conversation: approach to the professional learning of pre-service mathematics teachers. *Universal Journal of Educational Research, 8*(5),1797-1809.

Avcu, R. (2010). Eight graders' capabilities in exponents: making mental comparisons. *Practice and Theory in System of Education, 5*(1), 39-48.

Campos, K., y Sosa, L. (2021). Potencia como relación y operación. Análisis del conocimiento matemático para la enseñanza del concepto. En C. Cuevas y M. Martínez (coords.), *Investigaciones educativas: la enseñanza del cálculo, las ciencias y matemáticas* (pp. 199-206). Ciudad de México: Asociación Mexicana de Profesionales de la Edición.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253, en https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981.

Castillo, L., Galvis, F., y Parada, S. (2015). Errores en los que recaen los estudiantes de séptimo grado cuando resuelven situaciones que implican el uso de la potenciación y sus propiedades. *Revista Colombiana de Matemática Educativa,1*(1),107-112.

Chauraya, M., y Brodie, K. (2018). Learning in professional learning communities: shifts in mathematics teacher practices. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 21*(3), 223-233.

Crider, M. (1998). The effects of using "splitting" multiplicative structures on students' understanding of integer exponents [tesis doctoral no publicada], Texas A y M University, Texas.

Dewey, J. (1933). *How we think*. Nueva York: Dover Publications.

Earl, L., y Timperley, H. (2009). *Professional learning conversations: challenges in using evidence for improvement*. Toronto: Springer, en DOI: 10.1007/978-1-4020-6917-8.

Feldman, A. (1999). The role of conversation in collaborative action research. *Educational Action Research, 7*(1), 125-144, en http://dx.doi.org/10.1080/09650799900200076.

Gallardo-Paúls, B. (1996). *Análisis conversacional y pragmática del receptor*. Valencia, España: Ediciones Episteme.

González, M., y Lema, R. (2016). Análisis conversacional como método de evaluación de los mensajes gráficos. *Razón y Palabra, 20*(95), 629-658, en https://www.redalyc.org/pdf/1995/199550145039.pdf.

Hamel, R. E. (1984). Análisis conversacional. *Estudios de Lingüística Aplicada*, (3), 9-89, en https://doi.org/10.22201/enallt.01852647p.1984.3.27

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., y Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: an exploratory study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430-511, en https://doi.org/10.1080/07370000802177235.

Hoover, M., Mosvold, R., Ball, D. L., y Lai, Y. (2016). Making progress on mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Enthusiast, 13*(1), 3-34.

İymen, E., y Duatepe-Paksu, A. (2015). Analysis of 8th crade students› number sense related to the exponents in terms of number sense components. *Education y Science, 40*(177), 109-125.

Kaminsky, E. (2003). Promoting pre-service teacher education students' reflective practice in mathematics, *Asia-Pacific Journal of Teacher Education, 31*(1), 21-32.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). Nueva York: Macmillan.

Kolb, A., y Kolb, D. (2017). *The experiential educator. Principles and practices of experiential learning*. Kaunakakai, Hawaii: EBLS Press.

Lehtinen, E., Merenluoto, K., y Kasanen, E. (1997). Conceptual change in mathematics: from rational to (un)real numbers. *European Journal of Psychology of Education, 12*(2), 131-145.

Levenson, E. (2012). Teachers' knowledge of nature of definitions: the case of the zero exponent. *Journal of Mathematical Behavior, 31*, 209-219.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 405-427.

Louie, N. (2016). Tensions in equity and reform-oriented learning in teachers' collaorative conversations. *Teaching and Teacher Education 53*(2016), 10-19.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(2), 195-218.

Martínez, C., y Penalva, M. (2006). Proceso de simbolización del concepto potencia: análisis de libros de texto en secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(2), 285-298.

Mazeland, H. (2006). Conversation analysis. *Encyclopedia of language and linguistics, 3,* 153-163.

Pino-Fan, L., y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Pitta-Pantazi, D., Christou, C., y Zachariades, T. (2007). Secondary school student's levels of understanding in computing exponents. *Journal of Mathematical Behavior, 26(*1), 301-311.

Pochulu, M. (2009). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a universidad. *Revista Iberoamericana de Educación, 1*(1), 6-13.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Potari, D., y Ponte, J. P. (2017). Current research on prospective secondary mathematics teachers' knowledge. En G. Kaiser (ed.), *The mathematics education of prospective secondary teachers around the world* (pp. 3-15). Springer, Cham, en DOI: 10.1007/978-3-319-38965-3_2.

Ramazan, A. (2010). Eight graders´capabilities in exponents: making mental comparison. *Practice and Theory in Systems of Educations, 5*(1), 39-48.

Saylor, L., y Johnson, C. (2014). El papel de la reflexión en la formación y el desarrollo de profesores de matemáticas y ciencias elementales: una meta. *Ciencias y Matemáticas Escolares, 114*(1), 30-39.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Silverman, J., y Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 499-511, en https://doi.org/10.1007/s10857-008-9089-5.

Simoncini, K. M., Lasen, M., y Rocco, S. (2014). Professional dialogue, reflective practice and teacher research: Engaging early childhood pre-service teachers in collegial dialogue about curriculum innovation. *Australian Journal of Teacher Education, 39*(1), 27-44.

Weber, K. (2002). Developing students' understanding of exponents and logarithm. En D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant and K. Nooney (eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of 24th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1019-1027). Athens, Georgia.

Wooffitt, R. (2005). *Conversation analysis and discourse analysis: a comparative and critical introduction*. Londres: SAGE publication.

6. Razonamiento abductivo en la generalización de patrones cuadráticos

Karina Nuñez-Gutierrez [1]
Guadalupe Cabañas-Sánchez

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar el razonamiento abductivo a partir de los argumentos de dos profesores de matemáticas de secundaria en el contexto de generalización de patrones cuadráticos. Para ello, a través de un estudio de caso, se reconstruyeron los argumentos de los profesores junto con el razonamiento en la solución a una tarea, con base en una propuesta teórico-metodológica que integra tres elementos del modelo argumentativo de Toulmin con las definiciones de Peirce. Los resultados de la investigación evidencian que el razonamiento abductivo de los profesores se caracterizó por el estudio de los casos particulares a través de la observación, la descomposición de figura y el conteo de los objetos del patrón figural, reconocimiento del comportamiento regular y formulación de conjeturas de forma numérica y/o algebraica.

Palabras claves: *razonamiento abductivo, patrón figural, profesor de matemáticas, generalización.*

Introducción

El razonamiento abductivo es uno de los procesos del pensamiento que contribuye al descubrimiento de nuevas ideas o conocimientos matemáticos (Park y Lee, 2018). El término *abducción* se atribuye al filósofo y se-

[1] Especialidad Matemática Educativa. Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2471-0440

miótico Charles Peirce (Reid, 2018), quien lo relaciona con la capacidad de crear, observar, descubrir hechos o reglas sorprendentes, que se expresan en términos de hipótesis o conjetura, la cual demanda una explicación y, en caso de ser verdadera, implica la verdad de los hechos (Reid, 2018; Soler-Álvarez y Manrique, 2014).

Según esta postura, se consideran otros procesos del pensamiento como la inducción y la deducción, que en conjunto con la abducción permiten el desarrollo del método científico (Peirce, 1976). En este sentido, el razonamiento abductivo elabora y formula conjeturas, el inductivo las verifica y el deductivo las valida (Soler-Álvarez y Manrique, 2014). Por tanto, el razonamiento abductivo genera nuevos conocimientos, mientras que el inductivo y el deductivo los garantizan.

En educación matemática las investigaciones sobre el razonamiento abductivo reconocen su importancia en la formulación de conjeturas, demostraciones y generalizaciones plausibles (Rivera y Becker, 2007). Estos estudios se han enfocado en los contextos de geometría (Baccaglini-Frank, 2019; Pedemonte, 2018; Pedemonte y Reid 2011), álgebra (Hidayah, Sa'dijah y Sudirman, 2020; Reid, 2003; Rivera, 2018; Rivera y Becker, 2007), cálculo (Park y Lee, 2016) y resolución de problemas (Cifarelli, 1997, 2016). Otras han combinado su estudio con otras formas del razonamiento matemático, como abductiva e inductiva (Rivera y Becker, 2007; Radford, 2008), abductiva y deductiva (Shodikin, 2017), y abductiva, inductiva, deductiva y analógica (Conner, *et al.,* 2014; Reid y Knipping, 2010; Soler-Álvarez y Manrique, 2014; Arce y Conejo, 2019; Cervantes-Barraza, Ordóñez-Cuastumal y Carballo-Morales, 2020).

Estudios que se ocuparon en examinar el razonamiento de estudiantes de distintos niveles escolares y de profesores de matemáticas en formación mientras resolvían tareas en distintos contextos. Sin embargo, son escasas las investigaciones que han profundizado en el razonamiento matemático del profesor de matemáticas en servicio que exploren y expliquen su pensamiento en la resolución de tareas, contextos de enseñanza o desarrollo profesional docente (Bragg y Herbert, 2018; Sosa-Moguel *et al.,* 2019).

El currículo escolar de matemáticas reconoce que el razonamiento es parte central de la actividad matemática y los profesores son responsables de su promoción. Es importante que el profesor de matemáticas en servicio se interese por promover oportunidades de aprendizaje en sus estudiantes que a su vez contribuyan en el desarrollo de competencias matemáticas como el razonamiento. Además, se demanda el desarrollo de habilidades como la exploración de casos particulares, la formulación de conjeturas, la generalización y la argumentación (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000), las cuales son componentes del razonamiento abductivo. En particular, la generalización ha sido ampliamente estudiada en educación matemática y se vincula con la abducción porque es útil en el reconocimiento de patrones (NCTM, 2000; Rivera y Becker, 2007).

En el marco de las investigaciones sobre el razonamiento abductivo y la generalización de patrones, principalmente en las de tipo cuadrática, se han reportado dificultades asociadas con la identificación de la regularidad del patrón (Krebs, 2005; Ebersbach y Wilkening, 2007), la construcción de relaciones funcionales entre los objetos del patrón y el número de etapa y la representación del comportamiento identificado a través de notaciones simbólicas (aritméticas y algebraicas). Además, se identificó que en el análisis de los patrones su comportamiento sólo se representa de forma recursiva más que en el de correspondencia (Carraher, Martínez y Schliemann, 2008). Dificultades que posiblemente pueden estar vinculadas con los procesos de enseñanza en el desarrollo del pensamiento matemático (Amit y Neria, 2008).

De ahí el interés de esta investigación por caracterizar el razonamiento abductivo a partir de los argumentos de dos profesores de matemáticas de secundaria en el contexto de generalización de patrones cuadráticos.

Marco conceptual

Esta investigación se sustenta teóricamente en los conceptos de razonamiento abductivo, argumentación y generalización. Para su estudio se considera la propuesta teórico-metodológica de Soler-Álvarez y Manrique (2014).

Razonamiento abductivo

La abducción es el razonamiento que estudia un fenómeno, en el que se implica el análisis de sus características y la identificación de algunas relaciones entre ellas (Soler-Álvarez y Manrique, 2014). El razonamiento abductivo tiene como objetivo la construcción de conjeturas y considera tres procesos matemáticos: el estudio de casos, la observación de patrones, regularidades o propiedades, y la formulación de la conjetura.

El estudio de casos consiste en la manipulación y la transformación de diferentes representaciones que permiten la observación de regularidades; la observación de patrones, regularidades o propiedades es la identificación de lo común en las representaciones, y la formulación de conjetura refiere a las diferentes formas de expresar lo comúnmente identificado (Soler-Álvarez y Manrique, 2014).

Argumentación

La argumentación es el medio de expresión del pensamiento que explica y justifica el razonamiento (Conner *et al.*, 2014). El razonamiento agrupa un conjunto de argumentos basado en una serie de proposiciones que implica una conclusión inferida de los datos (Toulmin, Rieke y Janik, 1984). Los argumentos pueden ser esquematizados a través del modelo de Toulmin (Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2007) y su estructura está conformada por seis elementos: datos (D), conclusión (C), garantía (G), soporte (S), refutación (R) y calificador modal (C) (véase figura 1).

Para esta investigación, el estudio de los argumentos permite caracterizar el razonamiento abductivo y se considera el modelo básico de Toulmin, que es el núcleo del argumento datos (D), conclusión (C) y garantía (G) (véase figura 2).

En la estructura del razonamiento abductivo, Soler-Álvarez y Manrique (2014) integran lo planteado teóricamente por Peirce (1976) con Cañadas y Castro (2007), por medio del modelo argumentativo de Toulmin. La estructura considera los cuatro primeros pasos establecidos por Cañadas y Castro (2007): observación de casos particulares, organización de casos particulares, identificación del patrón y formulación de la conjetura. En el modelo de Toulmin, la observación y la organización de los casos

FIGURA 1. *Modelo argumentativo de Toulmin (Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2007)*

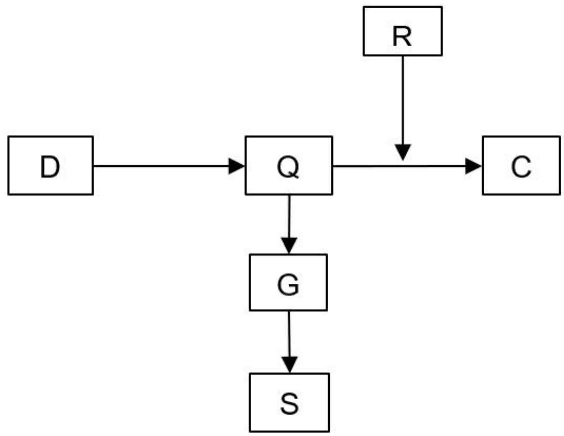
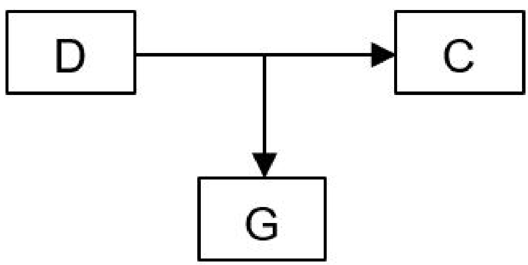


FIGURA 2. *Modelo argumentativo básico de Toulmin*

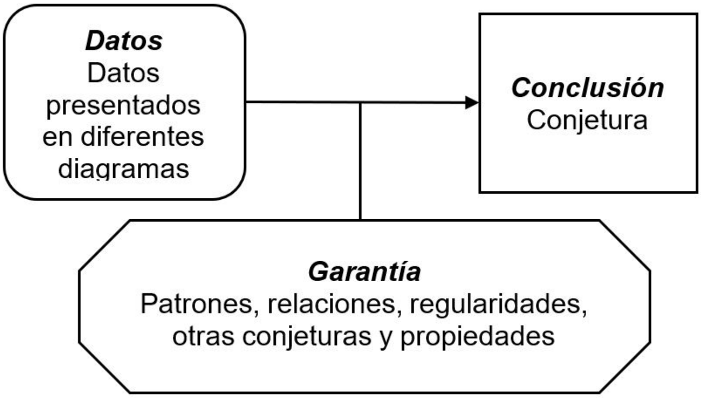


particulares corresponden a los datos iniciales del razonamiento; la búsqueda y la predicción de patrones, a la garantía, y la formulación de conjeturas, a la conclusión (véase figura 3).

Generalización de patrones

La generalización es la identificación de un comportamiento regular, con el fin de extender esta regularidad hacia otros términos y construir una regla general que relacione todos los elementos de la sucesión (Radford, 2008). El reconocimiento de patrones es esencial para la generalización

Figura 3. *Esquema de razonamiento abductivo*



(Polya, 1966), porque permite construir fórmulas y relaciones generales desde la regularidad observada.

Los patrones son repeticiones que se comportan de acuerdo con una regularidad, asociados con representaciones. Un patrón figural es una sucesión o secuencia de objetos con una configuración bien definida en representaciones esquemáticas que exhiben características matemáticas específicas (Rivera, 2010).

Método

La investigación analizó un estudio de caso (Merriam y Tisdell, 2015) para profundizar en el razonamiento abductivo de dos profesores de matemáticas de secundaria en el marco de la generalización de patrones cuadráticos.

Contexto y participantes de la investigación

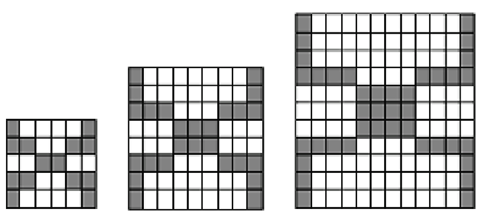
Se diseñó e implementó un curso-taller en modalidad virtual dirigido a profesores de matemáticas en servicio, como escenario para la recolección de datos, en el que los profesores resolvieron tareas de generalización de patrones. Se implementó en 12 sesiones de 2.5 horas y 15 horas de trabajo independiente, las cuales fueron videograbadas.

En la investigación participaron voluntariamente 16 profesores. Dos de ellos (P1 y P2) fueron seleccionados para las unidades del estudio de caso (un hombre y una mujer), procedentes de México y Colombia, con 5 a 18 años de experiencia docente.

Tarea sobre la generalización de patrones cuadráticos

Para fines del capítulo de este libro se presenta el análisis de una de las tareas en el contexto de la generalización de patrones figurales de tipo cuadrático (véase cuadro 1).

CUADRO 1. *Tarea del patrón cuadrático de la rana*

Tarea de la rana	***Características***
Observa la secuencia de las siguientes figuras. Justifica ampliamente el proceso de solución en cada una de las preguntas.  Figura 1 Figura 2 Figura 3 *a.* ¿Cuántos cuadrados grises conforman la figura 5? *b.* ¿Cuántos cuadrados grises conforman la figura 7? *c.* ¿Cuántos cuadrados grises conforman la figura *n*?	Adaptada de Rivera (2010). El contexto de la tarea es un patrón figural creciente con progresión aritmética de orden 2 en los números naturales. Demanda la explicación del comportamiento del patrón figural en etapas cercanas y en cualesquiera de las etapas, asociada a la variable *cuadrados grises.*

Análisis de los datos

El análisis del razonamiento abductivo de los PMS siguió tres fases: *1)* reconstrucción de la argumentación de los profesores basados en las producciones escritas de la tarea y entrevista semiestructurada, para lo cual se utilizó el modelo de Toulmin; *2)* caracterización del razonamiento abductivo a partir de la propuesta teórico-metodológica de Soler-Álvarez y Manrique (2014), y *3)* triangulación de las fases anteriores, con investigadores expertos en argumentación, generalización y razonamiento matemático.

Resultados

Los resultados caracterizan el razonamiento abductivo evidenciado por cada profesor de matemáticas (P1 y P2) al resolver la tarea de la rana, que consistió en el análisis de un patrón figural en etapas cercanas y para cualquier etapa. El razonamiento abductivo de los profesores se caracterizó por el estudio de los casos particulares, la identificación del patrón y la formulación de una conjetura. P1 siguió dos formas o rutas de resolver la tarea mientras que P2 siguió una (véase cuadro 2).

Razonamiento abductivo de P1

El razonamiento abductivo de P1 se movilizó en dos rutas. La primera consistió en la formulación de una conjetura desde la construcción de una relación recursiva, a través de las diferencias entre los primeros términos, y la segunda, en la formulación de una conjetura a partir de una relación funcional entre los cuadrados grises y el número de figura.

a) Ruta 1. Una de las demandas de la tarea consistió en establecer la cantidad de cuadrados grises en la figura 5 como etapa cercana del patrón. P1 estableció una relación de recurrencia o recursiva, donde cualquier término se obtiene usando el término anterior más el incremento de una figura a otra. Para ello, el profesor transitó por tres procesos:

Cuadro 2. *Tarea del patrón cuadrático de la rana*

<table>
<tr><th rowspan="2">Profesor</th><th rowspan="2">Ruta</th><th colspan="3">Momentos del razonamiento abductivo</th></tr>
<tr><th>Estudio de los casos particulares</th><th>Identificación del patrón</th><th>Formulación de la conjetura</th></tr>
<tr><td rowspan="2">P1</td><td>R1</td><td>Conteo de los cuadrados grises y blancos</td><td>La diferencia entre la cantidad de cuadrados grises no es constante</td><td>El incremento en las diferencias es de dos unidades</td></tr>
<tr><td>R2</td><td>Conteo de los cuadrados grises en dos partes (cuatro extremos en forma de L y centro)</td><td>Cuatro extremos: dos veces el número de la figura más 2. Centro: el número de la figura por el número de la figura siguiente</td><td>$4(2n+1)+n(n+1)$</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>R1</td><td>Conteo de los cuadrados grises en dos partes (cuatro patas y cuerpo de la rana)</td><td>Cuatro patas: el número de la figura más el número de la figura más uno. Centro: el producto del número de la figura por el siguiente</td><td>$4[n+(n+1)+n(n+1)$</td></tr>
</table>

1) Identificó el total de cuadrados en las etapas conocidas (conclusión) a partir de las representaciones del patrón figural dadas en la tarea (datos) por medio del conteo total de los cuadrados grises, en cada una de las figuras conocidas (garantía) (véase figura 4).

2) Determinó la cantidad que aumenta de una figura a otra. Para la figura 2 hay un aumento de 12 cuadrados grises y para la 3, un incremento de 14 (véase figura 5).

El aumento que identificó P1 corresponde a las diferencias entre términos de la sucesión.

3) Formuló una conjetura verbal sobre el comportamiento del patrón figural, en el que el incremento corresponde a dos unidades más con respecto al anterior (véase figura 6).

Esta primera conjetura formulada por P1 (dato) le permitió responder

Figura 4. *Argumento en el estudio de casos particulares de P1 en la ruta 1*

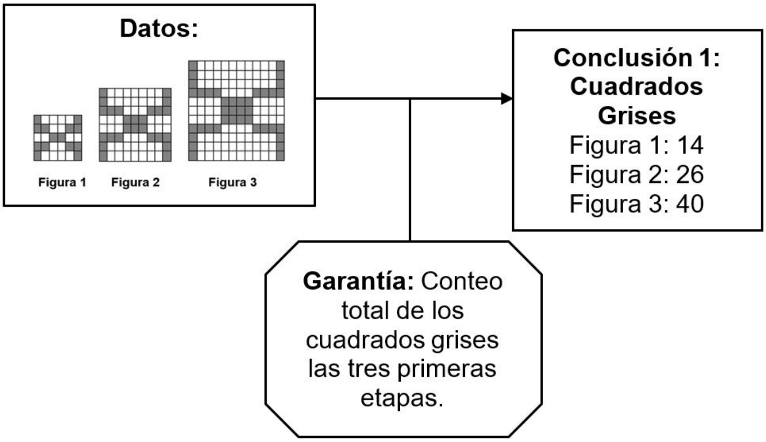
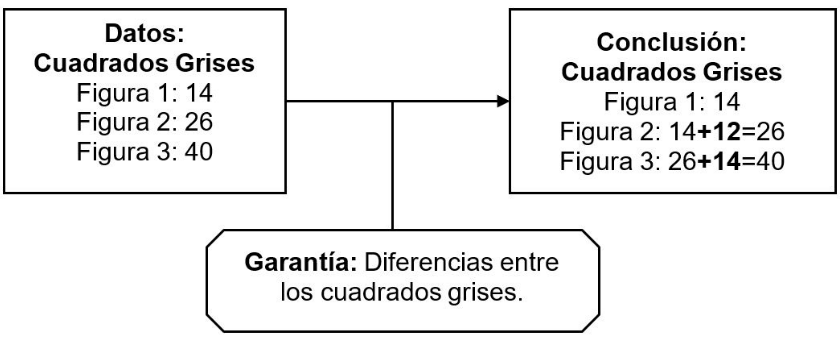


Figura 5. *Argumento en la identificación del patrón de P1 en la ruta 1*



la cuestión de la tarea sobre la cantidad de cuadrados grises en la figura 5, que corresponde a 74 cuadrados grises (conclusión). La garantía es la regla recursiva identificada por P1 en relación con el incremento que hay en las figuras 4 y 5 (véase figura 7).

b) Ruta 2. Para responder la cuestión sobre la cantidad de cuadrados grises en la figura 7, y para cualquier figura, P1 siguió otra ruta con evidencias del razonamiento abductivo. En este sentido, P1 estableció una relación de correspondencia entre la cantidad de cuadrados grises y el número de figura, como conjetura. Para su formulación, el profesor:

1) Identificó la cantidad de cuadrados grises en los extremos y en el centro de la rana (conclusión) desde la representación del patrón figural

FIGURA 6. *Argumento en la formulación de la conjetura de P1 en la ruta 1*

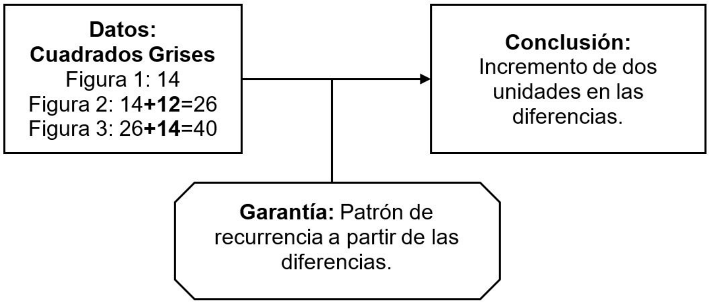


FIGURA 7. *Argumento en el uso de la conjetura de P1 en la ruta 1*

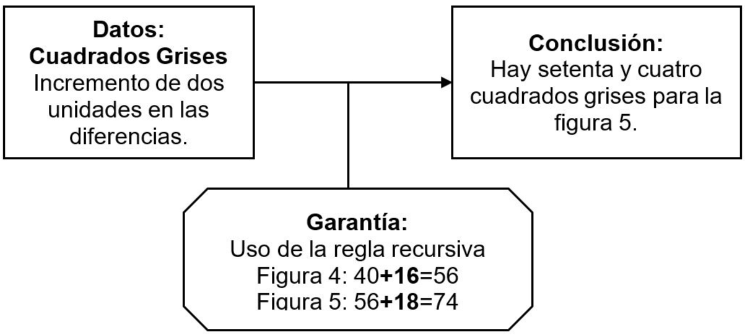
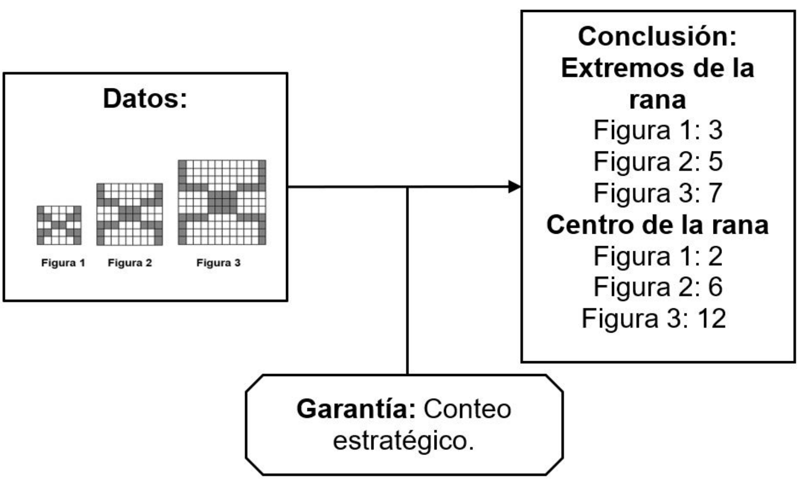


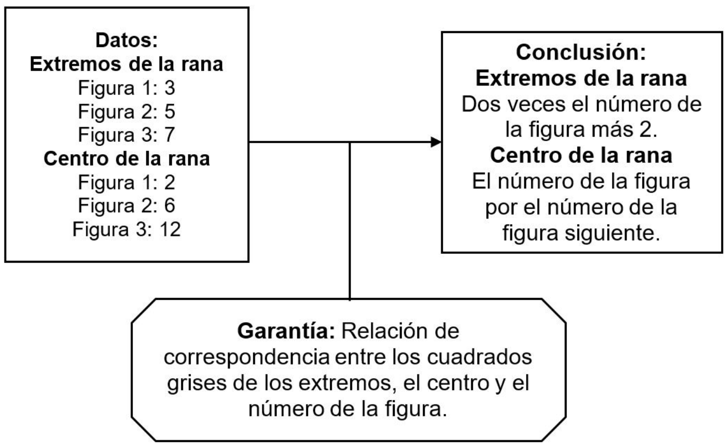
FIGURA 8. *Argumento en el estudio de casos particulares de P1 en la ruta 2*



dada en la tarea (datos) por medio de un conteo estratégico (garantía) (véase figura 8).

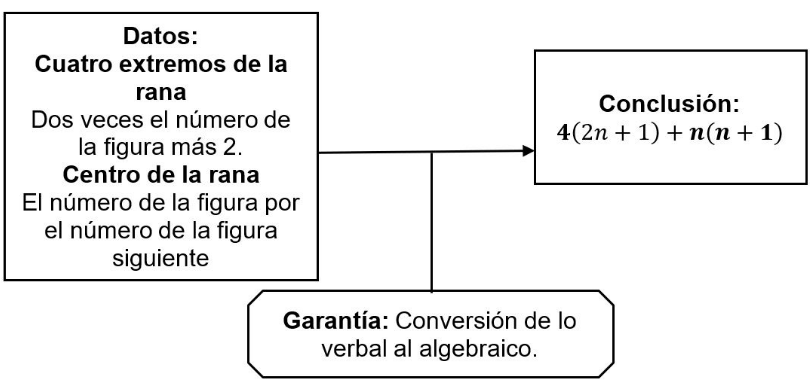
2) Estableció que el comportamiento en los extremos de la rana es dos veces el número de la figura más dos, y en el centro, el número de la figura por la siguiente (véase figura 9).

Figura 9. *Argumento en la identificación del patrón de P1 en la ruta 2*



3) Representó, a través de expresiones algebraicas en términos de *n,* el comportamiento identificado por P1 en relación con la cantidad de cuadrados grises y el número de figura (véase figura 10).

Figura 10. *Argumento en la formulación de la conjetura de P1 en la ruta 2*



La conjetura formulada por P1 le permitió responder las cuestiones sobre la cantidad de cuadrados grises para cualquier número de figura y la figura 7. La conjetura fue simplificada a la forma $n^2 + 9n + 4$. Para la séptima etapa, en la expresión algebraica P1 sustituyó el número de figura, obteniendo como resultado 176 cuadrados grises (véase figura 11).

FIGURA 11. *Sustitución en la expresión algebraica construida por P1*

Para la Fig. 7.

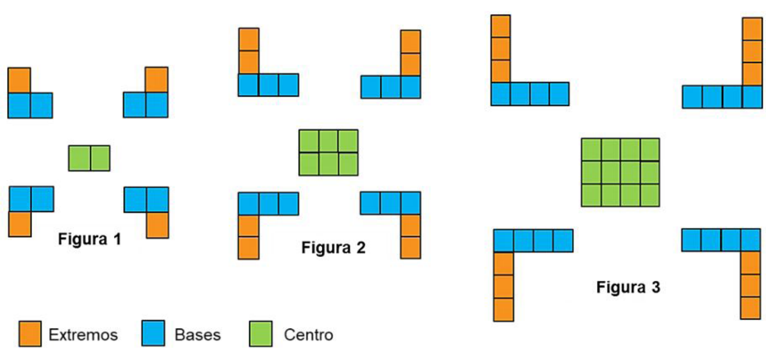
$$n^2 + 9n + 4 = (7)^2 + 9(7) + 4 = 49 + 63 + 4$$
$$= \underline{116}$$

Razonamiento abductivo de P2

Para responder las cuestiones sobre la cantidad de cuadrados grises en las etapas cercanas y para cualquier número de figura, P2 decidió primero establecer una relación funcional que relacione estas dos variables y luego responder sobre los casos particulares. En la formulación de la conjetura, P1 siguió la ruta:

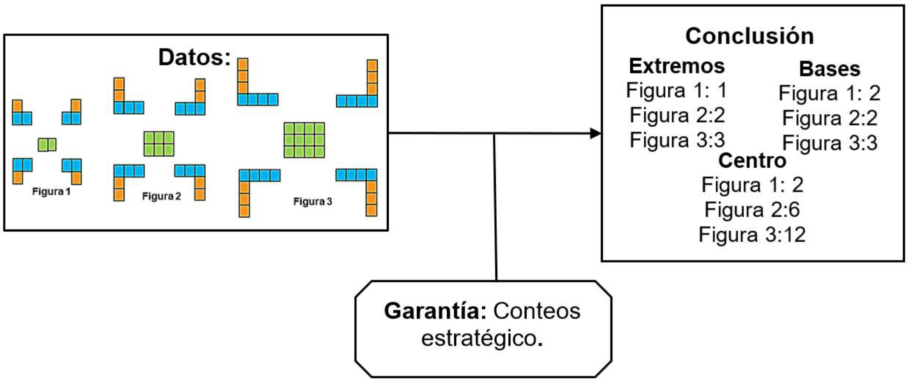
1) Descomponer las figuras en tres partes: centro de la rana, extremos y bases de las patas de la rana (véase figura 12).

FIGURA 12. *Descomposición del patrón figural de la rana realizada por P1*



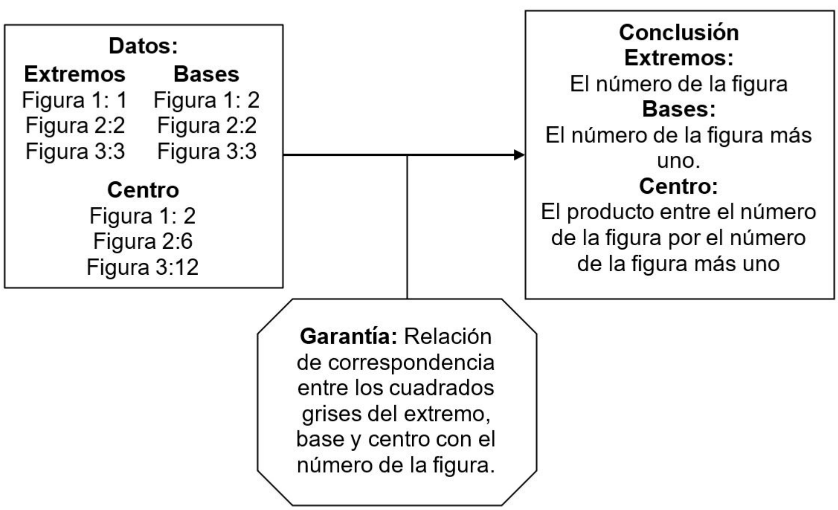
2) Contar los cuadrados grises en cada una de las partes (véase figura 13).

FIGURA 13. *Argumento en el estudio de casos particulares de P2*



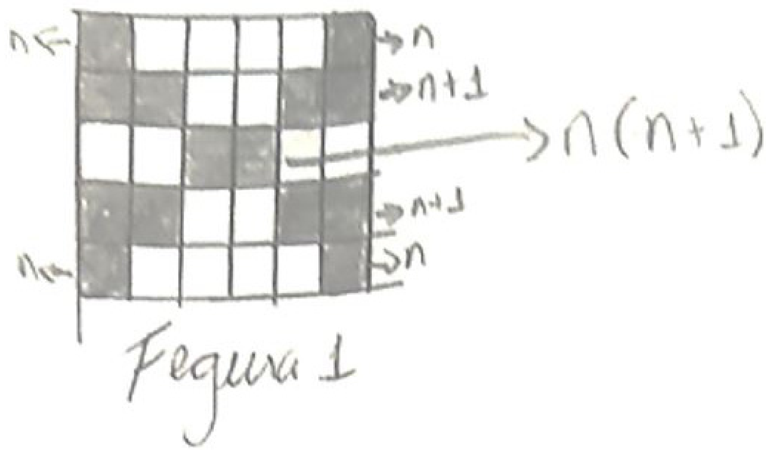
3) Identificó que el comportamiento del patrón figural de la rana corresponde al número de la figura en los extremos de las patas, el número de la figura más uno en las bases de las patas, y en el centro P1 reconoce un rectángulo, lo asocia con el área de un rectángulo y lo expresa como el producto entre el número de la figura (altura) por el número de la figura más uno (base) (véase figura 14).

FIGURA 14. *Argumento en la identificación del patrón de P1 en la ruta 2*



4) Formuló una conjetura basada en la relación de correspondencia entre la cantidad de cuadrados grises con fundamento en la descomposición y el número de figural, lo cual es expresado algebraicamente en términos de n y corresponde a la forma: $4[(n) + (n + 1)] + n(n + 1)$ (véase figura 15).

FIGURA 15. *Expresión algebraica construida por P2*



Reflexiones finales

El interés de esta investigación radica en caracterizar el razonamiento abductivo de dos profesores de matemáticas de secundaria a partir de sus argumentos en el contexto de la generalización de patrones cuadráticos. En el análisis se utilizó la propuesta teórico-metodológica de Soler-Álvarez y Manrique (2014).

Con base en los argumentos de los profesores se evidenciaron dos formas diferenciadas de razonar abductivamente: abducción desde lo figural y abducción desde lo numérico.

La primera se caracterizó por la descomposición de las figuras y los conteos estratégicos, que permitió el reconocimiento del comportamiento del patrón figural y la formulación de la conjetura de manera verbal y algebraica. La segunda consistió en la traducción de la representación figural del patrón a una representación numérica, que implicó el conteo total de los objetos de las figuras, y desde lo numérico, formular una conjetura verbal a través del método de diferencias.

En este sentido, se reconoce que las tareas de generalización de patrones figurales promueven el razonamiento abductivo y facilitan la construcción de múltiples reglas generales (Rivera, 2010).

A nivel curricular, la conjeturación es uno de los objetivos de la generalización (NCTM, 2000). Además, es terreno útil para desarrollar habilidades en los estudiantes de distintos grados escolares vinculadas con el razonamiento abductivo, como la exploración, el descubrimiento, la visualización, la conjeturación, el estudio de patrones, la construcción de relaciones funcionales y el uso de distintas representaciones.

Las investigaciones sobre el razonamiento consideran importante comprender el pensamiento del profesor Kirwan (2015), quien asume un rol indispensable en los procesos de enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, se ha reportado que las metodologías utilizadas por los profesores están asociadas con procesos algorítmicos, en las cuales predomina la utilización de actividades que demandan poca actividad cognitiva (Batanero *et al.,* 2015). Por su parte, el desarrollo del razonamiento abductivo facilita el descubrimiento de hechos sorprendentes y la construcción de nuevos conocimientos, los cuales invitan a la reflexión de procesos matemáticos y permite el tránsito entre diferentes formas de representar objetos, lo que amplía la actividad matemática.

Referencias

Amit, M., y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 111-129.

Arce, M., y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: relaciones con el conocimiento matemático. *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 163-172). Valladolid: SEIEM.

Baccaglini-Frank, A. (2019). Dragging, instrumented abduction and evidence, in processes of conjecture generation in a dynamic geometry environment. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *51*(5), 779-791.

Bernabeu, M. D. C. B., Gómez, E., García, J. M. C., y Batanero, M. C. D. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: Un estudio exploratorio. *Praxis Educativa*, *10*(1), 11-34.

Bragg, L., y Herbert, S. (2018). What can be learned from teachers assessing mathematical reasoning: a case study. *Proceedings of the 41st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 178-185). Auckland: Merga.

Cañadas, M., y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 3-22.

Cervantes-Barraza, J., Ordoñez-Cuastumal, J. S., y Morales-Carballo, A. (2020). Los argumentos de estudiantes universitarios en la solución de problemas sobre ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). *Innovación Educativa, 20*(82), 83-104.

Cifarelli, V. (1997). Emergence of novel problem solving activity. En E. Pehkonen (ed.), *Proceedings of the 21st Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 145-152). Lahti, Finland: University of Helsinki and Lahti Research and Training Center.

Cifarelli, V. V. (2016). The importance of abductive reasoning in mathematical problem solving. En *Semiotics as a Tool for Learning Mathematics* (pp. 209-225). Sense Publishers.

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P. A., y Francisco, R. T. (2014). Identifying kinds of reasoning in collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 181-200.

Ebersbach, M., y Wilkening, F. (2007). Children's intuitive mathematics: the development of knowledge. *Child Development, 78*, 296-308.

Hidayah, I. N., y Sa'dijah, C. (2020). Characteristics of students' abductive reasoning in solving algebra problems. *Journal on Mathematics Education*, *11*(3), 347-362.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P. y Simpson, A. (2007) Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics,* 66, 3-21, en https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8.

Krebs, A. S. (2005). Take time for action: studying students' reasoning in writing generalizations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 10*(6), 284-287.

Kirwan, J. V. (2015). *Preservice secondary mathematics teachers knowledge of generalization and Justification on Geometric-Numerical Patterning Tasks* [tesis doctoral, Universidad Estatal de Illinois], en https://ir.library.illinoisstate.edu/etd/392/.

Merriam, S. B., y Tisdell, E. J. (2015). *Qualitative research: a guide to design and implementation*. John Wiley y Sons.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Park, J., y Lee, K.-H. (2016). How can students generalize the chain rule? The roles of abduction in mathematical modeling. *Eurasia Journal of Mathematics, Science y Technology Education, 12*(9), 2257-2278, en https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1289a.

Park, J. H., y Lee, K.-H. (2018). Introduction to the special issue on abductive reasoning in mathematics education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(9), 1583, en https://doi.org/10.29333/ejmste/92551.

Pedemonte, B. (2018). Strategic *vs*. definitory rules: their role in abductive argumentation and their relationship with deductive proof. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(9),1589, en https://doi.org/10.29333/ejmste/92562.

Pedemonte, B., y Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(3), 281-303, en https://doi.org/10.1007/s10649-010-9275-0.

Peirce, C. S. (1976). *The new elements of mathematics*. Mouton Publishers.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM: the International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 83-96, en https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0.

Reid, D. (2003). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5-29.

——— (2018). Abductive reasoning in mathematics education: approaches to and theorisations of a complex idea. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(9),1584, en https://doi.org/10.29333/ejmste/92552.

Reid, D., y Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: research, learning and teaching*. Sense Publishers.

Rivera, F. D. (2018). Pattern generalization processing of elementary students: cognitive factors affecting the development of exact mathematical structures. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(9), 1586, en https://doi.org/10.29333/ejmste/92554.

Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies Mathematical*, *73*(3), 297-328.

Rivera, F. D., y Becker, J. R. (2007). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(2), 140-155.

Shodikin, A. (2017). Effect of learning with abductive-deductive strategy towards the achievement of reasoning ability of high school students. *Infinity Journal*, *6*(2), 111-120.

Soler-Álvarez, M., y Manrique, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las Ciencias, 2*(32), 191-219.

Sosa, L., Aparicio, E., y Cabañas, G. (2019). Characterization of inductive reasoning in middle school mathematics teachers in a generalization task. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 14*(3), 563-581, en https://doi.org/10.29333/iejme/5769.

Toulmin, S. E., Rieke, R. D., y Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning*. Collier Macmillan Publishers.

7. Conocimiento emocional en docentes de matemáticas

Brenda Ramírez Gómez[1]
María S. García González[2]

Resumen

Este capítulo centra la atención en cinco habilidades del conocimiento emocional en docentes de matemáticas, con la intención de que se pueda llegar a alcanzar la regulación emocional. Para tal efecto se muestran las producciones de 20 docentes mexicanos que imparten clases en educación secundaria (con estudiantes de 12-15 años), y bachillerato (con estudiantes de 15-18 años), quienes en noviembre de 2021, de manera virtual, asistieron al taller "El *coaching* emocional en matemáticas" en el marco del Taller Internacional TEMBI 8. En la evidencia presentada se muestra que los docentes poseen la habilidad de ponerle nombre a la emoción que experimentan y son conscientes de la situación que la desencadena. Entre las emociones reportadas se encuentran: resentido por, quejoso por, feliz por, satisfacción, decepción, júbilo, congoja, autorreproche, agrado y reproche, todas ellas conceptualizadas desde la teoría de la estructura cognitiva de las emociones.

Palabras clave: *conocimiento emocional, matemáticas, docentes, teoría de la estructura cognitiva de las emociones.*

[1] Licenciada en matemática educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5917-0990

[2] Doctora en matemática educativa por el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav, IPN) y profesora titular de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), Chilpancingo, México. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7088-1075

Introducción

Estimado lector, agradecemos que haya centrado su atención en este capítulo. Quizá fue porque a ambos nos atrae el tema de las emociones, o porque nos recuerda un episodio de la clase de matemáticas, o a lo mejor solamente abrió el libro y apareció esta página; como sea, esperamos que disfrute la lectura de estas líneas y, más aún, que nuestras palabras ayuden a su labor si es docente, o a su formación si es estudiante.

Este capítulo representa para las autoras el medio perfecto para expresar todo lo que hemos aprendido de las emociones de estudiantes y profesores de matemáticas a lo largo de nuestras vidas académicas. Además, hemos decidido contarlo con un estilo académico, pero no tan "formal" como lo exigen las revistas de investigación, con el fin de hacer amena su lectura y despertar en usted, si es que no lo tiene ya, el interés por un campo de la matemática educativa llamado dominio afectivo, desde donde nace nuestra investigación.

El dominio afectivo es un campo de investigación referido al estudio de constructos tales como actitudes, emociones, motivaciones, creencias y valores que influyen y van formando la vida escolar y social de estudiantes y profesores. Los estudios realizados en este campo han mostrado que el afecto tiene una alta influencia en el aprendizaje matemático escolar (García, Ortega y Rodríguez, 2020; Diego-Mantecón y Córdoba-Gómez, 2019; Ibarra-González y Eccius-Wellmann, 2018; Lewis, 2013; Bekdemir, 2010; Martínez-Padrón, 2008; Zan, Brown, Evans y Hannula, 2006; Hannula, 2002; Goméz-Chacón, 2000).

En el caso de las emociones el interés por su estudio se atribuye a la importancia de la naturaleza emocional de los contextos educativos. Un ejemplo de ello es la rendición de cuentas del sistema escolar (Schutz y Pekrun, 2007). En palabras de Graesser (2019) la revolución emocional en el siglo XXI está fortaleciendo sus tentáculos para investigar sobre el aprendizaje, ya que las emociones reinan en la conexión de experiencias en un mundo complejo de aprendizaje formal, informal, social y personal. En el contexto propio de la Matemática educativa, los inicios de la investigación sobre emociones de estudiantes se centraron en indagarlas durante la resolución de problemas matemáticos (véase por ejemplo, Middleton, Jansen y Goldin, 2018); con el paso del tiempo se ha extendido a estudiarlas durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Existen diferentes formas de definir una emoción. De manera particular, en este documento las entendemos desde la postura de la teoría de la estructura cognitiva de las emociones (Ortony, Clore, y Collins, 1996). De acuerdo con ello, definimos una emoción como una reacción con valencia ante situaciones desencadenantes. Además, la naturaleza de la emoción está determinada por la manera como es interpretada la situación desencadenante. Para hacer operativa la definición anterior diremos lo siguiente.

Una emoción se activa a partir de un acontecimiento que también se denomina estímulo, o situación desencadenante (SD); en este documento usaremos esta última denominación. Entre las SD que pueden generar emociones están los hechos, las cosas, los animales, las personas, etc. De acuerdo con la postura teórica, cuando se produce una emoción es porque la SD fue valorada. Es decir, la persona hizo una interpretación cognitiva de la SD. Por ejemplo, un docente ha experimentado tristeza por enseñar de manera virtual. Y otro ha dicho que está feliz de dar clases virtuales. Vea cómo en ambos casos la situación desencadenante es la misma, pero las valoraciones (interpretaciones) de los docentes no lo son; por eso uno experimenta tristeza y el otro felicidad. Es importante aclarar que la valoración es un mecanismo innato que se encuentra cargado de nuestras creencias, experiencias, historias de vida, es decir, de quienes somos. Por eso es un mecanismo particular, pues cada uno valora una SD de forma personal. En resumen, podemos afirmar que una emoción depende de lo que es importante para nosotros.

Finalmente queremos decir que una de las razones por las que usamos el referente teórico antes descrito es que, la evidencia de una emoción proviene del lenguaje, verbal, escrito e, incluso, pictórico. Es decir, para conocer la emoción que alguien experimenta hay que pedirle que la exprese mediante el lenguaje.

En las próximas secciones compartimos con usted un breve panorama de las emociones del profesorado de matemáticas. En segundo lugar, compartimos el desarrollo de un constructo denominado *conocimiento emo-*

cional. Luego exponemos el caso de 20 docentes que lograron evidenciar su conocimiento emocional mediante el dibujo de las emociones que experimentan al enseñar. Finalmente dedicamos el cierre de este capítulo a reflexionar sobre lo que podemos aprender de las emociones. Esperamos que disfrute la lectura de este capítulo, tanto como nosotras disfrutamos escribirlo.

Siento, luego enseño

La enseñanza es una labor demandante, ya que exige por parte del docente conocimientos disciplinares y competencias para poder enseñarlos, además de habilidades sociales para tratar con los estudiantes. A esto se une la carga administrativa; por ejemplo, reportes de planeaciones. Lo anterior ha puesto en evidencia nuevos riesgos que afectan la salud de los maestros por la excesiva carga laboral. Una evidencia de ello es el estrés de los docentes (Rodríguez, Guevara y Viramontes, 2017). Respecto de las causas de este malestar docente, Ramírez, D'Aubeterre y Álvarez (2008) lo asocian al salario y a la inseguridad en el entorno de la escuela en que laboran. Según Leibovich y Schufer (2002) entre los factores que provocan un sentimiento de incomodidad del docente se encuentran la ampliación de su rol, la incongruencia que existe entre lo que tiene que enseñar y la realidad académica del alumnado, y la presión por estar actualizado.

Desde la matemática educativa este malestar docente se traduce en emociones negativas. De acuerdo con resultados de investigaciones, existen dos razones por las que se desencadenan las emociones negativas de los docentes que enseñan matemática: *a)* las experiencias emocionales experimentadas cuando eran estudiantes: generalmente, quienes tuvieron experiencias negativas con las matemáticas las siguen experimentando cuando se convierten en profesores, conservando la creencia de que las matemáticas son difíciles (Coppola, Di Martino, Pacelli y Sabena, 2012; Di Martino y Sabena, 2011), y *b)* el conocimiento de la asignatura: muchos docentes que tienen la responsabilidad de enseñar matemáticas no siempre son especialistas en los contenidos del currículo escolar (Philipp, 2007). Además, existe evidencia de que la mayoría de las emociones que experimentan los docentes tienen como SD las metas académicas que los estudiantes puedan alcanzar (García-González, y Martínez-Sierra, 2016). Esto último adquiere gran relevancia para la labor docente. La vida del docente gira en torno de lo que el otro (estudiante) pueda realizar; además, el objetivo del docente es que se logren los aprendizajes, para lo cual se ponen en juego muchas variables de diferente índole, como las cognitivas, las didácticas y, por supuesto, las afectivas.

En el siguiente apartado centramos la atención en la forma en que las emociones pueden influir en la enseñanza de las matemáticas. Con esto pretendemos subrayar la gran importancia que tiene conocernos emocionalmente.

Las emociones y su influencia en la enseñanza de matemáticas

Las emociones nos predisponen a la acción, pero también van moldeando nuestras vidas, nos van enseñando quienes somos en realidad y van forjando nuestra personalidad y nuestra forma de comportarnos. Por lo tanto, podemos decir que no hay emociones buenas ni malas, porque todas nos aportan información valiosa de nosotros mismos; sin embargo, queremos hacer la distinción de emociones negativas y positivas en el sentido de que las primeras nos provocan sensaciones desagradables, y las segundas de placer.

Las emociones están con nosotros desde que nacemos, y si bien son fenómenos que experimentamos de manera personal, por ser seres sociales, las emociones también se encuentran moldeadas por el contexto. Un claro ejemplo lo encontramos en el género. A los hombres la sociedad los condena a no experimentar tristeza, pues deben ser fuertes. Y a las mujeres se les condena a no experimentar el enojo: una mujer que expresa su enojo recibe etiquetas como la de *loca*.

Lo anterior sirve de antesala para hablar de las emociones del docente. Muchos docentes experimentamos más emociones negativas que positivas al enseñar, pero cuando hablamos de ellas generalmente tendemos a ocultar emociones negativas, porque socialmente no está bien visto que un docente se enoje o sienta miedo por no conocer un tema. Enseguida compartimos dos casos de profesoras de matemáticas que decidieron compartir su historia sobre las emociones que experimentan al enseñar. Se trata de Karla, una docente novel de bachillerato, y Norma, una maestra con 15 años de experiencia en primaria (García-González y Ramos, 2020).

La maestra Karla habló de las emociones de autorreproche y congoja cuando los estudiantes no entendían su explicación de algún tema matemático. Mencionó el reproche hacia sus alumnos cuando percibió que no estaban desinteresados en su clase.

Respecto del impacto de las emociones negativas de Karla se encontró que éste recae en su gusto y su motivación por enseñar matemáticas. Cuando ella experimentaba emociones negativas disminuía su gusto por enseñar, a tal grado de que no quería encontrarse de nuevo con el grupo que la hizo experimentar esas emociones y por eso a veces llegaba tarde a clase o no la impartía.

En el caso de Norma, el principal desencadenante de sus emociones negativas fue su escaso conocimiento matemático. En particular, experimentaba el autorreproche cuando sus alumnos la consultaban sobre alguna duda matemática y ella no era capaz de responder, experimentaba la decepción cuando no era capaz de entender los temas y experimentaba el remordimiento cuando los estudiantes no entendían su explicación.

En el caso de los profesores en general, y de matemáticas en particular, consideramos que es importante que conozcan las SD de sus emociones negativas, con el fin de regularlas y alcanzar un clima de bienestar idóneo para desarrollar su enseñanza. Los casos analizados son ilustrativos para este propósito. Se trata de dos docentes diferentes: una profesora novel y una profesora experimentada. La primera recibió una formación académica sólida de las matemáticas escolares que debe enseñar; en el segundo caso, su formación académica fue endeble y por eso no tiene conocimiento sólido de las matemáticas que imparte. A pesar de estas diferencias, sus casos convergen en que sus emociones negativas tienen repercusiones que se pueden considerar graves, tanto para ellas como para sus estudiantes. Por ejemplo, un profesor desmotivado o desconfiado de que puede enseñar matemáticas difícilmente logrará desarrollar el aprendizaje en sus estudiantes.

El conocimiento emocional

Informamos al lector que esta sección corresponde con el artículo "Desarrollo del conocimiento emocional" publicado en la revista *UNO* (García-González, 2020). Desde la postura de Schoenfeld (2010), el conocimiento se refiere a "la información que [un individuo] tiene disponible para usar, para resolver problemas, alcanzar metas o desarrollar cualquier tarea" (p. 25). De acuerdo con esta definición, el conocimiento existe sólo si la información está disponible para el individuo, con la condicionante del uso de esa información; por lo tanto, se hablará de conocimiento sólo si el individuo emplea la información para un fin determinado. De esta manera, el conocimiento se traduce en información disponible para usar.

Consideramos que la definición anterior se mantiene si agregamos adjetivos calificativos y si nos enfocamos en una población específica. Es decir, si se habla de conocimiento matemático del profesor de matemáticas la información disponible debería ser de índole matemática —por ejemplo, definiciones, propiedades y fundamentos de conceptos matemáticos— y usada para comprender las matemáticas escolares que deberán ser enseñadas a los estudiantes. Si hablamos de conocimiento didáctico del profesor de matemáticas la información disponible debería ser de índole didáctica; por ejemplo, las teorías de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los intereses y las expectativas de los estudiantes, o las estrategias, las técnicas, las tareas y los ejemplos. Todas estas actividades deberán ser usadas para enseñar los temas matemáticos y lograr el aprendizaje de los estudiantes.

En el mismo sentido, cuando hablamos de conocimiento emocional hacemos referencia a la información que el docente tiene de las emociones que experimenta en el aula de matemáticas. Y esta información sería útil siempre que la utilice al enseñar matemáticas.

La propuesta es que el conocimiento emocional le es tan útil al docente como el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico (conocimiento especializado), y al igual que ellos, se desarrolla paulatinamente, de tal forma que desarrollar conocimiento emocional implica las siguientes habilidades:

1. Reconocer que sentimos, pues las emociones son parte de nuestra naturaleza humana.
2. Reconocer lo que sentimos, esto es, ser capaces de identificar qué emoción experimentamos ante determinada situación.
3. Ponerle nombre a la emoción, es decir, conocer la *palabra emocional* que representa claramente lo que sentimos. Las palabras emocionales tienen relación con la intensidad de la emoción; por ejemplo, no es lo mismo sentir *miedo* que *pavor*, pues este último da cuenta de una intensidad mayor que el primero.
4. Reconocer qué situación desencadena eso que sentimos.
5. Distinguir las emociones negativas de las positivas.
6. Regular las emociones que experimentamos y ser capaces de actuar en consecuencia.
7. Poder ayudar a otros a conocerse emocionalmente; por ejemplo, a nuestros estudiantes.

Como puede observarse, los puntos del 1 al 5 se pueden lograr con un poco de disposición y compromiso, pero para adquirir la habilidad del punto 6 a veces se necesita la ayuda de profesionales. El punto 7 da cuenta del uso del conocimiento de las emociones.

El conocimiento emocional es de suma importancia en la enseñanza de las matemáticas, ya que si un profesor se conoce emocionalmente será más probable que desarrolle un clima idóneo en sus clases para el aprendizaje de los estudiantes.

El taller para desarrollar conocimiento emocional

En el marco del Taller Internacional TEMBI 8, las autoras de este escrito desarrollaron el taller "El *coaching* emocional en matemáticas", cuyo objetivo era mostrar a los docentes un camino para la regulación emocional mediante el desarrollo del conocimiento emocional. Para los fines de este escrito sólo reportamos lo desarrollado en la primera de las dos sesiones del taller, en la que el foco de atención fueron las cinco primeras habilidades del conocimiento emocional que se enlistan arriba.

Participantes

Participaron en el estudio 20 docentes mexicanos que imparten clases en educación secundaria (con estudiantes de 12-15 años) y bachillerato (con estudiantes de 15-18 años). Estos docentes acudieron a dos sesiones del taller antes mencionado, con una duración de hora y media cada sesión. La primera sesión trató del desarrollo de las cinco primeras habilidades del conocimiento emocional y la segunda sesión se enfocó en la regulación emocional. En este escrito se centra la atención en la primera sesión y en lo referente al dibujo como herramienta para expresar emociones.

El dibujo y las emociones

Henrion (1997) sugiere que las imágenes revelan no sólo creencias sino también suposiciones y expectativas subyacentes y pueden proporcionar ideas de lo que sentimos. De esta manera, el dibujo es una técnica ideal para expresar emociones. Para aplicarla, se le solicita a los docentes que realicen de manera individual un dibujo de una experiencia emocional al enseñar matemáticas, pero en este dibujo no debe incluir palabras emocionales; después deben mostrarlo al resto de profesores, quienes identificarán la emoción expresada. Este ejercicio es muy fructífero, ya que tanto el que dibuja como quienes lo identifican fortalecen su conocimiento emocional al reconocer en sí mismos y en los demás las emociones que se experimentan. Después de que los observadores hablan de la emoción que ven en el dibujo, quien dibujó debe decir si esa era la emoción que de verdad quería comunicar. La mayoría de las veces hay coincidencias por parte de los observadores. Al final se pide a quien dibujó que escriba la palabra emocional asociada con el dibujo y que describa la situación que desencadena esa emoción.

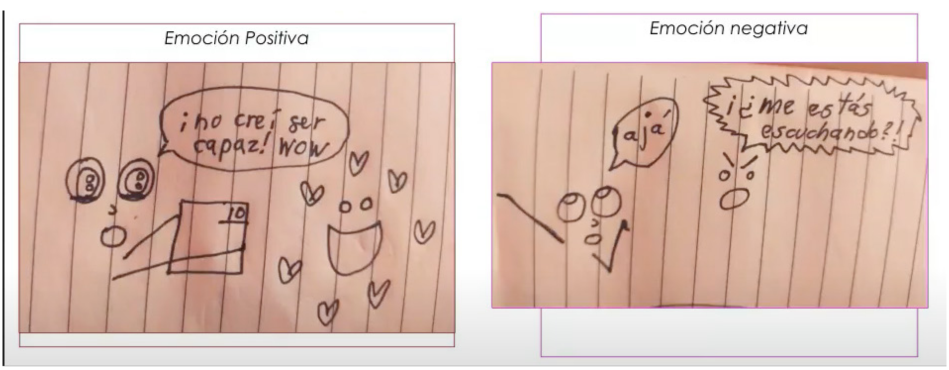
Análisis de datos

Cada uno de los 20 docentes realizó dos dibujos, uno de una emoción positiva y otro de una negativa. Ambos fueron recolectados en una presentación compartida de Drive. Después de adivinar la emoción en forma colectiva, se le solicitó al docente que hizo el dibujo que lo explicara en plenaria. Esto ayudó a corroborar las respuestas de quienes observamos sobre lo que expresaba el dibujo. En la figura 1 se muestra la forma de interacción por medio de la cual los docentes compartían su dibujo, la explicación de la SD y la palabra emocional.

Para analizar los datos en términos de las emociones expresadas por el docente recurrimos a la tipología OCC (véase cuadro 1).

De acuerdo con el dibujo realizado y con la explicación del docente, las producciones fueron analizadas por las autoras y etiquetadas con la definición de la emoción que más se adaptara a la descripción de la OCC. En la siguiente sección se presentan los resultados obtenidos, se trata de 10 tipos de emociones; a saber, resentido por, quejoso por, feliz por, satisfacción, decepción, júbilo, congoja, autorreproche, agrado y reproche. Para identificar al docente se le asignó un número (1-20) de acuerdo con el orden en que se registró en el taller y se especifica si se trata de una mujer o de un hombre (M y H).

FIGURA 1. *Explicando el dibujo de la emoción*



Cuadro 1. *Tipología de emociones* occ

Tipo de emoción	*Definición*
Feliz por	Contento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona
Alegre por el mal ajeno	Contento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona
Resentido por	Descontento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona
Quejoso por	Descontento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona
Esperanza	Contento por la previsión de un acontecimiento deseable
Satisfacción	Contento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento deseable
Alivio	Contento por la refutación de la previsión de un acontecimiento indeseable
Decepción	Descontento por la refutación de la previsión de un acontecimiento deseable
Miedo	Descontento por la previsión de un acontecimiento indeseable
Temores confirmados	Descontento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento indeseable
Júbilo	Contento por un acontecimiento deseable
Congoja	Descontento por un acontecimiento indeseable
Orgullo	Aprobación de una acción plausible de uno mismo
Aprecio	Aprobación de una acción plausible de otro
Autorreproche	Desaprobación de una acción censurable de uno mismo
Reproche	Desaprobación de una acción censurable de otro
Agrado	Agrado por un objeto atractivo
Desagrado	Desagrado por un objeto repulsivo
Gratitud	Aprobación de la acción plausible de otra persona y contento por el acontecimiento deseable relacionado
Ira	Desaprobación de la acción censurable de otra persona y descontento por el acontecimiento deseable relacionado
Complacencia	Aprobación de la acción plausible de otra persona y contento por el acontecimiento deseable relacionado
Remordimiento	Desaprobación de una acción censurable de uno mismo y descontento por el acontecimiento indeseable relacionado

Resultados

De acuerdo con el dibujo realizado y la tipología OCC descubrimos 10 tipos de emociones. Seis fueron negativas —entre ellas, resentido por, quejoso por, decepción, congoja, autorreproche, y reproche: y sólo cuatro fueron positivas: feliz por, satisfacción, júbilo, y agrado. El cuadro 2 muestra los resultados obtenidos.

Enseguida presentamos una descripción de las emociones feliz por y quejoso por, ya que fueron los tipos de emociones con más SD.

CUADRO 2. *Las emociones y sus situaciones desencadenantes*

Tipo de emoción	***Situación desencadenante***
	Emociones positivas
Feliz por	*1.* La participación de los alumnos *2.* Las calificaciones de los alumnos *3.* Comprensión de conceptos por parte de los alumnos
Satisfacción	*1.* La resolución de problemas por parte del alumno *2.* La participación/atención de los alumnos en clase
Júbilo	*1.* La atención de los alumnos
Agrado	*1.* La aplicación de las matemáticas
	Emociones negativas
Resentido por	*1.* La poca participación de los alumnos
Quejoso por	*1.* La indiferencia de los alumnos en la comprensión de conceptos *2.* El acceso a internet *3.* La resolución de problemas por parte del alumno *4.* La falta de atención de los alumnos
Decepción	*1.* La falta de atención de los alumnos en la modalidad virtual *2.* La falta de participación de los alumnos. *3.* Las bajas calificaciones de los alumnos
Congoja	*1.* La resolución del examen por parte de los alumnos
Autorreproche	*1.* La falta de comprensión de los alumnos *2.* Las inconformidades de los alumnos por la calificación *3.* La falta de disposición de los alumnos
Reproche	*1.* La distracción de los alumnos en clase virtual

Emociones positivas: feliz por

Esta emoción se define desde la tipología OCC como contento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona. En el caso de los docentes, se identificaron tres SD de esta emoción: la participación de los alumnos, las calificaciones de los exámenes y la comprensión de conceptos. Aclaramos al lector que las palabras emocionales que reportan los docentes no son iguales, pero todas dan cuenta del "contento" que experimentan, por ejemplo, P14-M usa la palabra *alegría* para expresar contento, mientras que P11-H usa las palabras *satisfacción* y *orgullo.*

Situación desencadenante 1: la participación de los alumnos

La mayoría de los docentes expresó emociones que tuvieron como SD las acciones que realizan sus estudiantes; por ejemplo, la atención, que es muy importante para que se logre la comprensión de lo que el docente explica en el aula. Además, es notorio que se resalte esta atención en el modo presencial, más que en el virtual.

P14-M: Siento alegría cuando los alumnos participan en la modalidad presencial (véase figura 2).

Situación desencadenante 2: las calificaciones de los alumnos

Cuando los estudiantes obtienen buenas notas, los docentes expresan su contento, generando así la emoción de feliz por. Suponemos que esto puede deberse a que la calificación constituye un indicador del aprendizaje del estudiante (P11-H y P19-M).

P11-H: Experimento satisfacción y orgullo por las buenas calificaciones de los estudiantes (véase figura 3).

Figura 2. *Feliz por la participación de los alumnos. P14-M*

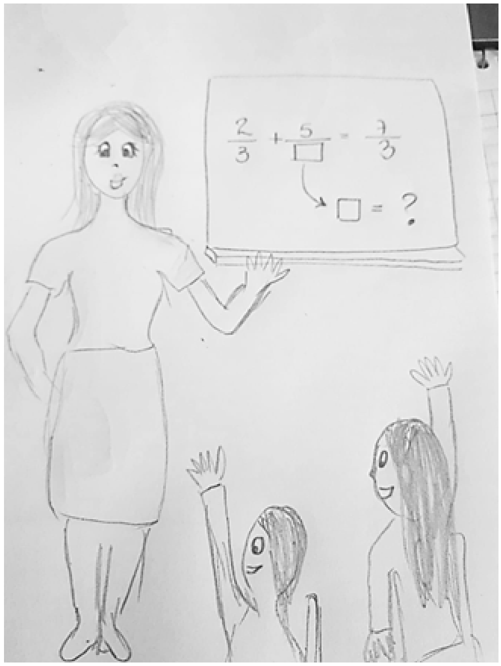
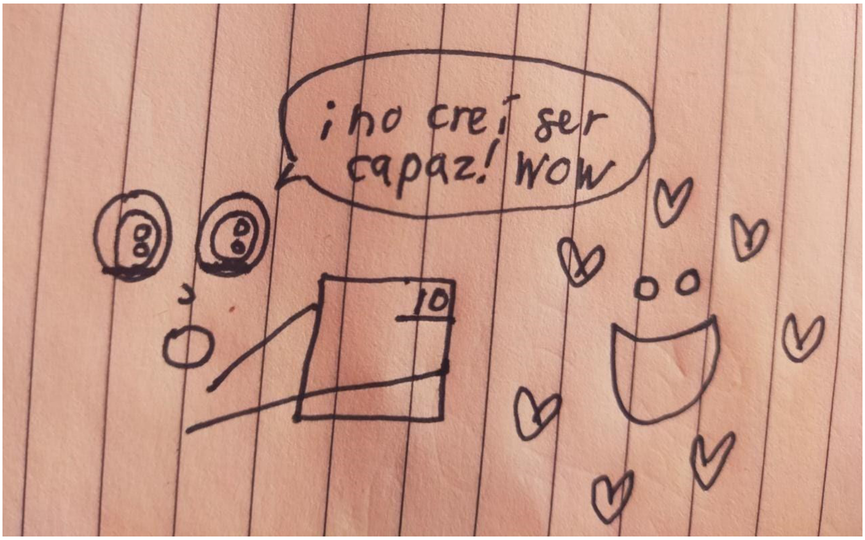


Figura 3. *Feliz por las calificaciones de los alumnos. P11-H*

FIGURA 4. *Feliz por las calificaciones de los alumnos. P19-M*



P19-M: Me siento feliz cuando mis estudiantes logran obtener buenas calificaciones en el examen (véase figura 4).

Situación desencadenante 3: la comprensión de conceptos por parte del alumno

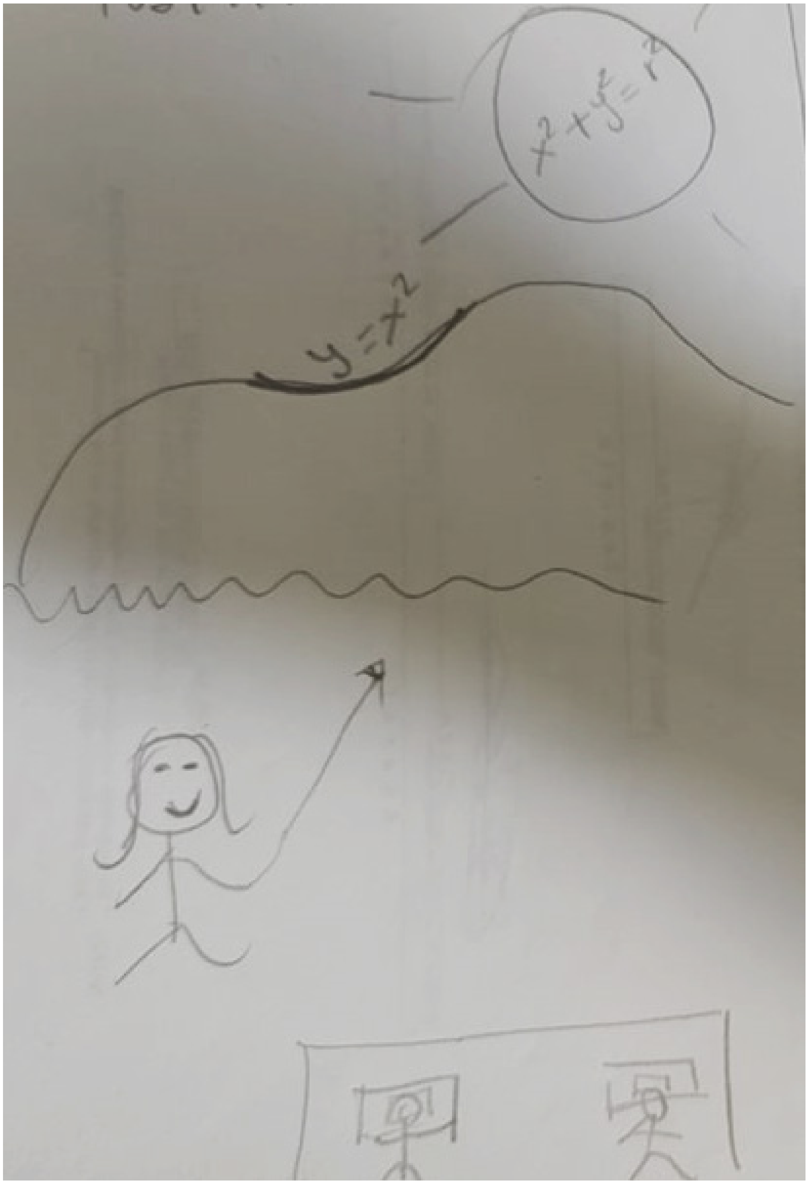
Cuando los estudiantes comprenden los temas genera el contento de los profesores. Suponemos que esto es así porque los docentes consideran que parte de su labor se ha cumplido: han logrado el aprendizaje del alumno.

P20-M: Me siento feliz cuando los estudiantes logran comprender los conceptos (véase figura 5).

Emociones negativas: quejoso por

Esta emoción, según la teoría OCC, se define como descontento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona. Las palabras que consideramos hacen referencia a un descontento son “confusión” (P07-M),

FIGURA 5. *Feliz por la comprensión de conceptos. P20-M*



"enojo" y "tristeza" (P10-H) y "frustración" (P10-H, P07-M). En los docentes se identificaron cuatro situaciones que la desencadenan. A continuación se presentan dos SD.

Situación desencadenante 1: el acceso a internet

La falta de acceso a internet es un detonante de la emoción quejoso por; en este caso, internet es una herramienta que favorece el aprendizaje en línea, por eso cuando falta se vuelve un obstáculo para el desarrollo de la clase y el aprendizaje del alumno, como lo señala P07-M.

P07-M: Me frustra demasiado la falta de internet, ya que genera confusión en las clases virtuales, porque no pueden ser fluidas (véase figura 6).

Situación desencadenante 2: la resolución de problemas por parte de los alumnos

La emoción quejoso por también surge en el docente debido a que los alumnos no pueden resolver los problemas que propone. En el caso de P10-H, consideramos que espera que los alumnos logren resolver problemas una vez abordado el tema en clase, pues eso ofrece evidencia del aprendizaje.

P10-H: Yo he sentido enojo, tristeza y frustración cuando el estudiante no puede resolver una ecuación de primer grado (véase figura 7).

FIGURA 6. *Quejoso por la falta de acceso a internet. P07-M*

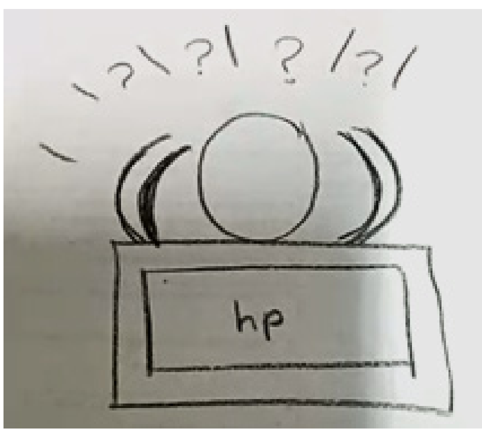
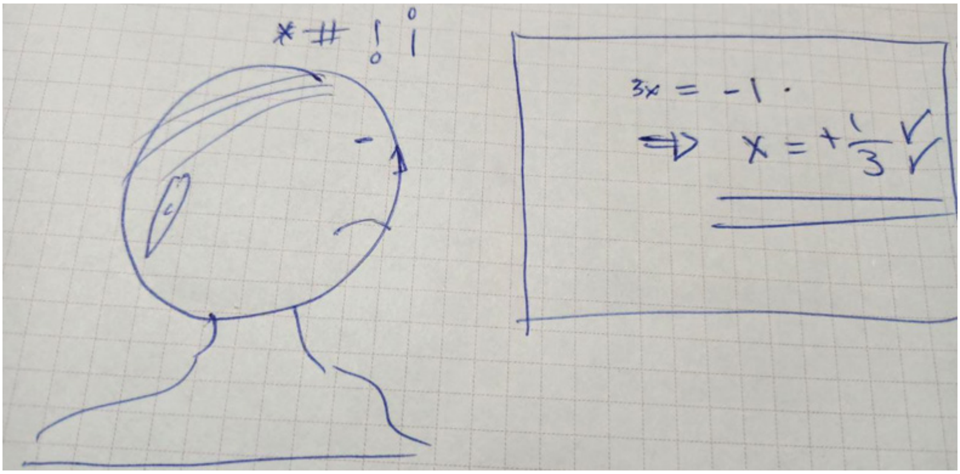


FIGURA 7. *Quejoso por la resolución de problemas por parte de los alumnos. P10-H*



Como se puede observar en los ejemplos anteriores, la mayoría de las SD de las emociones de los docentes giran en torno de los logros de sus estudiantes. Este resultado coincide con lo reportado por García-González y Martínez-Sierra (2016). Al igual que estos autores, suponemos que este hecho obedece a la práctica docente. Aunado a lo anterior, la evidencia presentada da muestra de las cinco primeras habilidades del conocimiento emocional por parte de los asistentes al taller: a saber: *1)* reconocer que sentimos, *2)* reconocer lo que sentimos, *3)* ponerle nombre a la emoción, *4)* reconocer qué situación desencadena eso que sentimos, y *5)* distinguir las emociones negativas de las positivas. Todo ello gracias al uso del dibujo, por lo cual se recomienda para la expresión de las emociones.

Lo que debemos aprender de las emociones

Las emociones desempeñan un papel fundamental en los seres humanos, nos permiten evaluar situaciones y nos predisponen a la acción. Por lo tanto, las experimentamos día con día en cada actividad o en cada rol que desempeñamos, y el aula de clases no es la excepción. Las emociones se clasifican en positivas y negativas, para su estudio, dependiendo del bienestar o el malestar que generan en nosotros, pero esto no significa que sean buenas o malas, porque todas nos brindan información relevante para actuar.

Nadie mejor que nosotros conoce las situaciones que nos desagradan y aquellas que disfrutamos; sin embargo, no siempre somos capaces de asignarle la palabra adecuada a ese disfrute o a ese desagrado; es decir, no somos capaces de expresar la palabra emocional que mejor describe lo que sentimos, a pesar de que experimentamos esa emoción. De ahí que es importante la adquisición de conocimiento emocional, por medio de las habilidades que se mencionan en este capítulo. Conocer lo que nos hace sentir bien y lo que nos hace sentir mal puede ayudarnos a buscar la manera de regular las emociones negativas, por medio de la modificación de la SD que nos provoca el malestar.

La importancia de conocerse emocionalmente, tanto si se es estudiante como si se es docente, repercute en el bienestar propio y en las relaciones que podamos entablar, por ejemplo, con los saberes que aprendemos o enseñamos, con los compañeros de clase o de trabajo, y entre profesor y estudiante. En México, una de las tres líneas estratégicas del Programa de Fortalecimiento de la Calidad Educativa (SEP, 2019) es la creación de ambientes de aprendizaje para lograr el desarrollo del pensamiento matemático. Con base en esta línea se pretende que el docente genere las condiciones necesarias para crear un ambiente de aprendizaje que permita propiciar un clima afectivo, emocional y cognitivo que permita al estudiante mostrar sus emociones. He aquí una razón más para desarrollar el conocimiento emocional.

Los resultados reportados en este capítulo señalan que la mayoría de las emociones que experimentan los docentes son desencadenadas por el logro de la metas académicas de sus estudiantes. Interpretamos este resultado como parte de la labor docente: la responsabilidad que tenemos de que los alumnos aprendan. Además, debido a la nueva forma de enseñar, se empiezan a establecer diferencias claras entre enseñanza presencial y enseñanza en línea, condiciones que desencadenan sus propias emociones, como en el caso de la falta de acceso a internet (P07-M).

Un docente con conocimiento especializado para enseñar matemáticas y conocimiento emocional disfruta su práctica docente, regula sus emociones en el salón de clases, genera un ambiente propicio para el aprendizaje de las matemáticas, mantiene una buena relación con sus estudiantes, logra una mejor gestión del aula y alcanza fácilmente las metas académicas que se plantea en la enseñanza. Recordemos que, de acuerdo con los resultados de las investigaciones, estas metas son las desencadenantes de las emociones. Ahora bien, podemos utilizar las emociones para facilitar el aprendizaje matemático potenciando en el aula las emociones que propicien la atención, como la confianza de los estudiantes en sí mismos y en los demás, el entusiasmo, el asombro, la curiosidad y el interés, tratando de eliminar aquellas que desvían la atención, como el miedo, la ansiedad, la ira, el enojo, la culpabilidad, los celos y el aburrimiento. En nuestra labor está la clave del bienestar emocional.

Finalmente, esperamos que las emociones reportadas aquí le hayan servido como detonante para reflexionar sobre su propia labor de enseñanza: y para responder la pregunta: ¿poseo conocimiento emocional? Si su respuesta es sí, lo felicitamos y lo invitamos a que nos comparta su caso;si la respuesta es no, lo invitamos a que empiece a conocerse. La técnica del dibujo puede ser muy productiva. Así podremos alcanzar la meta del conocimiento emocional: lograr un aula de matemáticas donde, se permita la expresión emocional, se potencien emociones positivas, se ofrezcan recursos para regular las emociones, se generen retos motivadores, se ofrezcan tiempos y espacios para la reflexión, se potencie la cooperación y el respeto a las diferencias, se considere el error como un factor de aprendizaje, y profesores y estudiantes alcancen, sin sufrir, todas sus metas académicas.

Referencias

Bekdemir, M. (2010). The pre-service teachers' mathematics anxiety related to depth of negative experiences in mathematics classroom while they were students. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(3), 311-328, en http://doi.org/10.1007/s10649-010-9260-7.

Coppola, C., Martino, P. Di, Pacelli, T., y Sabena, C. (2012). Primary teachers' affect: a crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Matematics Education*, *17*(3-4), 107-123.

Di Martino, P., y Sabena, C. (2011). Elementary pre-service teachers' emotions: shadows from the past to the future. En K. Kislenko (ed.), *Current state of research on mathematical beliefs XVI* (pp.89-105). Estonia: Tallinn University.

Diego-Mantecón, J. M., y Córdoba-Gómez, F. J. (2019). Adaptación y validación del MRBQ *(mathematics-related beliefs questionnaire)* al contexto colombiano con estudiantes de secundaria. *Revista Educación Matemática*, 31 (1), 66-88.

García-González, M., y Martínez-Sierra, G. (2016). Emociones en profesores de matemáticas: un estudio exploratorio. En J. A Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (eds.), *Investigación en educación matemática XX* (pp. 247-252). España: SEIEM.

García-González, M. S., y Ramos, J. (2020). Perfil emocional de docentes de matemáticas. *Uniciencia*, 34(2), 137-152.

García-González, M. S., y Martínez-Padrón, O. J. (2020). Conocimiento emocional de profesores de matemáticas, *Revista Educación Matemática, 32,* 1, en DOI: 10.24844/EM3201.07.

García-González, M. S. (2020). Desarrollo del conocimiento emocional en matemáticas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas* 88(1), 17-23.

García-González, M., Ortega, J., y Rodríguez, F. (2020). "Aprender matemáticas es resolver problemas": creencias de estudiantes de bachillerato acerca de las matemáticas. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, 11(2020), e726.

Gómez Chacón, I (2000). *Matemática emocional*. Madrid: Narcea.

Graesser, C. (2019). Emotions are the experiential glue of learning environments in the 21st century, *Learning and Instruction*, 1-5, en https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.05.009.

Hannula, M. S (2002). Attitude towards mathematics: emotions, expectations and values, *Educational Studies in Mathematics*, 49(1), 25-46.

Henrion, C. (1997). *Women in mathematics: the addition of difference.* Indiana: University Press, Bloomington and Indianapolis.

Ibarra-González, K. P., y Eccius-Wellmann, C. (2018). Desarrollo y validación de un instrumento de medición de la afectividad respecto a la comisión de errores en matemáticas. *Bolema*, 32(61), 673-695.

Leibovich, N., y Schufer, M. (2002). *El "malestar" y su evaluación en diversos contextos*. Buenos Aires: Eudeba.

Lewis, G. (2013). Emotion and disaffection with school mathematics. *Research in Mathematics Education*, 15(1), 70-86, en DOI:10.1080/14794802.2012.756636.

Martínez-Padrón, O. J. (2008). Actitudes hacia la matemática. *Sapiens*, 9 (2), 237-256.

Middleton, J., Jansen, A., y Goldin, G. (2018). The complexities of mathematical engagement: motivation, affect, and social interactions. En C. Jinfa (ed.). *Compendium for Research in Mathematics Education* (p. 667-699). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Ortony, A., Clore, G. L., y Collins, A. (1996). *The cognitive structure of emotions* (J. Martínez y R. Mayoral, trad.). España: Siglo XXI. [Trabajo original publicado en 1988].

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. Lester (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 257-315). Charlotte: Information Age Publishing.

Ramírez, T., D' Aubeterre, M., y Álvarez, J. (2008). Un estudio sobre el estrés laboral en una muestra de maestros de educación básica del área metropolitana de Caracas. *Revista Extramuros*, *29* (2009), 66-99.

Rodríguez, J., Guevara, A., y Viramontes, A. (2017). Síndrome de burnout en docentes. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, 7(14), 45-67.

Schoenfeld, A. H. (2010): *How we think*. Nueva York: Routledge.

Schutz, P., y Pekrun, R. (eds.) (2007). *Emotion in education*. San Diego, California: Elsevier Academic Press.

SEP (2019). *Líneas estratégicas del programa Fortalecimiento de la Calidad Educativa*. México: Secretaría de Educación Pública.

Zan, R., Brown, L., Evans, J., y Hannula, M. (2006). Affect in mathematics education: exploring theoretical frameworks: a PME Special Issue, *Educational Studies in Mathematics,* 63 (2), 113-121.

Tendencias en la educación matemática 2022, de Lidia Aurora Hernández Rebollar y Estela Juárez-Ruiz (editoras), publicado por Ediciones Comunicación Científica, S. A. de C. V., se publicó en 2022 en la Ciudad de México en versión digital en los formatos PDF, EPUB y HTML.

Este libro surge del VIII Taller Internacional Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación (TEMBI 8) que se realizó en noviembre de 2021 en modalidad virtual, auspiciado por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y en alianza con la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. Todos los trabajos que constituyen los capítulos fueron arbitrados en un proceso doble ciego por especialistas de la Educación Matemática, tanto nacionales como internacionales. Así se ha asegurado la calidad científica de los capítulos, los cuales pretenden contribuir a mejorar la enseñanza y aprendizaje de la matemática en los niveles educativos básico, medio superior y superior. En esta versión 2022, todas las investigaciones presentadas fueron realizadas en México, por lo que marcan una tendencia en la Educación Matemática nacional. Esperamos que los resultados de estas investigaciones sean útiles a los docentes de matemáticas, estudiantes de posgrado en Educación Matemática e investigadores de esta disciplina.

Lidia Aurora Hernández Rebollar es Doctora en Ciencias Matemáticas por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP); profesora de tiempo completo y, actualmente, coordinadora del Posgrado en Educación Matemática en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP; es miembro del Sistema Nacional de Investigadores del Conacyt.

Estela de Lourdes Juárez Ruiz es Doctora en Ciencias Matemáticas; profesora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP; miembro del cuerpo académico “Aprendizaje y enseñanza de las ciencias exactas”; es miembro del Sistema Nacional de Investigadores del Conacyt. Sus intereses se orientan hacia la teoría APOE y el modelo MTSK.

DOI.ORG/10.52501/CC.088

ISBN-13: 978-607-59473-1-0

COMUNICACIÓN CIENTÍFICA PUBLICACIONES ARBITRADAS
HUMANIDADES, SOCIALES Y CIENCIAS
www.comunicacion-cientifica.com