

FÍSICA de REACTORES NUCLEARES

FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y PROBLEMAS



**EDICIONES
COMUNICACIÓN
CIENTÍFICA**



José Luis Pinedo Vega (coordinador)

Física de reactores nucleares
Fundamentos teóricos y problemas



Ediciones Comunicación Científica se especializa en la publicación de conocimiento científico de calidad en español e inglés en soporte de libro impreso y digital en las áreas de humanidades, ciencias sociales y ciencias exactas. Guía su criterio de publicación cumpliendo con las prácticas internacionales: dictaminación de pares ciegos externos, autenticación antiplagio, comités y ética editorial, acceso abierto, métricas, campaña de promoción, distribución impresa y digital, transparencia editorial e indexación internacional.

Cada libro de la Colección Ciencia e Investigación es evaluado para su publicación mediante el sistema de dictaminación de pares externos y autenticación antiplagio. Invitamos a ver el proceso de dictaminación transparentado, así como la consulta del libro en Acceso Abierto.

www.comunicacion-cientifica.com



[DOI.ORG/10.52501/cc.301](https://doi.org/10.52501/cc.301)



Física de reactores nucleares

Fundamentos teóricos y problemas

JOSÉ LUIS PINEDO VEGA
(primer autor y coordinador)

CARLOS RÍOS MARTÍNEZ
FERNANDO DE LA TORRE AGUILAR
FERNANDO MIRELES GARCÍA
J. IGNACIO DÁVILA RANGEL
YOLANDA CISNEROS GARZA



Física de reactores nucleares : fundamentos teóricos y problemas / José Luis Pinedo Vega y otros .— Ciudad de México : Comunicación Científica, 2025. (Colección Ciencia e Investigación).

208 páginas ; 21 × 27.5 centímetros

DOI: 1052501/cc.301

ISBN Universidad Autónoma de Zacatecas: 978-607-555-292-7

ISBN Comunicación Científica: 978-968-9738-45-9

1. Física nuclear. 2. Reactores nucleares. I. Pinedo Vega, José Luis, autor. II. Ríos Martínez, Carlos, autor. III. Torre Aguilar, Fernando de la, autor. IV. Mireles García, Fernando, autor. V. Dávila Rangel, J. Ignacio, autor. VI. Cisneros Garza, Yolanda, autora.

LC: QC786.5 F57

DEWEY: 621.4831 F57

La titularidad de los derechos patrimoniales y morales de esta obra pertenece al coordinador D. R. © José Luis Pinedo Vega, 2025. Reservados todos los derechos conforme a la Ley. Su uso se rige por una licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 Internacional, <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.es>

Primera edición, 2025

Diseño de portada: Francisco Zeledón • Interiores: Guillermo Huerta

D. R. © Universidad Autónoma de Zacatecas
Jardín Juárez, número 147, Centro Histórico,
Zacatecas, Zac., México
C. P. 98000

<https://www.uaz.edu.mx/>

ISBN UAZ: 978-607-555-292-7

Ediciones Comunicación Científica, S. A. de C. V., 2025,
Av. Insurgentes Sur 1602, piso 4, suite 400,
Crédito Constructor, Benito Juárez, 03940, Ciudad de México,
Tel.: (52) 55-5696-6541 • Móvil: (52) 55-4516-2170
info@comunicacion-cientifica.com • www.comunicacion-cientifica.com
📘 comunicacioncientificapublicaciones 📧 @ComunidadCient2

ISBN CC: 978-968-9738-45-9

DOI: 10.52501/cc.301



**Esta obra fue dictaminada mediante el sistema de pares ciegos externos.
El proceso transparentado puede consultarse, así como el libro en acceso abierto, en
<https://doi.org/10.52501/cc.301>**

Índice

Prefacio.....	13
Capítulo 1. Conceptos básicos de física de reactores	15
Introducción	15
Reacción en cadena de fisión	16
Flujo de neutrones, secciones transversales y razón de reacción	19
Factor de criticidad.....	24
Capítulo 2. Ecuación de Transporte.....	31
Pérdida de neutrones	32
Ganancia de neutrones (término fuente)	33
Validez de una serie de potencia para representar al flujo angular $\Phi r, \Omega, t$	35
Demostración	37
Deducción de la regla de Fick.....	37
Capítulo 3. Ecuación de difusión para una-velocidad.....	45
Condiciones a la frontera.....	46
Solución de la ecuación de difusión en estado estacionario en coordenadas esféricas	48
Capítulo 4. Ecuación de difusión de neutrones en un reactor nuclear	53
Análisis de la dependencia en el tiempo	53
<i>Buckling</i> material	54
Ecuación de difusión en una velocidad (reactor placa).....	55
Ecuación de difusión de neutrones en un reactor esférico	57
Ecuación de difusión de neutrones en un reactor cilíndrico.....	59
Análisis de la criticidad	61
Probabilidad de no-escape de los neutrones en un reactor	63
Efecto del reflector en un reactor nuclear	66
Potencia térmica	68
Capítulo 5. Cinética de reactores nucleares.....	71
Problemas de dependencia en el tiempo.....	71
Ecuaciones cinéticas de los neutrones retardados	73
Reactividad.....	74
Periodo estable de un reactor, en un grupo de neutrones retardados.....	76

Capítulo 6. Teoría de Frenado	79
Letargia	81
Probabilidad de escape a la resonancia	83
Flujo de frenado	84
Corriente de frenado o corriente de moderación qE	86
Teoría de edad de Fermi.....	89
Capítulo 7. Teoría de multigrupos.....	93
Teoría de Difusión de dos-grupos	96
Constante de multiplicación para dos-grupos	97
Ecuación general de multigrupos	99
Capítulo 8. Ecuación crítica de un reactor nuclear.....	101
Cálculo del <i>buckling</i> material para un reactor subcrítico	103
Cálculo de la relación de densidades nucleares entre combustible y moderador para un reactor crítico	104
Volumen mínimo de un reactor crítico (caso reactor cilíndrico)	106
Determinación del tamaño y masa nuclear para un reactor con una composición z	106
Factor de multiplicación.....	107
Capítulo 9. Ecuación de difusión en una celda unitaria cilíndrica	109
Ecuación de difusión para el moderador	109
Ecuación de difusión para el combustible.....	111
Factor de utilización térmica para una celda heterogénea.....	112
Probabilidad de escape a la resonancia	116
Factor de fisión rápida.....	118
Referencias.....	121
Problemas.....	123
P 1. Ejercicios complementarios	123
P 2. Ordenes de magnitud de un reactor nuclear PWR DE 1000 MWe	133
P 3. Ordenes de magnitud de un reactor nuclear de $Th^{232} - U^{233}$ de 1200 MWe	143
P 4. Cálculo de reactores nucleares simples haciendo uso de Teoría de Difusión	147
P 5. Incidente de criticidad	170
P 6. Problema sobre tamaño de un reactor usando Teoría de Fermi	181
P 7. Relación de combustible y moderador necesaria para alcanzar la criticidad en un Reactor	183

P 8. Parámetros nucleares del reactor subcrítico nuclear Chicago 9000 de la UAEN-UAZ	189
Anexos	195
A1. Energía de un neutrón después de un choque con un núcleo	195
Centro de masa	195
Masa reducida y 2ª ley de Newton para un sistema de dos partículas	196
A2. Ecuaciones de Bessel.....	201
Sobre los autores	203

Resumen

La obra *Física de reactores nucleares. Fundamentos teóricos y problemas* se divide en dos partes. En la primera parte se deduce la *Ecuación de Transporte*, una ecuación integro-diferencial en términos de la densidad angular de neutrones $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$, una función que describe la distribución de neutrones en forma vectorial, es decir, en términos de la posición $\mathbf{r}$, la dirección y magnitud de la velocidad $\mathbf{u}$ y el tiempo t . A partir de ello se formula la *Teoría de Difusión* y se ejemplifica su uso en el análisis del comportamiento de fuentes de neutrones y el cálculo del tamaño y masa crítica de reactores simples. En seguida se desarrolla la *Teoría Cinética de los Reactores Nucleares*, para lo cual se incorpora el concepto de *reactividad*, fundamental en el control el reactor. Posteriormente se presenta la *Teoría de Frenado*, también conocida como *Teoría de Moderación* o *Teoría de Fermi*, que justifica el uso de materiales moderadores en los reactores. En seguida se presentan los fundamentos de la *Teoría de Multigrupos* y, finalmente, se desarrolla la *Teoría de un Reactor Crítico* y se realizan cálculos teóricos de los factores de la constante de multiplicación para celdas de combustible heterogéneas. Después, en la segunda parte se presentan *ejercicios* didácticos y problemas resueltos que permiten darle significado físico a la teoría y complementan aspectos deductivos formales. Esta parte culmina con el cálculo de los parámetros nucleares del reactor nuclear subcrítico Nuclear Chicago, en posesión de la Unidad Académica de Estudios Nucleares de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México.

Palabras clave: *Física de reactores nucleares, Ecuación de Transporte de Neutrones, Ecuación de Difusión, Teoría de Fermi.*

Prefacio

La física de reactores nucleares es la ciencia que conjunta y preserva los principios bajo los cuales es posible controlar la reacción nuclear de fisión en cadena —fundamental del funcionamiento de los reactores nucleares—. Es una disciplina formal y didáctica que integra el conjunto de teorías que describen los procesos físicos que posibilitan el funcionamiento de los reactores nucleares.

Esta edición se compone de dos partes. En la *primera parte* se deduce la *Ecuación de Transporte* —una ecuación diferencial integro-diferencial en términos de la densidad angular de neutrones $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$, una función que describe la distribución de neutrones en forma vectorial, es decir, en términos de la posición $\mathbf{r}$, la dirección y magnitud de la velocidad $\mathbf{u}$ y el tiempo t —. A partir de la *Ecuación de Transporte* se formula la *Teoría de Difusión* y se ejemplifica su uso en el análisis del comportamiento de fuentes de neutrones y el cálculo del tamaño y masa crítica de reactores simples. En seguida se desarrolla la *Teoría Cinética de los Reactores Nucleares* incorporando el concepto de reactividad, el cual es fundamental en el control el reactor. Posteriormente se presenta la *Teoría de Frenado*, también conocida como *Teoría de Moderación* o *Teoría de Fermi*, que justifica el uso de materiales moderadores en los reactores. En seguida se presentan los fundamentos de la *Teoría de Multigrupos* y, finalmente, se desarrolla la *Teoría de un Reactor Crítico* y se realizan cálculos teóricos de los factores de la constante de multiplicación para celdas de combustible heterogéneas.

En una *segunda parte* se presentan *ejercicios* didácticos y problemas resueltos que permiten darle significado físico a la teoría y complementan aspectos deductivos formales. Esta parte culmina con el cálculo de los parámetros nucleares del reactor nuclear subcrítico Nuclear Chicago, en posesión de la Unidad Académica de Estudios Nucleares de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México.

La edición fue preparada como texto de base para un curso formal de física de reactores nucleares. Pero, a su vez, es recomendable para quien, teniendo antecedentes de la física de reactores, necesite o desee revisar los fundamentos, teorías y cálculos analíticos básicos de los reactores nucleares. En ese caso, la edición se puede utilizar revisando problemas específicos o de interés, y si hubiera dudas, se puede regresar a consultar la teoría.

Zacatecas, México, 2025

Capítulo 1. Conceptos básicos de física de reactores

Introducción

En 1896 Henri Becquerel descubrió la radiactividad a partir de sales de sulfato de uranilo y potasio. De inmediato varios científicos se dedicaron a estudiar la naturaleza de las radiaciones. Al probar su comportamiento en campos magnéticos, se encontró que eran de tres tipos y se clasificaron en partículas alfa α , beta β y radiación gamma γ . Digamos que los tres tipos de radiaciones se descubrieron al mismo tiempo.

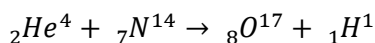
El descubrimiento de la radiactividad quebrantó la indivisibilidad del átomo, pero no puso en evidencia aún el concepto de núcleo. Este concepto surgió al tratar de estudiar el comportamiento de las partículas α emitidas por los isótopos pesados.

En 1906 Ernest Rutherford observó que las desviaciones de las partículas alfa, al atravesar una lámina de mica o de oro, eran más grandes que las que predecía el modelo de Thomson.

En 1909 H. Geiger y E. Marsden, al hacer experimentos de dispersión de partículas alfa, pusieron en evidencia la existencia del núcleo atómico.

Para 1911 Rutherford desarrolló la *Teoría de Dispersiones Alfa* y con ello se formalizó la concepción de núcleo atómico. Aunque el nacimiento de la física nuclear no ha sido estandarizado, el descubrimiento del núcleo atómico, en 1911, bien puede ser considerado el evento que dio lugar a la física nuclear. La radiactividad puso en evidencia que los núcleos no son inmutables.

En 1919, estudiando el comportamiento de las partículas alfa emitidas por isótopos naturales, tales como Ra y Po, Rutherford descubrió la primera reacción nuclear



Rutherford, además, en 1920 postuló la idea de la existencia del neutrón.

En 1930 Walther Wilhelm Georg Bothe y su alumno Herbert Becker, al bombardear berilio y boro con partículas alfa, encontraron una radiación muy penetrante. Frédéric e Irène Joliot-Curie intentaron explicar su naturaleza al hacer interaccionar esa radiación con diferentes isótopos, pero en lugar de demostrar su naturaleza, encontraron la producción de isótopos radiactivos artificiales —hoy conocida como activación neutrónica o activación mediante neutrones—. En 1932 James Chadwick explicó la naturaleza de esa radiación penetrante bautizada como neutrones, por ello, en 1935 recibió el Premio Nobel de Física. Ese mismo año, a Frédéric e Irène Joliot-Curie se les acreditó el Premio Nobel de Química por el descubrimiento la radiactividad artificial.

El descubrimiento del neutrón desató una carrera entre científicos de todo el mundo por crear de forma sintética elementos transuránicos. Enrico Fermi utilizó los neutrones para inducir reacciones nucleares; encontró, entre otras cosas, que los neutrones térmicos tenían más probabilidades de interaccionar que los neutrones rápidos; por lo que recibió el Premio Nobel en 1938.

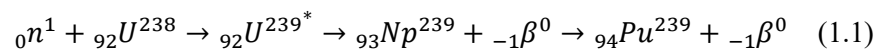
En la búsqueda elementos transuránicos mediante neutrones, el 19 de diciembre de 1938, Lise Meitner, en colaboración con Otto Hahn en Berlín, encontró que no todos los isótopos pesados dan lugar a isótopos más pesados, sino que algunos se fragmentaban. De hecho, este fenómeno ya había sido sugerido en 1934 por Ida Noddack, quien descubrió el renio de número atómico 75, por lo que fue nominada tres veces para el Premio Nobel de Química.

El fenómeno del rompimiento de núcleos pesados mediante neutrones se publicó en un artículo escrito por la propia Lise Meitner con ayuda de su sobrino Otto Fritz. El fenómeno fue bautizado con el nombre **fisión nuclear** por William Achibald Arnold. Por tal descubrimiento se le otorgó el Premio Nobel de Física a Otto Hahn y a Fritz Strassmann en 1944. En el artículo original se omitió el nombre de *Lise Meitner* por ser de ascendencia judía, por tanto, fue excluida del Premio Nobel.

Reacción en cadena de fisión

Isótopos transuránicos

La formación de elementos transuránicos o reacciones de captura de neutrones puede ser ilustrada mediante la secuencia de reacciones que da lugar a la producción del Pu^{239} a partir del ${}_{92}U^{238}$



Todas las reacciones nucleares siguen las leyes de conservación. Estas implican que el número de protones y el número de nucleones se conserven, de tal forma que, al balancear la reacción, la suma tanto del número de protones como de nucleones es constante. Esto se observa en la primera etapa de la reacción anterior. El número de protones (en subíndices) es

$$Z_1 + Z_2 = 0 + 92 = 92$$

y el número de nucleones (en superíndices) es

$$A = A_1 + A_2 = 1 + 238 = 239$$

Dando lugar al ${}_{92}U^{239*}$, donde el asterisco indica la formación de un núcleo compuesto en estado excitado, cuyo número de protones es $Z = 92$ y de neutrones es $Z = 239$. Este isótopo es sumamente inestable y de inmediato se desexcita mediante el decaimiento o la emisión de partículas beta, dando lugar al ${}_{93}Np^{239}$.

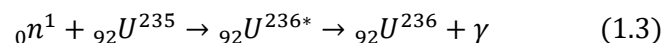
El decaimiento beta consiste en la conversión de un neutrón en un protón más una partícula beta



Esto explica el aumento en el número atómico o número de protones en los isótopos ${}_{93}Np^{239}$ y ${}_{94}Pu^{239}$.

Fisión nuclear

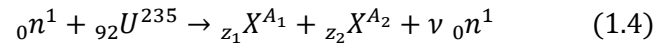
En el caso del ${}_{92}U^{235}$ suelen suceder reacciones de *captura de neutrones*. Esto es



donde el núcleo compuesto ${}_{92}U^{236*}$ se desexcita emitiendo un rayo gamma.

Pero no solo existe la posibilidad de captura de neutrones, se observan en mayor proporción reacciones en las cuales los núcleos de ${}_{92}U^{235}$ se rompen o fisionan en dos núcleos o fragmentos más

pequeños, liberando al mismo tiempo neutrones y radiaciones. En general una reacción de *fisión* se puede expresar en la forma



A los isótopos generados ${}_{z_1}X^{A_1}$ y ${}_{z_2}X^{A_2}$ se les conoce como fragmentos de fisión. Las reacciones de fisión siguen las leyes de conservación. La suma tanto del número de protones como de nucleones, en ambos fragmentos de fisión, se debe conservar. En el caso de los fragmentos de fisión del ${}_{92}U^{235}$

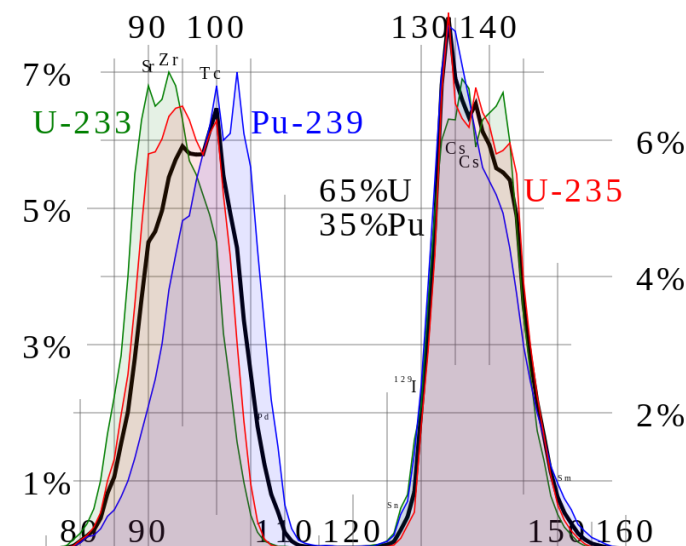
$$Z = Z_1 + Z_2 = 92$$

$$A = A_1 + A_2 = 236$$

235 nucleones que corresponden al ${}_{92}U^{235}$ más el neutrón que induce la fisión.

Los fragmentos de fisión rara vez son iguales. Existen distribuciones de fragmentos de fisión o curvas de rendimiento más o menos específicas para cada tipo de isótopo fisil (figura 1.1).

Figura 1.1. Rendimiento o distribución de los fragmentos de fisión para los isótopos fisiles U^{233} , U^{235} y Pu^{239}

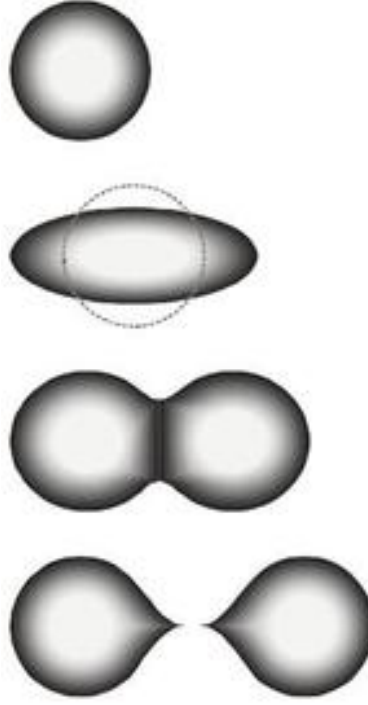


Fuente: JWB (2008).

Energía de fisión

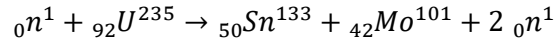
El modelo nuclear de la gota líquida permite aproximar el cálculo de la energía de fisión. De acuerdo con este modelo, los neutrones al ser capturados en los núcleos de isótopos fisiles desestabilizan a estos últimos, provocando la formación de dos fragmentos o gotas más pequeñas, cuyos centros, en el instante que se separan, se encuentran a una distancia que es la suma de los radios de ambos fragmentos (figura 1.2). El radio de cada fragmento se puede calcular mediante $R = R_0 A^{1/3}$ donde $R_0 = 1.5 \times 10^{-15} \text{ m}$

Figura 1.2. *Etapas de la fisión nuclear*



Fuente: Hullernuc (2010).

Considérese el caso específico de una reacción de fisión



los radios de los fragmentos de fisión son

$$R({}_{42}Mo^{101}) = R_0 A^{1/3} = (1.5 \times 10^{-15} \text{ m}) (101^{1/3}) = 6.868 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$R({}_{50}Sn^{133}) = R_0 A^{1/3} = (1.5 \times 10^{-15} \text{ m}) (133^{1/3}) = 7.733 \times 10^{-15} \text{ m}$$

Luego la distancia de separación inicial es $r = 6.868 \times 10^{-15} + 7.733 \times 10^{-15} = 14.601 \times 10^{-15} \text{ m}$. Por tanto, la Energía Potencial de Coulomb en el instante en que ocurre la fisión es

$$E_C = \frac{KqQ}{r} = \frac{\left(9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\right) 37 \times 55 \times (1.6 \times 10^{-19} C)^2}{14.601 \times 10^{-15} m} = 3.21 \times 10^{-11} J = 200.7 \text{ MeV}$$

Lo que concuerda con Kopeikin (2004), quien ha establecido que la energía de fisión para el U^{235} es 202,79 MeV.

Otra forma de cuantificar la energía fisión es mediante el cálculo del valor Q de la reacción. De acuerdo con la definición, Q es la equivalencia en energía de la diferencia entre las masas de los reactivos y los productos. Para el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}
Q &= \left[\left(M({}_{92}\text{U}^{235}) + M({}_0n^1) \right) - \left(M({}_{50}\text{Sn}^{133}) + M({}_{42}\text{Mo}^{101}) + M(\nu {}_0n^1) \right) \right] c^2 \\
&= [(235.043915 \text{ u} + 1.008665 \text{ u}) \\
&\quad - (132.923914 \text{ u} + 100.910338 \text{ u} + 2 \times 1.008665 \text{ u})] 931.5 \frac{\text{MeV}}{\text{u}} \\
&= 187.24 \text{ MeV}
\end{aligned}$$

donde: $c^2 = 931.5 \frac{\text{MeV}}{\text{u}}$ es el factor de conversión de una unidad de masa atómica u a energía (en MeV).

Aparentemente este resultado dista mucho del valor convencional. Sin embargo, habrá que recordar que, de acuerdo con la física nuclear, los núcleos estables observan una relación entre neutrones y protones del orden de 1:1. Como podrá verificarse en este caso del ${}_{50}\text{Sn}^{133}$ tienen un exceso de 28 neutrones (la relación entre neutrones y protones es 1.66), mientras que en el caso del ${}_{42}\text{Mo}^{101}$ hay un exceso 12 neutrones (la relación es 1.38). Esto implica que ambos fragmentos son altamente radiactivos y para tender a la estabilidad varios de los neutrones en exceso se trasmutaran a protones mediante la emisión de partículas beta

$${}_0n^1 = {}_1p^1 + {}_{-1}\beta^0$$

lo que implica la liberación de energía en forma de energía cinética de protones y partículas beta. Por lo tanto, debe ser aceptable reconocer que, en efecto, en cada fisión se liberan del orden de 200 MeV, lo que expresa el potencial de la energía nuclear.

Más del 80 % de la energía de fisión es aportada en forma de energía cinética por los fragmentos de fisión, la energía restante la aportan los neutrones, la radiación gamma, partículas beta y neutrinos liberadas en el decaimiento de los fragmentos de fisión.

Flujo de neutrones, secciones transversales y razón de reacción

Los neutrones libres, de manera similar a los fotones o a los electrones libres, siempre están en movimiento. Por lo general son liberados en reacciones nucleares exoenergéticas, y de acuerdo con la cinemática de la reacción mediante la cual son producidos, poseen una parte importante de la energía de reacción. En las fuentes de neutrones mediante reacciones (α, n) los neutrones son monoenergéticos, puesto que el valor Q de la reacción es constante, esta energía se reparte entre el neutrón y el núcleo de retroceso. Sin embargo, los neutrones de fisión son liberados con diferentes energías, comprendiendo toda una distribución cuya energía promedio es del orden de 2 MeV. En este caso, no son monoenergéticos puesto que las fisiones siempre dan lugar a más de dos productos (los fragmentos de fisión, los neutrones partículas beta y radiación gamma) los cuales comparten la energía de fisión en formas muy diversas.

De acuerdo con Zweifel (1972) la distribución de los neutrones de fisión en función de la energía (E) tiene la forma

$$n(E) = ae^{-\frac{E}{k_B T}} \quad (1.5)$$

donde k_B es la constante de Boltzman y T la temperatura de fisión; y $a = 1.872$ y $k_B T = 1.290$ en el caso del ${}_{92}\text{U}^{233}$, $a = 1.888$ y $k_B T = 1.306$ en el caso del ${}_{92}\text{U}^{235}$ y $a = 2.121$ y $k_B T = 1.333$ en el caso del Pu^{239} .

Se puede definir la densidad total de los neutrones en un medio como la integral de la distribución de neutrones de todas las energías

$$n\left(\frac{\text{neutrones}}{\text{cm}^3}\right) = \int_0^\infty n(E)dE \quad (1.6)$$

Es muy común y muy práctico asociar la densidad de neutrones con su correspondiente velocidad, de donde resulta el *flujo de neutrones*

$$\phi\left(\frac{\text{neutrones}}{\text{cm}^2 \text{ s}}\right) = n\left(\frac{\text{neutrones}}{\text{cm}^3}\right)v\left(\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right) \quad (1.7)$$

que equivale al número de neutrones que cruza una superficie de 1 cm^2 cada segundo.

Sección transversal microscópica σ_i

La sección transversal microscópica σ_i es la sección o área teórica que interpone cada núcleo atómico de un medio a un flujo de neutrones ϕ , y que produce un tipo de reacción nuclear i . Dado que las secciones transversales microscópica representan un área, sus unidades son (cm^2).

Las reacciones nucleares con neutrones compiten entre ellas. En el caso de isótopos fisiles, como el U^{235} , Pu^{239} y el U^{233} , al absorber un neutrón, puede ocurrir una reacción de captura (c) o una de fisión (f). La probabilidad de que ocurra una o la otra reacción es tipificada mediante las secciones transversales correspondiente, las cuales son mutuamente excluyentes. Es decir

$$\sigma_a = \sigma_f + \sigma_c \quad (1.8)$$

donde los subíndices indican a absorción, f fisión y c captura.

Obviamente, en un medio cualquiera no hay un solo núcleo, en cada unidad de volumen (cm^3) hay una cierta cantidad de átomos o núcleos. Por tanto, para caracterizar un medio se utiliza la **densidad atómica o nuclear**, la cual equivale al número de átomos por unidad de volumen; se puede evaluar conociendo la densidad del medio $\rho\left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$, el peso atómico $A\left(\frac{\text{g}}{\text{at-g}}\right)$ de los átomos y el número de Avogadro $N_A\left(\frac{\text{átomos}}{\text{at-g}}\right)$. Esto es

$$N\left(\frac{\text{átomos}}{\text{cm}^3}\right) = \frac{\rho\left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)N_A\left(\frac{\text{átomos}}{\text{at-g}}\right)}{A\left(\frac{\text{g}}{\text{at-g}}\right)} \quad (1.9)$$

Al multiplicar la densidad nuclear por la sección transversal microscópica de cada uno de los núcleos, resulta una cantidad llamada sección macroscópica, cuyas unidades son (cm^{-1})

$$\Sigma_i(cm^{-1}) = N \left(\frac{atomos}{cm^3} \right) \sigma_i(cm^2) \quad (1.10)$$

Dado que σ_i es una cantidad directamente proporcional a la probabilidad de que haya interacción entre un neutrón y un núcleo, dadas sus unidades, Σ_i puede ser interpretada como la probabilidad por unidad de longitud de que exista una reacción o interacción con neutrones de tipo i .

Razón de reacción

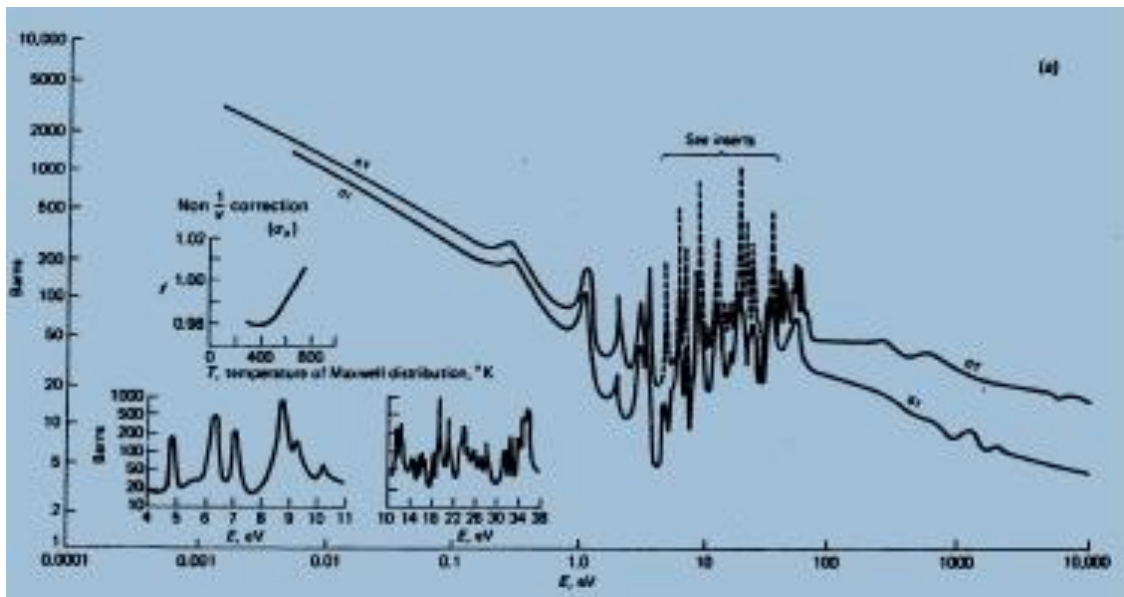
Como en un medio hay un gran número de núcleos, sometido a un gran flujo de neutrones, multiplicando ambas cantidades se obtiene una cantidad llamada *Razón de Reacción* que equivale al número de reacciones de tipo i que ocurren por unidad de volumen por unidad de tiempo:

$$R_i \left(\frac{reacciones}{cm^3 s} \right) = \phi \left(\frac{neutrones}{cm^2 s} \right) \Sigma_i(cm^{-1}) \quad (1.11)$$

Sin embargo, las secciones transversales no son constantes, son función de la energía de los neutrones.

En la gráfica de la figura 1.3 se presentan las secciones transversales total σ_T y de fisión σ_f del ${}_{92}U^{235}$. La diferencia entre ambas es la sección transversal de captura σ_c de tal forma que $\sigma_T = \sigma_c + \sigma_f$. Se observa que las secciones transversales dependen fuertemente de la energía. Entre 0.01 y 0.7 MeV disminuye de 1000 a 200 b en forma continua. Entre 1 y 100 MeV se observa la región de resonancia, donde la posibilidad de reacción es muy variable.

Figura 1.3. Secciones transversales de fisión σ_f y sección transversal total σ_T del ${}_{92}U^{235}$



Fuente: Zweifel (1973, p. 4).

En todo rigor la razón de reacción de tipo i , que ocurre en el punto indicado mediante el vector posición $\vec{r}$ con neutrones de velocidad $\vec{u}$ y en el instante t , tiene que definirse como

$$R_i(\vec{r}, \vec{u}, t) = \phi(\vec{r}, \vec{u}, t) \Sigma_i(\vec{r}, \vec{u}, t) \quad (1.12)$$

Sección transversal macroscópica de fisión Σ_i

El camino libre medio, λ_i (cm), es la distancia promedio que viaja un neutrón entre colisión y colisión de un cierto tipo i . La probabilidad de que un neutrón experimente una interacción de tipo i en una distancia diferencial dl , es la relación entre esa distancia y el camino libre medio. Esto es

$$P(i) = \frac{dl}{\lambda_i} \quad (1.13)$$

Para un cierto número de neutrones n que viajan en la misma dirección, la probabilidad de tener una interacción de tipo i se puede definir como la relación entre la fracción de disminución del número de neutrones

$$-\frac{dn}{n} = \frac{dl}{\lambda_i} \quad (1.14)$$

Si n_0 es el número de neutrones incidentes en un medio, el número de neutrones que puede recorrer una longitud se puede obtener integrando la ec. (1.14). Esto es

$$-\int_{n_0}^n \frac{dn}{n} = \int_0^l \frac{dl}{\lambda_i} \quad (1.15)$$

de donde

$$\begin{aligned} -[\ln n]_{n_0}^n &= \left[\frac{l}{\lambda_i} \right]_0^l \\ -\ln \frac{n}{n_0} &= \frac{l}{\lambda_i} \\ \frac{n}{n_0} &= e^{-\frac{l}{\lambda_i}} \end{aligned} \quad (1.15a)$$

o bien

$$n = n_0 e^{-\frac{l}{\lambda_i}} \quad (1.16)$$

que es la ley de atenuación.

La sección transversal macroscópica Σ_i es la probabilidad por unidad de longitud en la que los neutrones tengan una interacción de tipo i ; por tanto, sus unidades son cm^{-1} .

Como puede observarse de la definición de camino libre medio, la sección transversal macroscópica es el inverso del camino libre medio

$$\Sigma_i(\text{cm}^{-1}) = \frac{1}{\lambda_i(\text{cm})} \quad (1.17)$$

Físicamente se puede calcular al combinar la densidad nuclear del medio multiplicada por la sección transversal microscópica. Esto es

$$\Sigma_i(cm^{-1}) = N \left(\frac{\text{átomos } U^{235}}{cm^3} \right) \sigma_i \left(\frac{cm^2}{\text{átomos } U^{235}} \right) \quad (1.18)$$

Como $\frac{n}{n_0}$ es la fracción de neutrones que alcanza la distancia l , de acuerdo con la ecuación (1.16), $e^{-\frac{l}{\lambda_i}}$ equivale a la probabilidad de no interacción entre $l = 0$ y l .

Y como $\Sigma_i = \frac{1}{\lambda_i}$ es la probabilidad de interacción por unidad de longitud (o por cm), entonces, la probabilidad de que los neutrones permanezcan sin interaccionar hasta l y que interaccionen en el siguiente diferencial de longitud dl es el producto

$$e^{-\frac{l}{\lambda_i}} \frac{1}{\lambda_i (cm)} dl \quad (1.19)$$

Luego, la probabilidad de que los neutrones tengan su primera interacción entre $l = a$ y $l = b$, está dada por

$$P(a, b) = \int_{l=a}^{l=b} e^{-\frac{l}{\lambda_i}} \frac{1}{\lambda_i (cm)} dl \quad (1.20)$$

El problema fundamental para conocer cualquier sección transversal macroscópica Σ_i o del camino libre medio, es que dependen de la energía de los neutrones y de la temperatura del reactor. En un reactor nuclear los neutrones de fisión observan una distribución tipo Maxwell. A una temperatura T la distribución de neutrones específica correspondiente a la energía E , es

$$n(E) = \frac{2}{(\pi kT)^{3/2}} \cdot e^{-E/kT} \sqrt{E} \quad (1.21)$$

donde $k = 1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$ es la constante de Boltzmann.

Puede demostrarse que la energía promedio de los neutrones de esa distribución es

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E \cdot \eta(E) dE}{\int_0^\infty \eta(E) dE} = kT \quad (1.22)$$

Ejercicio 1.1. Demostrar la ecuación (1.19) [Resuelto en ejercicios complementarios (P 1.1)]

La ecuación (1.15) implica que la energía promedio de los neutrones solo depende de la temperatura. Así, por ejemplo, a temperatura ambiente (293K) la energía promedio de los neutrones es

$$\begin{aligned} \bar{E}_{Th} &= \left(1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K} \right) (293K) = 5.04 \times 10^{-21} J \\ \bar{E}_{Th} &= 5.04 \times 10^{-21} J \left(\frac{1eV}{1.6 \times 10^{-19} J} \right) = 0.025 eV \end{aligned}$$

Este valor de $\bar{E}$ - a temperatura ambiente de 293K- se conoce como la energía promedio que poseen cualquier tipo de partículas en equilibrio térmico con el ambiente. En el caso de los neutrones, se llama neutrones térmicos a los neutrones en equilibrio térmico con el medioambiente; estos tienen una energía de 0.025eV .

A partir de las tablas de radionúclidos pueden conocerse las secciones transversales microscópicas de los neutrones térmicos. El problema es extrapolar los valores de esas secciones transversales para otra temperatura, por ejemplo, la temperatura de operación de un reactor nuclear 573K. Para eso, puede demostrarse que para otra temperatura T las secciones transversales microscópicas están dadas por la expresión

$$\sigma_T = \sigma_{Th} \sqrt{\frac{T_{Th}}{T}} \quad (1.23)$$

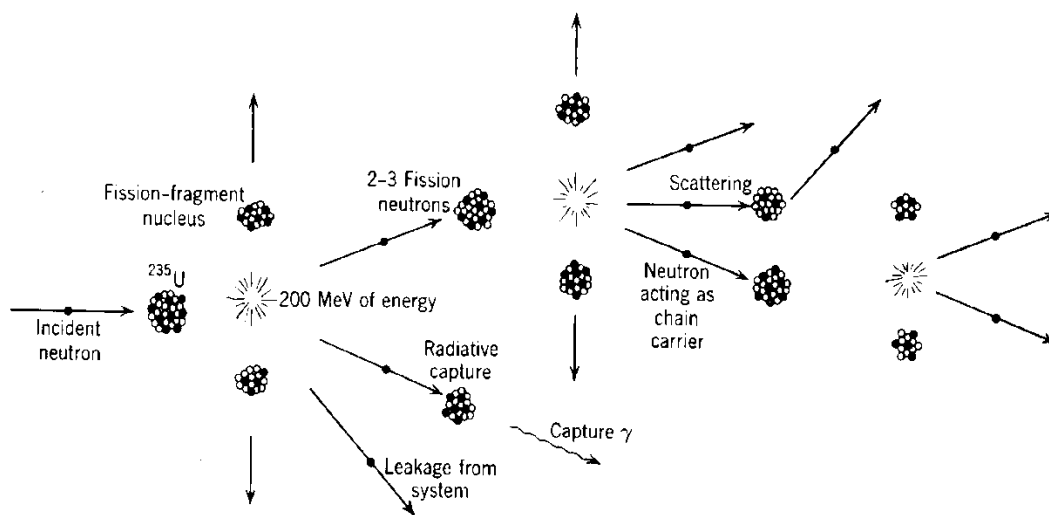
Ejercicio 1.2. Demostrar la dependencia con la temperatura de la sección transversal microscópica (ec. (1.23)). [Solución: ejercicios complementarios P1.2]

Factor de criticidad

Como se muestra en la ecuación (1.4), en las reacciones de fisión, además de los fragmentos de fisión ${}_{Z_1}X^{A_1}$ y ${}_{Z_2}X^{A_2}$, se liberan ν neutrones; ν es un numero promedio de neutrones emitidos, característico de cada isótopo fisil; en el caso del ${}_{92}\text{U}^{235}$, $\nu = 2.42$.

El hecho de que se liberen ν nuevos neutrones en cada fisión, hace posible una sucesión de reacciones de fisión, a la cual se le llama reacción en cadena de fisión (figura 1.4).

Figura 1.4. Reacción en cadena de fisión



Fuente: Duderstandt (1976, p. 68).

Para caracterizar las reacciones en cadena se utiliza el concepto de constante de multiplicación o factor de multiplicación k , al que también se le denomina factor de criticidad. Este se define como la relación entre el número de neutrones en dos generaciones sucesivas

$$k = \frac{n_1}{n_0} \quad (1.24)$$

Un reactor es crítico si la población o número de neutrones permanece constante, es decir, cuando $k = 1$. Si la población de neutrones disminuye a través del tiempo, o $k < 1$, se dice que el reactor es *subcrítico*; y si la población de neutrones aumenta, o $k > 1$, el reactor está en estado *supercrítico*.

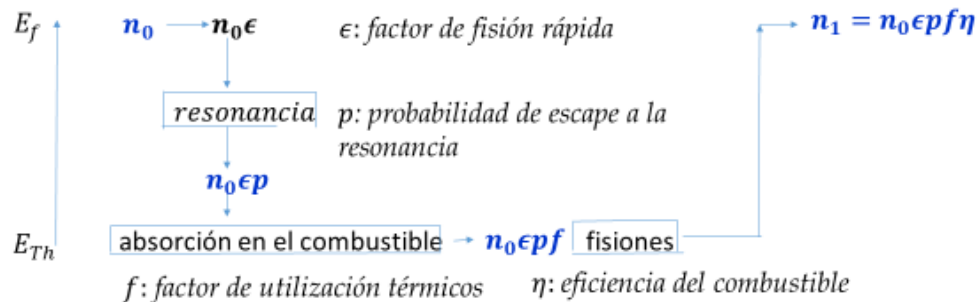
Hay dos maneras de calcular la condición de criticidad de un reactor: (1) al considerar que todos los neutrones permanecen en el interior del reactor o no escapan; y (2) cuando se considera que hay una fracción de los neutrones que puede escapar del reactor, como realmente sucede.

Constante de multiplicación infinita

Físicamente no es posible evitar el escape de neutrones de un reactor, o solo sería posible si la dimensión del reactor fuera infinita. A la constante de multiplicación que ignora la posibilidad de escape de neutrones del reactor se le llama *constante de multiplicación infinita* y se designa por k_∞ . Esta tiene utilidad práctica, ya que permite, entre otras cosas, revisar los procesos en los que intervienen los neutrones.

Como ya se estableció en § 1.2.3, los neutrones de fisión no tienen una energía única, en realidad comprenden todo un espectro de energía, del tipo distribución de Maxwell-Boltzaman con una energía promedio del orden de 2 MeV. Los neutrones rápidos tienen muy pocas posibilidades de inducir fisiones. Pero para considerar esas posibilidades, se define un factor ϵ , llamado *factor de fisión rápida*. A partir de una primera generación de neutrones de fisión n_0 , (figura 1.5), como resultado de las fisiones con neutrones rápidos, se puede tener un ligero incremento de neutrones dando lugar a $n_0\epsilon$ neutrones.

Figura 1.5. Constante de multiplicación infinita



$$k_\infty = \frac{n_1}{n_0} = \frac{n_0\epsilon p f \eta}{n_0} = \epsilon p f \eta$$

Fuente: elaboración propia.

Los neutrones que mayor posibilidad tienen de inducir fisiones son los neutrones térmicos. Para termalizar los neutrones se incorpora a los reactores un material llamado *moderador* cuya función es disminuir o moderar la energía de los neutrones desde la energía de fisión hasta la energía térmica. Los moderadores están compuestos de elementos ligeros, como el hidrógeno del agua, el deuterio del agua pesada o el carbono del grafito, con lo cuales los neutrones después de unos cuantos choques se termalizan. El moderador más común y más barato es el agua.

Sin embargo, durante el proceso de termalización hay una región del espectro en la cual hay una gran probabilidad de que los neutrones sean absorbidos. A esa región se le llama *región de resonancia*. Solo llegan a termalizarse los neutrones que escapan a esa región. Para caracterizar esa probabilidad, se define un factor p , llamado *probabilidad de escape a la resonancia*. Así pues, partir de una primera generación de neutrones de fisión n_0 , el número de neutrones que llegan a ser térmicos es $n_0 \epsilon$.

Los neutrones térmicos se absorberán en el combustible (designado por el superfixo F , del inglés *fuel*) que contiene los isótopos fisiles, o bien en cualquier otro material del reactor, sea moderador o materiales estructurales (designados por el superfixo M).

Si Σ_a designa la sección transversal macroscópica de absorción total del reactor, Σ_a^F designa la sección macroscópica de absorción del combustible, y Σ_a^M designa la sección macroscópica de absorción en otros materiales, la probabilidad de absorción total por unidad de longitud es

$$\Sigma_a = \Sigma_a^F + \Sigma_a^M \quad (1.25)$$

Y la fracción de neutrones que se absorberá en el combustible es

$$f = \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a} = \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a^F + \Sigma_a^M} \quad (1.26)$$

f siendo llamado *factor de utilización térmica*.

Por tanto, a partir de n_0 neutrones de fisión, el número de neutrones que finalmente se absorbe en el combustible es $n_0 \epsilon p f$.

Del total de neutrones absorbidos en el combustible, unos neutrones serán simplemente capturados y otros inducirán fisión; como de acuerdo con la ecuación (1.8) la captura y fisión son eventos excluyentes $\sigma_a = \sigma_c + \sigma_f$ y solo la fracción $\frac{\sigma_f}{\sigma_a}$ puede inducir fisión. Dado que de cada fisión se producirán ν neutrones, el número de nuevos neutrones de fisión por cada neutrón que fue absorbido en el combustible será

$$\eta = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_a} \quad (1.27)$$

η siendo llamada *eficiencia del combustible*. En el caso de que más de un isótopo produzcan fisiones se deben considerar todas las contribuciones. Esto es

$$\eta = \nu \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} \quad (1.28)$$

Luego, a partir de n_0 neutrones, el número de neutrones de la siguiente generación es

$$n_1 = n_0 \epsilon p f \eta \quad (1.29)$$

Luego, el factor de multiplicación infinito es la relación entre el número de neutrones en dos generaciones sucesivas

$$k_{\infty} = \frac{n_1}{n_0} = \frac{n_0 \epsilon p f \eta}{n_0} = \epsilon p f \eta \quad (1.30)$$

La cual es llamada la *fórmula de los cuatro factores*.

Constante de multiplicación efectiva

Dado que los reactores son finitos, o tienen una geometría con fronteras físicas, en todo rigor se tiene que considerar que tanto los neutrones rápidos como los térmicos tienen una probabilidad de escapar de las fronteras del reactor. Los neutrones que tienen la posibilidad de inducir fisiones son aquellos que permanecen dentro del reactor durante toda su historia. Para considerar a los neutrones que no escapan se definen dos factores: el factor de no-escape de neutrones rápidos $P_f = P_{NR}$ (f , del inglés *fast*), y el factor de no-escape de neutrones térmicos P_{NTh} (figura 1.6).

Así que, a partir de n_0 neutrones de fisión, el número de neutrones de la siguiente generación es

$$n_1 = n_0 \epsilon P_{NR} p f P_{NTh} \eta$$

Luego, la *constante de multiplicación efectiva* es

$$k_{eff} = \frac{n_1}{n_0} = \frac{n_0 \epsilon P_{NR} p f P_{NTh} \eta}{n_0} = \epsilon P_{NR} p f P_{NTh} \eta \quad (1.31)$$

La cual es llamada la *fórmula de los seis factores* (figura 5).

Los factores de no-escape P_{NTh} y P_{NR} serán deducidos en la *Teoría de Difusión* (§ 4.7) y en la *Teoría de Fermi* (§ 6.6).

Figura 1.6. Constante de multiplicación efectiva



Fuente: elaboración propia.

Uranio enriquecido

De acuerdo con IAEA Isotope Browser, en el **uranio natural** coexisten tres isótopos. Su abundancia es

$$U^{238} = 99.2742 \%$$

$$U^{235} = 0.7204 \%$$

$$U^{234} = 0.0054 \%$$

Es decir, el componente mayoritario del uranio natural es el U^{238} , sin embargo, no es un isótopo fisil, por lo que es muy raro que se fisione.

Por definición, un isótopo es *fisil* si la energía de enlace del neutrón con el que es bombardeado es mayor que la energía crítica de fisión. Y un isótopo es *fisionable* si la energía de enlace de ese neutrón es menor a la energía crítica de fisión. Esto implica que los isótopos fisiles pueden fisionarse con neutrones térmicos, mientras que los fisionables requieren neutrones rápidos.

La reacción más común del U^{238} con neutrones es la captura. Por tanto, en un reactor con uranio natural no se puede sostener la reacción en cadena de fisión porque el U^{238} captura una gran proporción de los neutrones, evitando que lleguen al U^{235} .

Para mantener una reacción en cadena es necesario modificar la proporción de U^{235} respecto al U^{238} . Al proceso mediante el cual se aumenta de la proporción del U^{235} se le llama *enriquecimiento*. Este es un proceso que no se puede realizar por medios químicos, puesto que ambos isótopos tienen las mismas propiedades químicas y no se pueden separar mediante reacciones químicas ni por extracción con solventes.

Por definición el enriquecimiento ε es la relación entre la masa de U^{25} y la masa de uranio

$$\varepsilon = \frac{w_{U^{25}}}{w_U} = \frac{w_{U^{25}}}{w_{U^{25}} + w_{U^{28}}} = \frac{w_{U^{25}O_2}}{w_{U^{25}O_2} + w_{U^{28}O_2}} = \frac{w_{U^{25}O_2}}{w_{UO_2}} \quad (1.32)$$

El enriquecimiento es un procedimiento de separación isotópica que tiene el objeto de aumentar la proporción de átomos de U^{235} . La separación isotópica es un proceso físico que hace uso de la pequeña diferencia en masa entre los isótopos U^{235} y U^{238} , para eliminar átomos de U^{238} . A escala industrial existen dos métodos de separación isotópica: la difusión a través de membranas porosas y la centrifugación. Está en desarrollo un proceso más que utiliza láser para excitar de manera selectiva las moléculas que contienen al isótopo de interés para, en tal estado, poderlo separar.

El grado de enriquecimiento a menudo se designa mediante la letra griega ϵ , y representa la proporción de U^{235} en un combustible de uranio. Un reactor nuclear requiere un enriquecimiento del orden de $3 < \epsilon < 5 \%$.

Las reacciones nucleares son probabilísticas y dependen de varios factores; en general, son regidos por la ley de atenuación de la radiación.

Ejercicio 1.3. Actualmente el enriquecimiento del uranio natural es $\epsilon_{U^{235}} = 0.00711$. En Oklo, provincia de Gabón, la presencia de fragmentos de fisión en un yacimiento de uranio puso en

evidencia que hubo una excursión natural de criticidad. (a) Suponiendo que esa excursión ocurrió cuando se formó la hidrósfera, o sea hace 1800 millones de años, use la ley de decaimiento para calcular cual debía ser el enriquecimiento en ese momento. (b) Haga el cálculo inverso, es decir, asuma que en un momento en que el enriquecimiento del uranio era $\varepsilon = 3\%$, y calcule el tiempo que ha transcurrido desde entonces. (c) ¿Cómo podría usar este razonamiento para calcular la edad de la Tierra? [Solución: sección problemas complementarios P 1.13]

Capítulo 2. Ecuación de Transporte

Dado que los neutrones son los inductores de las fisiones nucleares, es fundamental conocer la distribución de la población de neutrones para describir el comportamiento de un reactor nuclear. Sin embargo, la descripción de la población de neutrones no es sencilla, puesto que en conjunto los neutrones se distribuyen en toda una distribución de velocidades –entendiendo velocidad en forma vectorial es decir tanto magnitud como en dirección– y a su vez en una distribución espacial y temporal.

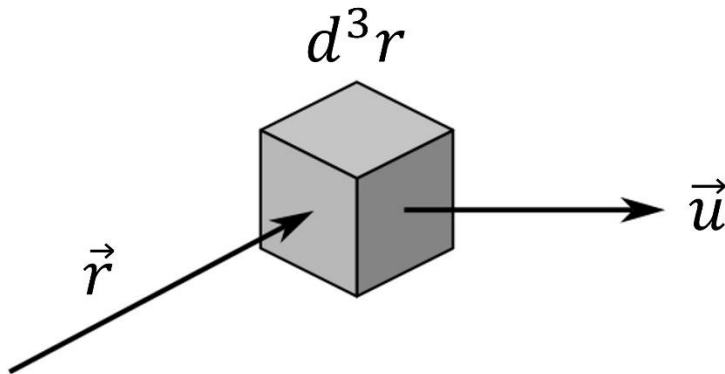
Para describir en detalle lo que sucede en un reactor se utiliza el concepto **densidad angular de neutrones** $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$, la cual define la población de neutrones, por unidad de volumen, por unidad de espacio velocidad y por unidad de tiempo. La densidad angular de neutrones es propiamente una cantidad puntual, es un número de neutrones que en el instante t se encuentra en la posición $\mathbf{r}$ y tienen la velocidad $\mathbf{u}$. Al ser una cantidad puntual, probablemente, no haya ningún neutrón con esas características, entonces es más común asociar a la densidad angular elementos diferenciales de posición, unidad espacio-velocidad y tiempo. Eso es

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{u} dt \quad (2.1)$$

que indica el número de neutrones en un elemento diferencial de volumen $d^3\mathbf{r}$, con una velocidad alrededor de $\mathbf{u}$ que puede variar en una diferencial de velocidad $d^3\mathbf{u}$ y en una diferencial de tiempo dt , alrededor de t .

La *Ecuación de Transporte* es una ecuación de balance, específica para cada elemento diferencial de volumen $d^3\mathbf{r}$ (figura 2.1). Esta ecuación establece que el cambio en la población de neutrones con las características anteriores es la diferencia entre las **ganancias** y las **pérdidas** de neutrones.

Figura 2.1. Elemento diferencial de volumen



Fuente: elaboración propia.

El cambio en la población de neutrones –en un elemento diferencial de volumen $d^3\mathbf{r}$ con una diferencial de velocidad $d^3\mathbf{u}$ alrededor de $\mathbf{u}$ y en una diferencial de tiempo dt , alrededor de t – se puede expresar como

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{u} dt \quad (2.2)$$

Pérdida de neutrones

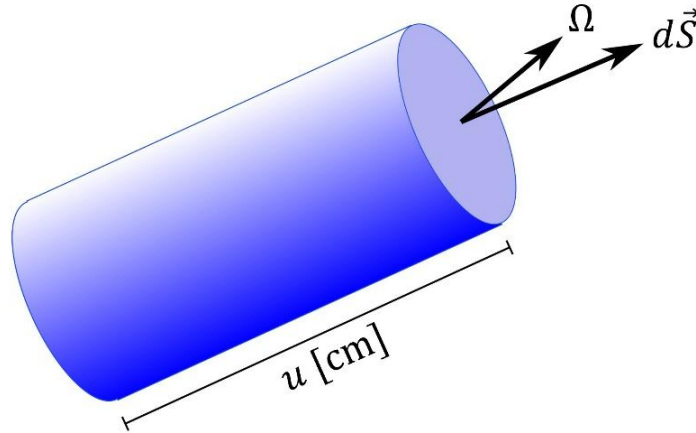
Los neutrones se pueden perder por cualquier tipo de interacción y por escape del reactor. La pérdida de neutrones debida a interacciones se puede cuantificar haciendo uso del concepto de razón de reacción. En el caso de la *Ecuación de Transporte*, esta tiene que ser específica para cada elemento diferencial de volumen $d^3\mathbf{r}$ con una velocidad alrededor de $\mathbf{u}$ que puede variar en una diferencial de velocidad $d^3\mathbf{u}$ y en una diferencial de tiempo dt , alrededor de t . Esto es

$$R_T(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \Sigma_T(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) u d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{u} dt \quad (2.3)$$

que es el número de reacciones que ocurren en un elemento diferencial de volumen $d^3\mathbf{r}$, con una velocidad alrededor de $\mathbf{u}$ que puede variar en una diferencial de velocidad $d^3\mathbf{u}$ y en una diferencial de tiempo dt , alrededor de t .

Para cuantificar el escape de neutrones a través de la superficie de un reactor puede considerar, primero, un cilindro de longitud u , alineado en la dirección de la velocidad de los neutrones $\mathbf{u}$ y acotado por una superficie dS que se puede designar mediante su vector normal $d\vec{S}$. El volumen del cilindro es $\mathbf{u} \cdot d\vec{S}$ (figura 2.2).

Figura 2.2. Elemento diferencial de volumen cilíndrico



Fuente: elaboración propia.

Dado que la densidad angular $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ es el número de neutrones con velocidad $\mathbf{u}$ por unidad de volumen por unidad de tiempo, el número de neutrones que atraviesa o escapa a través de la

superficie $d\vec{S}$ es el producto de $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ multiplicado por el volumen $\mathbf{u} \cdot d\vec{S}$. El número correspondiente a cada elemento diferencial de espacio velocidad $d^3\mathbf{u}$ y en la diferencial de tiempo dt es

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u} \cdot d\vec{S} d^3\mathbf{u} dt \quad (2.4)$$

Ganancia de neutrones (término fuente)

Puede ser producida por una fuente de neutrones, y por dispersiones de neutrones que originalmente tenían una velocidad $\mathbf{u}'$ y fueron dispersados hacia la velocidad de interés $\mathbf{u}$.

El término *fuerza de neutrones*, por lo pronto se indicará con un término

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{u} dt \quad (2.5)$$

donde la letra S proviene de la palabra *source* (“fuente” en inglés), y puede incluir bien sean fisiones o una fuente externa.

El término *ganancia por dispersiones*, al hacer uso del concepto de razón de reacción, puede establecerse por

$$dR_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}, t) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) \mathbf{u}' d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{u} dt \quad (2.6)$$

donde el término diferencial dR_s significa que solo se considera una dirección $\mathbf{u}'$, el subíndice s proviene del inglés por *scattering* (dispersión); y $\Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}, t)$ es la sección transversal de dispersión de neutrones que originalmente tenían una velocidad $\mathbf{u}'$ y fueron dispersado hacia la velocidad de interés $\mathbf{u}$. Para considerar todas las dispersiones de todas las direcciones $\mathbf{u}'$ a $\mathbf{u}$ se requiere integrar sobre todas las direcciones $\mathbf{u}'$. Esto es

$$R_s = \int dR_s d^3\mathbf{u}' = \int d^3\mathbf{u}' \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}, t) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) \mathbf{u}' d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{u} dt \quad (2.7)$$

Luego, al utilizar las ecs. 2.2 hasta la ec. 2.7, la *ecuación de balance* resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{u} dt &= \\ &= -\Sigma_T(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{u} dt - \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u} \cdot d\vec{S} d^3\mathbf{u} dt \\ &+ S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{u} dt \\ &+ \int d^3\mathbf{u}' \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}, t) \mathbf{u}' \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{u} dt \end{aligned} \quad (2.8)$$

Integrando sobre todo el volumen del reactor

$$\begin{aligned} d^3\mathbf{u} dt \left\{ \int \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3\mathbf{r} + \int \Sigma_T(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u} d^3\mathbf{r} + \int \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u} \cdot d\vec{S} \right. \\ \left. - \int S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3\mathbf{r} - \int \int d^3\mathbf{u}' \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}, t) \mathbf{u}' \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) d^3\mathbf{r} \right\} \\ = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como todos los términos de la ec. (2.8) están factorizados por $d^3\mathbf{u} dt$, ambas diferenciales se pueden cancelar. Adicionalmente, se puede observar que casi todos los términos involucran una integral de volumen, con excepción del término de escape (el tercer término, en azul), el cual

involucra una integral de superficie. Por tanto, para aplicar un mismo tratamiento es necesario utilizar el **teorema de Gauss** para convertir la integral de superficie en integral de volumen. Esto es

$$\int \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u} \cdot d\vec{S} = \int \mathbf{u} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3\mathbf{r} \quad (2.10)$$

Sustituyendo la ecuación (2.10) en la (2.9)

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3\mathbf{r} + \int \Sigma_T(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) u d^3\mathbf{r} + \int \mathbf{u} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3\mathbf{r} - \int S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3\mathbf{r} \\ - \int \int d^3\mathbf{u}' \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}, t) u' \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) d^3\mathbf{r} \\ = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde se puede factorizar $\int d^3\mathbf{r}$. Esto es

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \Sigma_T(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) u + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) - S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \right. \\ \left. - \int d^3\mathbf{u}' \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}, t) u' \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dado que la integral de volumen es arbitraria, también se puede cancelar o ignorar, de donde resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \Sigma_T(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) u + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \\ = S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \int d^3\mathbf{u}' \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}, t) u' \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Que es justamente la **ecuación de transporte** en términos de la densidad angular. La relación entre densidad angular $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ y flujo de neutrones $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ se puede establecer mediante

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \left[\frac{\# n}{cm^2 s} \right] = \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \left[\frac{\# n}{cm^3} \right] u \left[\frac{cm}{s} \right] \quad (2.14)$$

donde $\# n$ significa número de neutrones y obviamente es una cantidad adimensional.

Sustituyendo el flujo, ecuación (2.14) en la ecuación (2.13) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \Sigma_T(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \\ = S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \int d^3\mathbf{u}' \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}, t) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

que corresponde a la *Ecuación de Transporte* en términos del flujo de neutrones.

Un caso especial de la *Ecuación de Transporte* es la ecuación de **una-velocidad**. Esta resulta de promediar el flujo de neutrones en términos de la velocidad. Es decir, dado que $\mathbf{u} = u\boldsymbol{\Omega}$ integra el flujo en términos de la magnitud de la velocidad, d^3u da como resultado un flujo dependiente de la dirección del movimiento, pero es independiente de la magnitud de la velocidad. Esto es

$$\int \phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3u = \phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) \quad (2.16)$$

Así que al integrar la ecuación (2.15), en términos de la magnitud de la velocidad d^3u , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) + \hat{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) + \Sigma_T(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = \\ = S(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) + \int d\hat{\Omega}' \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}', t) \Sigma_s(\mathbf{r}, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

que es justamente **la Ecuación de Transporte de una velocidad**.

Como se puede observar, la *Ecuación de Transporte* para una-velocidad es una ecuación integro-diferencial, en la cual se desconocen las dos funciones de distribución, el flujo $\Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)$ y la corriente de neutrones $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = \hat{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)$. Es decir, se tienen dos funciones diferentes, una escala y otra vectorial, en la misma ecuación.

Para resolver en forma analítica la *Ecuación de Transporte* (2.17) se establece la relación entre corriente y flujo. La regla de Fick, algunas veces llamada ley de Fick que se verá en seguida (§ 2.2), justamente, expresa la corriente en términos del flujo.

Validez de una serie de potencia para representar al flujo angular $\Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)$

Usar la serie de potencia de la forma

$$\Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = \frac{1}{4\pi} [A(\mathbf{r}, t) + 3\hat{\Omega} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (2.18)$$

Para demostrar que la corriente de neutrones $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ está dada la integral

$$\int \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) \hat{\Omega} d\hat{\Omega} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2\text{Demostración}.19)$$

Para eso se sustituye la serie en la integral y luego se integra. Esto es

$$\int \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) \hat{\Omega} d\hat{\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int [A(\mathbf{r}, t) + 3\hat{\Omega} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \hat{\Omega} d\hat{\Omega} \quad (2.20)$$

Desarrollando el lado derecho de la ecuación

$$\int \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) \hat{\Omega} d\hat{\Omega} = \frac{1}{4\pi} A(\mathbf{r}, t) \int \hat{\Omega} d\hat{\Omega} + \frac{3}{4\pi} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \int \hat{\Omega} \hat{\Omega} d\hat{\Omega} \quad (2.21)$$

- i) En el primer término del lado derecho de la ecuación (3.21) el desarrollo de la integral es

$$\int \hat{\Omega} d\hat{\Omega} = \int [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] d\hat{\Omega} = \int \Omega_x d\hat{\Omega} + \int \Omega_y d\hat{\Omega} + \int \Omega_z d\hat{\Omega} \quad (2.22)$$

donde: $\Omega_x = \sin\theta \cos\varphi$; $\Omega_y = \sin\theta \sin\varphi$; $\Omega_z = \cos\theta$ y $d\hat{\Omega} = \sin\theta d\theta d\varphi$ [Demostración: Ejercicios complementarios P1.5]

Luego, las integrales de cada uno de los términos de la ecuación (2.22) son

$$\begin{aligned}\int \Omega_x d\widehat{\Omega} &= \iint \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi = \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \\ &= \left[\frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta \right] [\sin \varphi]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}\quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}\int \Omega_y d\widehat{\Omega} &= \iint \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi = \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = \\ &= \left[\frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta \right] [-\cos \varphi]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}\quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}\int \Omega_z d\widehat{\Omega} &= \iint \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 0\end{aligned}\quad (2.25)$$

Esta última ecuación se resuelve por sustitución o cambio de variable. Esto es, si

$$u = \sin \theta; \quad du = \cos \theta d\theta; \quad u_i = \sin 0 = 0; \quad u_s = \sin \pi = 0$$

Por tanto,

$$\int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = \int_0^0 u du = \frac{1}{2} [u^2]_0^0 = 0$$

Luego, el primer término de la ecuación (2.21) es cero.

ii) El desarrollo de la integral del segundo término de la ecuación (2.21) (sin el coeficiente $\frac{3}{4\pi}$) es

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \int \widehat{\Omega} \widehat{\Omega} d\widehat{\Omega} &= [B_x(x, t) + B_y(y, t) + B_z(z, t)] \cdot \int [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z][\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] d\widehat{\Omega} \\ &= [B_x(x, t) + B_y(y, t) + B_z(z, t)] \cdot \\ &\cdot \int \{ \Omega_x [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] + \Omega_y [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] + \Omega_z [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] \} d\widehat{\Omega} = \\ &= \int B_x(x, t) \Omega_x [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] d\widehat{\Omega} + \int B_y(y, t) \Omega_y [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] d\widehat{\Omega} \\ &+ \int B_z(z, t) \Omega_z [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] d\widehat{\Omega} = \\ &= B_x(x, t) \int \Omega_x [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] d\widehat{\Omega} + B_y(y, t) \int \Omega_y [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] d\widehat{\Omega} \\ &+ B_z(z, t) \int \Omega_z [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] d\widehat{\Omega}\end{aligned}\quad (2.26)$$

Solo en el caso de productos de componentes iguales las integrales resultan $\frac{4\pi}{3}$.

Ejercicio resuelto 2.1. Demostrar que $\int \Omega_y^2 d\hat{\Omega} = \frac{4\pi}{3}$

Demostración

$$\begin{aligned}\int \Omega_x^2 d\hat{\Omega} &= \iint \sin^3 \theta \cos^2 \varphi d\theta d\varphi = \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= \left[-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi \frac{1}{2} \left[\varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{3} \quad (2.27)\end{aligned}$$

Ejercicio 2.2. Demostrar que $\int \Omega_y^2 d\hat{\Omega} = \frac{4\pi}{3}$ y $\int \Omega_z^2 d\hat{\Omega} = \frac{4\pi}{3}$

Ejercicio 2.3. Demostrar que las integrales con productos de componentes diferentes resultan cero.

Al usar el resultado de las integrales con productos de componentes iguales, la ecuación (2.26) resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \int \hat{\Omega} \hat{\Omega} d\hat{\Omega} &= \frac{4\pi}{3} B_x(x, t) + \frac{4\pi}{3} B_y(y, t) + \frac{4\pi}{3} B_z(z, t) \\ &= \frac{4\pi}{3} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2.28)\end{aligned}$$

Y sustituyendo la ecuación (2.28) en la ecuación (3.26)

$$\int \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) \hat{\Omega} d\hat{\Omega} = \frac{1}{4\pi} A(\mathbf{r}, t)(0) + \frac{3}{4\pi} \frac{4\pi}{3} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2.29)$$

La definición de corriente en una sola velocidad es

$$\int \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) \hat{\Omega} d\hat{\Omega} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.30)$$

Por tanto, se concluye que $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ y que $A(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t)$.

Es por eso por lo que en la *Teoría de Difusión*, para representar el flujo, se usa la serie de potencia en la forma

$$\Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = \frac{1}{4\pi} [\Phi(\mathbf{r}, t) + 3\hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.31)$$

Deducción de la regla de Fick

La *Ecuación de Transporte* para una-velocidad es

$$\begin{aligned}\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) + \hat{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) + \Sigma_T(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = \\ = S(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) + \int d\hat{\Omega}' \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}', t) \Sigma_s(\mathbf{r}, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) \quad (2.17)\end{aligned}$$

Si se sustituye la expansión del flujo, ecuación (2.18), en la *Ecuación de Transporte* para una-velocidad se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \right] + \hat{\Omega} \cdot \nabla \left[\frac{1}{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \right] \\ + \Sigma_T(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \right] = \\ = \frac{1}{4\pi} S(\mathbf{r}, t) + \int d\hat{\Omega}' \left[\frac{1}{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \hat{\Omega}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \right] \Sigma_s(r, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde el término $S(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = \frac{1}{4\pi} S(\mathbf{r}, t)$ simplemente implica que la fuente direccional $S(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)$ resulta de dividir la fuente total entre todas las direcciones.

Al desarrollar la ecuación (2.32)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi u} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{3}{4\pi u} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \Sigma_T(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t) \\ + \frac{3}{4\pi} \Sigma_T(\mathbf{r}) \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \\ = \frac{1}{4\pi} S(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \int d\hat{\Omega}' \Phi(\mathbf{r}, t) \Sigma_s(r, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) + \frac{3}{4\pi} \int d\hat{\Omega}' \hat{\Omega}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \Sigma_s(r, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Luego, multiplicando por Ω_z e integrando sobre todas las direcciones $d\hat{\Omega}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi u} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) \int d\hat{\Omega} \Omega_z + \frac{3}{4\pi u} \frac{\partial}{\partial t} \int d\hat{\Omega} \Omega_z \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \int d\hat{\Omega} \Omega_z \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Phi(\mathbf{r}, t) \\ + \frac{3}{4\pi} \int d\hat{\Omega} \Omega_z \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \Sigma_T(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t) \int d\hat{\Omega} \Omega_z \\ + \frac{3}{4\pi} \Sigma_T(\mathbf{r}) \int d\hat{\Omega} \Omega_z \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \\ = \frac{1}{4\pi} S(\mathbf{r}, t) \int d\hat{\Omega} \Omega_z + \frac{1}{4\pi} \int d\hat{\Omega} \Omega_z \int d\hat{\Omega}' \Phi(\mathbf{r}, t) \Sigma_s(r, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) \\ + \frac{3}{4\pi} \int d\hat{\Omega} \Omega_z \int d\hat{\Omega}' \hat{\Omega}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \Sigma_s(r, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

En los términos 1º, 5º y 6º de la ecuación (2.34) aparece la integral $\int d\hat{\Omega} \Omega_z$, la cual, como se demostró en (i), es igual a cero. Entonces los términos que contienen dicha integral desaparecen y la ecuación (2.34) se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{3}{4\pi u} \frac{\partial}{\partial t} \int d\hat{\Omega} \Omega_z \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \int d\hat{\Omega} \Omega_z \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \int d\hat{\Omega} \Omega_z \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \\ + \frac{3}{4\pi} \Sigma_T(\mathbf{r}) \int d\hat{\Omega} \Omega_z \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \\ = \frac{1}{4\pi} \int d\hat{\Omega} \Omega_z \int d\hat{\Omega}' \Phi(\mathbf{r}, t) \Sigma_s(r, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) \\ + \frac{3}{4\pi} \int d\hat{\Omega} \Omega_z \int d\hat{\Omega}' \hat{\Omega}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \Sigma_s(r, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

El **primer término** de la ecuación (2.35) se puede re-escribir y desarrollar como

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{4\pi u} \frac{\partial}{\partial t} \int d\hat{\Omega} \Omega_z \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{4\pi u} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \int \hat{\Omega} \Omega_z d\hat{\Omega} = \\
& \frac{3}{4\pi u} \frac{\partial}{\partial t} [J_x(x, t) + J_y(y, t) + J_z(z, t)] \cdot \int [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] \Omega_z d\hat{\Omega} = \\
& = \frac{3}{4\pi u} \frac{\partial}{\partial t} \left[J_x(x, t) \int \Omega_x \Omega_z d\hat{\Omega} + J_y(y, t) \int \Omega_y \Omega_z d\hat{\Omega} + J_z(z, t) \int \Omega_z^2 d\hat{\Omega} \right] \quad (2.36)
\end{aligned}$$

donde aparecen las integrales $\int \Omega_x \Omega_z d\hat{\Omega}$, $\int \Omega_y \Omega_z d\hat{\Omega}$ y $\int \Omega_z^2 d\hat{\Omega}$. Se puede demostrar que las integrales con productos de componentes diferentes resultan cero. Eso es

$$\int \Omega_x \Omega_z d\hat{\Omega} = \int \Omega_y \Omega_z d\hat{\Omega} = 0 \quad (2.37)$$

Mientras que aquellas con componentes iguales resultan

$$\int \Omega_z^2 d\hat{\Omega} = \frac{4\pi}{3} \quad (2.38)$$

Por lo tanto, el *primer término* se reduce a

$$\frac{3}{4\pi u} \frac{\partial}{\partial t} \int d\hat{\Omega} \Omega_z \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{4\pi u} \frac{4\pi}{3} \frac{\partial}{\partial t} J_z(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} J_z(\mathbf{z}, t) \quad (2.39)$$

El **segundo término** de la ecuación (2.35) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \int d\hat{\Omega} \Omega_z \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \Phi(\mathbf{r}, t) \cdot \int \hat{\Omega} \Omega_z d\hat{\Omega} = \\
& = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial y} \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial z} \Phi(\mathbf{r}, t) \right] \cdot \int [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] \Omega_z d\hat{\Omega} = \\
& = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \Phi(\mathbf{r}, t) \int \Omega_x \Omega_z d\hat{\Omega} + \frac{\partial}{\partial y} \Phi(\mathbf{r}, t) \int \Omega_y \Omega_z d\hat{\Omega} + \frac{\partial}{\partial z} \Phi(\mathbf{r}, t) \int \Omega_z^2 d\hat{\Omega} \right] \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Donde nuevamente aparecen las integrales $\int \Omega_x \Omega_z d\hat{\Omega}$, $\int \Omega_y \Omega_z d\hat{\Omega}$ y $\int \Omega_z^2 d\hat{\Omega}$ ya conocidas. Por tanto, el segundo término (ecuación 2.40) queda

$$\frac{1}{4\pi} \int d\hat{\Omega} \Omega_z \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{4\pi}{3} \frac{\partial}{\partial z} \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.41)$$

El **tercer término** de la ecuación (2.35) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{4\pi} \int d\hat{\Omega} \Omega_z \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{4\pi} \vec{\nabla} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \int \Omega_z \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega} d\hat{\Omega} = \\
& = \frac{3}{4\pi} \vec{\nabla} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \int [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] \cdot [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] \Omega_z d\hat{\Omega} = \\
& = \frac{3}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \right] \\
& \cdot \int [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] \cdot [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] \Omega_z d\hat{\Omega} \quad (2.42)
\end{aligned}$$

donde aparecerían integrales con tres componentes de $\widehat{\Omega}$, o de la forma

$$\int \Omega_i \Omega_j \Omega_k d\widehat{\Omega} \quad (2.43)$$

Puede demostrarse que todas estas integrales son iguales a cero. Por tanto, el *tercer término* desaparece.

Ejercicio 2.4. Demostrar que la integral

$$\int \Omega_x \Omega_y \Omega_z d\widehat{\Omega} = 0$$

El **cuarto término** de la ecuación (2.35) se puede desarrollar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{3}{4\pi} \Sigma_T(\mathbf{r}) \int d\widehat{\Omega} \Omega_z \widehat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \frac{3}{4\pi} \Sigma_T(\mathbf{r}) \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \int \widehat{\Omega} \Omega_z d\widehat{\Omega} = \\ &= \frac{3}{4\pi} \Sigma_T(\mathbf{r}) [J_x(x, t) + J_y(y, t) + J_z(z, t)] \\ &\cdot \int [\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z] \Omega_z d\widehat{\Omega} \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde nuevamente aparecen las integrales $\int \Omega_x \Omega_z d\widehat{\Omega}$, $\int \Omega_y \Omega_z d\widehat{\Omega}$ las cuales resultan cero, y $\int \Omega_z^2 d\widehat{\Omega}$, que resulta cero.

Por tanto, el cuarto término queda

$$\frac{3}{4\pi} \frac{4\pi}{3} \Sigma_T(\mathbf{r}) J_z(z, t) = \Sigma_T(\mathbf{r}) J_z(z, t) \quad (2.45)$$

El **quinto término** de la ecuación (2.35) se puede reordenar de la siguiente forma

$$\frac{1}{4\pi} \int d\widehat{\Omega} \Omega_z \int d\widehat{\Omega}' \Phi(\mathbf{r}, t) \Sigma_s(r, \widehat{\Omega}' \cdot \widehat{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int d\widehat{\Omega}' \int d\widehat{\Omega} \Omega_z \Phi(\mathbf{r}, t) \Sigma_s(r, \widehat{\Omega}' \cdot \widehat{\Omega}) \quad (2.46)$$

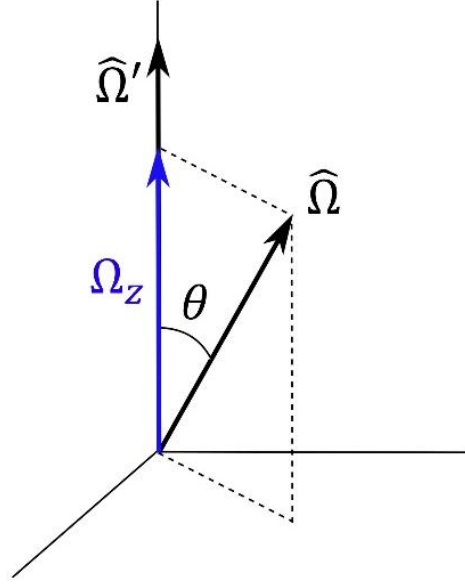
que contiene dos integrales. La integral de la derecha se puede reducir convirtiendo a coordenadas polares. Esto es

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \int d\widehat{\Omega} \Omega_z \Sigma_s(r, \widehat{\Omega}' \cdot \widehat{\Omega}) = \Phi(\mathbf{r}, t) \iint \sin \theta d\theta \Omega_z \Sigma_s(r, \cos \theta) d\varphi \quad (2.47)$$

donde $d\widehat{\Omega} = \sin \theta d\theta d\varphi$, $\widehat{\Omega}' \cdot \widehat{\Omega} = \cos \theta$

De la definición de coseno, $\Omega_z = \Omega \cos \theta$, y de la figura 2.3 se puede ver que $\Omega = \Omega'$, es evidente que $\Omega'_z = \Omega'$, luego $\Omega = \Omega'_z$, y por lo tanto $\Omega_z = \Omega'_z \cos \theta$.

Figura 2.3. Relación entre los vectores unitarios $\hat{\Omega}$ y $\hat{\Omega}'$



Fuente: elaboración propia.

Al sustituir en la ecuación (2.47) el lado derecho se convierte en

$$= \Phi(\mathbf{r}, t) \iint \sin \theta d\theta \Omega'_z \cos \theta \Sigma_s(r, \cos \theta) d\varphi \quad (2.48)$$

Haciendo $\mu = \cos \theta$, es el coseno del ángulo de dispersión y $d\mu = -\sin \theta d\theta$ y sustituyendo

$$\begin{aligned} &= \Phi(\mathbf{r}, t) \iint \sin \theta d\theta \cos \theta \Sigma_s(r, \cos \theta) d\varphi = \Phi(\mathbf{r}, t) \Omega'_z \int d\mu \mu \Sigma_s(r, \mu) \int d\varphi \\ &= 2\pi \Phi(\mathbf{r}, t) \Omega'_z \int d\mu \mu \Sigma_s(r, \mu) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Por definición, el coseno promedio del ángulo de dispersión está dado por

$$\bar{\mu} = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{d\mu \mu \Sigma_s(r, \mu)}{\Sigma_s(r)}$$

de donde se despeja

$$\bar{\mu} \Sigma_s(r) = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu \mu \Sigma_s(r, \mu)$$

por tanto, la ecuación (2.49) se reduce a

$$= \Phi(\mathbf{r}, t) \bar{\mu} \Sigma_s(r) \Omega'_z \quad (2.50)$$

Al sustituir la ecuación (2.50) en el quinto término (ecuación 2.46)

$$\frac{1}{4\pi} \int d\hat{\Omega} \Omega_z \int d\hat{\Omega}' \Phi(\mathbf{r}, t) \Sigma_s(r, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, t) \bar{\mu} \Sigma_s(r) \int d\hat{\Omega}' \Omega'_z \quad (2.51)$$

Pero ya se ha demostrado la integral de la forma $\int d\widehat{\Omega}' \Omega'_z = 0$. Por tanto, se demuestra que el *quinto término* es cero.

El **sexto** y último **término** de la ecuación (2.35)

$$\frac{3}{4\pi} \int d\widehat{\Omega}' \widehat{\Omega}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \int d\widehat{\Omega} \Omega_z \Sigma_s(r, \widehat{\Omega}' \cdot \widehat{\Omega}) \quad (2.52)$$

se puede desarrollar de manera semejante al quinto término; donde se demostró que la integral del lado derecho se redujo a

$$\int d\widehat{\Omega} \Omega_z \Sigma_s(r, \widehat{\Omega}' \cdot \widehat{\Omega}) = \bar{\mu} \Sigma_s(r) \Omega'_z \quad (2.53)$$

Luego, sustituyendo, queda aún la integral en $d\widehat{\Omega}'$ que se puede reacomodar de la siguiente manera

$$= \frac{3}{4\pi} \int d\widehat{\Omega}' \widehat{\Omega}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \bar{\mu} \Sigma_s(r) \Omega'_z = \frac{3}{4\pi} \bar{\mu} \Sigma_s(r) \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \int d\widehat{\Omega}' \widehat{\Omega}' \Omega'_z \quad (2.54)$$

Ejercicio 2.5. Demostrar que la integral $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \int d\widehat{\Omega}' \widehat{\Omega}' \Omega'_z = \frac{4\pi}{3} \mathbf{J}_z(\mathbf{r}, t)$

La deducción es similar a la deducción de la ecuación (3.44). Por tanto, el *sexto término* queda

$$\frac{3}{4\pi} \int d\widehat{\Omega}' \widehat{\Omega}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \int d\widehat{\Omega} \Omega_z \Sigma_s(r, \widehat{\Omega}' \cdot \widehat{\Omega}) = \frac{3}{4\pi} \frac{4\pi}{3} \bar{\mu} \Sigma_s(r) \mathbf{J}_z(\mathbf{r}, t) = \bar{\mu} \Sigma_s(r) \mathbf{J}_z(\mathbf{r}, t) \quad (2.55)$$

Al sustituir en las ecuaciones (2.39), (2.45) y (2.55), en la ecuación (2.35) resulta

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_z(\mathbf{z}, t) + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \Phi(\mathbf{r}, t) + \Sigma_T(\mathbf{r}) \mathbf{J}_z(\mathbf{z}, t) = \bar{\mu} \Sigma_s(r) \mathbf{J}_z(\mathbf{z}, t) \quad (2.56)$$

O bien

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_z(\mathbf{z}, t) + (\Sigma_T(\mathbf{r}) - \bar{\mu} \Sigma_s(r)) \mathbf{J}_z(\mathbf{z}, t) = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.57)$$

Se llama sección transversal macroscópica de transporte a la asociación

$$\Sigma_{tr}(\mathbf{r}) = (\Sigma_T(\mathbf{r}) - \bar{\mu} \Sigma_s(r)) \quad (2.58)$$

Por tanto, la ecuación (2.57) se puede reducir a

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_z(\mathbf{z}, t) + \Sigma_{tr}(\mathbf{r}) \mathbf{J}_z(\mathbf{z}, t) = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.59)$$

Si se repite el mismo desarrollo multiplicando primero por la componente Ω_y y se integra sobre todas las direcciones $d\widehat{\Omega}$, se obtendrá

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} J_y(\mathbf{y}, t) + \Sigma_{tr}(\mathbf{r}) J_y(\mathbf{y}, t) = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.60)$$

Y si se repite el mismo desarrollo, multiplicando por la componente y Ω_x y se integra sobre todas las direcciones $d\hat{\Omega}$ se obtendrá

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} J_x(\mathbf{x}, t) + \Sigma_{tr}(\mathbf{r}) J_x(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.61)$$

Al sumar las ecuaciones (2.59), (2.60) y (2.61) se obtiene

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \Sigma_{tr}(\mathbf{r}) \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{3} \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.62)$$

que en todo rigor es la **regla de Fick**.

Una simplificación de esta regla hace uso del hecho de que la velocidad de los neutrones es $u \approx 10^5 \frac{cm}{s}$, en tal caso el primer término $\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ es muy pequeño comparado con los otros dos y se ignora. De donde resulta

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{3\Sigma_{tr}(\mathbf{r})} \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.63)$$

o bien

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -D(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.64)$$

donde

$$D(\mathbf{r}) = \frac{1}{3\Sigma_{tr}(\mathbf{r})} \quad (2.65)$$

es llamado **coeficiente de difusión**.

Capítulo 3. Ecuación de difusión para una-velocidad

La *Ecuación de Transporte* para una-velocidad es

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) + \hat{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) + \Sigma_T(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) \\ = S(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) + \int d\hat{\Omega}' \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}', t) \Sigma_s(r, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Se puede obtener una ecuación independiente de la dirección al integrar la ecuación anterior, en todas las direcciones. Esto es

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \int d\hat{\Omega} \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) + \int d\hat{\Omega} \hat{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) + \int d\hat{\Omega} \Sigma_T(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) \\ = \int d\hat{\Omega} S(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) + \int d\hat{\Omega} \int d\hat{\Omega}' \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}', t) \Sigma_s(r, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Debe ser evidente que cuando se integra en función de la dirección se pierde la dependencia con la dirección. Esto es

$$\begin{aligned} \int d\hat{\Omega} \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) &= \Phi(\mathbf{r}, t) \\ \int d\hat{\Omega} \hat{\Omega} \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) &= \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \\ \int d\hat{\Omega} S(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) &= S(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Un poco menos evidente es integrar el último término de la ecuación (3.1). Para ello, dicho término se puede reacomodar como

$$\int d\hat{\Omega}' \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}', t) \int d\hat{\Omega} \Sigma_s(r, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) \quad (3.3)$$

Al utilizar coordenadas polares se puede demostrar que la integral del lado derecho es

$$\int d\hat{\Omega} \Sigma_s(r, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) = \Sigma_s(r) \quad (3.4)$$

Ejercicio 3.1. Demostrar la ecuación (3.3)

Solución: al utilizar este resultado, la ecuación (3.4) resulta

$$\int d\hat{\Omega}' \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}', t) \int d\hat{\Omega} \Sigma_s(r, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) = \Sigma_s(r) \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (3.3a)$$

Cuando se utilizan las ecuaciones (3. 2) y (3.4), la ecuación (3.1) se convierte en

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \Sigma_T(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) + \Sigma_s(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (3.5)$$

o bien

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + [\Sigma_T(\mathbf{r}) - \Sigma_s(\mathbf{r})] \Phi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \quad (3.5a)$$

Si al número total de reacciones se le restan las dispersiones quedan las absorciones, entonces $\Sigma_T(\mathbf{r}) - \Sigma_s(\mathbf{r}) = \Sigma_a(\mathbf{r})$, y al sustituir

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \Sigma_a(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \quad (3.6)$$

Esta sigue siendo otra forma de balance de la *Ecuación de Transporte*, en la que es evidente que se desconocen dos variables $\Phi(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$. Es aquí donde interviene la ley de Fick [ecuación (2.64)]. Al sustituir la ecuación (2.64) en la (3.6) se obtiene

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) - D(\mathbf{r}) \nabla \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) + \Sigma_a(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \quad (3.7)$$

La cual es la *Ecuación de Difusión* para una velocidad; una simplificación de la *Ecuación de Transporte*.

Condiciones a la frontera

La solución de la ecuación de difusión, como toda ecuación diferencial, requiere condiciones a la frontera para ser resuelta. Dada su naturaleza, hay tres tipos de condiciones frontera

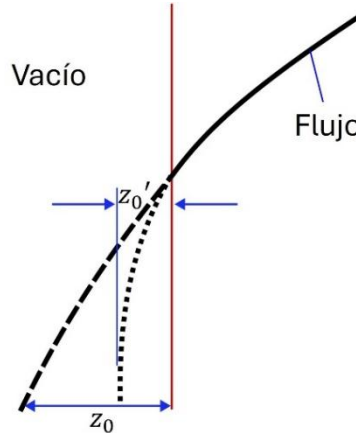
- i) El flujo debe permanecer finito, excepto en la vecindad de una fuente de neutrones.
- ii) Entre dos medios materiales distintos el flujo y la corriente deben ser continuos.
- iii) Entre un medio material y el vacío, el flujo debe desaparecer a una distancia.

$$z_0 = 0.71 \lambda_{tr} \quad (3.8)$$

Demostración de la condición en el vacío (iii) y longitud extrapolada

Por simplicidad se considera que la frontera entre un medio con neutrones y el vacío es plana, de modo que el flujo y la corriente en la frontera dependen de una sola coordenada, digamos x (figura 3.1).

Figura 3.1. Longitud extrapolada



Fuente: elaboración propia.

Si por lógica asumimos que la corriente en el vacío, a partir de la frontera plana, tiende a cero, entonces

$$\int d\hat{\Omega} \Omega_x \Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = 0 \quad (3.9)$$

Al sustituir la expansión del flujo angular, ecuación (2.31) $\Phi(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = \frac{1}{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, la ecuación (3.9) resulta

$$\frac{1}{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, t) \int d\hat{\Omega} \Omega_x + \frac{3}{4\pi} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \int \hat{\Omega} \Omega_x d\hat{\Omega} = 0 \quad (3.10)$$

donde, como se ha visto anteriormente, la integral del primer término es

$$\int d\hat{\Omega} \Omega_x = 0 \quad (2.23)$$

y la integral del segundo término es

$$\int \hat{\Omega} \Omega_x d\hat{\Omega} = \frac{4\pi}{3} \quad (2.27)$$

Por lo tanto, sustituyendo las ecuaciones (2.23) y (2.27) en la ecuación (3.10)

$$\frac{3}{4\pi} J_x(\mathbf{x}, t) \frac{4\pi}{3} = cte \quad (3.11)$$

o bien

$$J_x(\mathbf{x}, t) = cte \quad (3.11a)$$

Y usando la regla de Fick

$$J_x(\mathbf{x}, t) = -D \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, t) = cte \quad (3.11b)$$

En un medio isotrópico, en la frontera, el flujo se divide entre 2. Esto es

$$J_x(\mathbf{0}, t) = \frac{1}{2} \phi(0, t) \quad (3.12)$$

Por tanto, igualando las ecuaciones (3.11b) y (3.12)

$$-D \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, t) = \frac{1}{2} \phi(0, t) \quad (3.13)$$

o bien

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x, t) = -\frac{1}{2D} \phi(0, t) \quad (3.13a)$$

Si en la vecindad de la frontera, remplazamos una función lineal, es decir

$$\phi(x, t) = \phi(0, t)(1 + Kx) \quad (3.14)$$

para derivar

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x, t) = K \phi(0, t) \quad (3.15)$$

Por analogía entre las ecuaciones (3.13a) y (3.15)

$$K = -\frac{1}{2D} = -\frac{3}{2}\Sigma_{tr} \quad (3.16)$$

Evalutando la ecuación (3.14) x para $\phi(x, t) = 0$

$$1 + Kx = 0 \quad (3.17)$$

Al sustituir la ecuación (3.16) en la (3.17) y al despejar el valor de x , para el cual el flujo desaparece, es

$$x = \frac{2}{3\Sigma_{tr}} = \frac{2}{3}\lambda_{tr} \quad (3.18)$$

donde se ha utilizado la definición de camino libre medio (ec. 1.17).

A esta distancia denominada $x = z_0$ se le llama longitud extrapolada. En realidad, el valor anterior es una aproximación burda porque se asumió una función lineal. Choen (1970) estableció que

$$z_0 = 0.71044 \lambda_{tr} \quad (3.19)$$

Si la longitud extrapolada se aproxima mediante la ecuación (3.18) $\left[z_0 = \frac{2}{3\Sigma_{tr}}\right]$ y se utiliza la definición del coeficiente de difusión $D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}(r)}$ ecuación (2.65), z_0 puede ser aproximada como

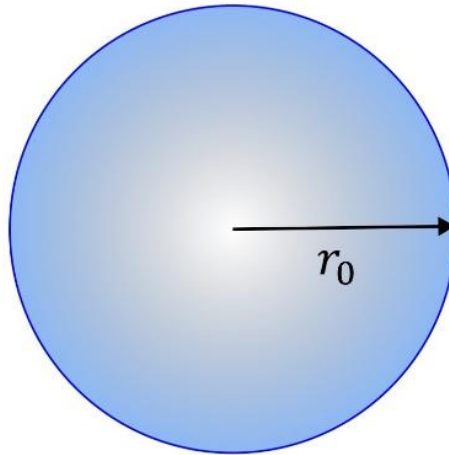
$$z_0 = 2D \quad (3.20)$$

Solución de la ecuación de difusión en estado estacionario en coordenadas esféricas

Considérese una fuente esférica de neutrones de radio r_0 y espesor infinitesimal inmersa en un medio difusor de neutrones (figura 3.2). Se parte de la ecuación de difusión

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) - D(\mathbf{r}) \nabla \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) + \Sigma_a(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \quad (3.7)$$

Figura 3.2. Fuente de neutrones esférica



Fuente: elaboración propia.

En estado estacionario, el término $\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t)$ de la ecuación de difusión (ec. 3.7) es igual a cero. Y si el medio es homogéneo el coeficiente de difusión y la sección transversal de absorción son constantes. En tal caso, la ecuación de difusión se reduce a

$$-D \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) + \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}) \quad (3.21)$$

Como se trata de una esfera, conviene utilizar el laplaciano del flujo $D \nabla^2$ en coordenadas esféricas. En tal caso, sin considerar dependencia axial ni azimutal dada la simetría de una esférica, el laplaciano es

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \Phi(\mathbf{r}) \quad (3.22)$$

Al sustituir en la ecuación (3.21)

$$- \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \Phi(\mathbf{r}) + \frac{\Sigma_a}{D} \Phi(\mathbf{r}) = \frac{S(\mathbf{r})}{D} \quad (3.23)$$

En $r \neq r_0$ no hay fuente de neutrones; entonces la ecuación se reduce a

$$- \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \Phi(\mathbf{r}) + \frac{\Sigma_a}{D} \Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.24)$$

que se resuelve usando el cambio de variable

$$u(r) = r \phi(r) \quad \text{o bien} \quad \phi(r) = \frac{u(r)}{r} \quad (3.25)$$

Se requiere calcular la primera y segunda derivada de $\phi(r)$ y sustituir.

Ejercicio 3.2. Utilizando la ecuación (3.12) demostrar que

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(r)}{dr} &= \frac{1}{r^2} \left(r \frac{du}{dr} - u \right) \\ \frac{d^2\phi(r)}{dr^2} &= \frac{1}{r} \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{2}{r^3} u \end{aligned}$$

Ejercicio 3.3. Demostrar, usando las expresiones anteriores, que la ecuación diferencial (3.11) se convierte en

$$\frac{d^2u}{dr^2} - K^2 u = 0 \quad (3.26)$$

donde

$$K^2 = -\frac{\Sigma_a}{D}$$

La ecuación (3.26) es una ecuación diferencial de segundo orden, que se resuelve haciendo uso de la ecuación auxiliar de raíces $m^2 - K^2 = 0$ de donde $m_{1,2} = \pm K$. Por tanto, la solución general es

$$u(r) = A_1 e^{-Kr} + A_2 e^{Kr} \quad (3.27)$$

Y como $u(r) = r \phi(r)$

$$\phi(r) = \frac{A_1}{r} e^{-Kr} + \frac{A_2}{r} e^{Kr} \quad (3.28)$$

Pero hay que distinguir el interior y el exterior de la esfera. Para ello se deben establecer las condiciones de frontera:

- a) En el exterior de la esfera, cuando $r \rightarrow \infty$ el flujo no puede tender al infinito, por tanto, la constante $A_2 = 0$ y

$$\phi_1(r) = \frac{A_1}{r} e^{-Kr}, \quad r > r_0 \quad (3.29)$$

- b) En el interior de la esfera, cuando $r \rightarrow 0$ el flujo no puede ser infinito. Eso se puede evitar si $A_2 = -A_3$

$$\phi_2(r) = \frac{A_2}{r} e^{-Kr} - \frac{A_2}{r} e^{Kr} = \frac{A_2}{r} \operatorname{sen} h(Kr), \quad r < r_0 \quad (3.30)$$

Las constantes arbitrarias se pueden conocer aplicando las condiciones de continuidad del flujo y la corriente. En $r = r_0$

$$\phi_1(r_0) = \phi_2(r_0) \quad (3.31)$$

Ejercicio 3.4. Aplicando la condición (ii), también llamada condición salto (§ 3.1), demostrar que $A_1 = A_2 e^{Kr_0} \operatorname{sen} h(Kr_0)$. Nota:

- c) La condición salto implica que la suma de las corrientes es igual a la intensidad de la fuente. Esto es

$$J_1(r_0) - J_2(r_0) = \frac{S}{4\pi r_0^2} \quad (3.22)$$

donde, de acuerdo con la ley de Fick

$$J_1(r_0) = -D_1 \frac{\partial}{\partial r} \phi_1(r) \quad \text{y} \quad J_2(r_0) = -D_1 \frac{\partial}{\partial r} \phi_2(r) \quad (3.33)$$

Ejercicio 3.5. Sustituyendo el resultado del ejercicio 3.4, en las ecuaciones (3.29) y (3.30) y aplicando la condición de continuidad del flujo, determinar A_1 y A_2 .

Fuente puntual

En este caso $r_0 \rightarrow 0$ no se tiene que aplicar la ecuación de difusión a dos medios, sino a un solo medio. No repetiremos el desarrollo, solo nos remitiremos a la solución

$$\phi(r) = \frac{A}{r} e^{-Kr}, \quad r > r_0 \quad (3.29a)$$

(obviamente no aparece la ecuación (3.30)).

La ecuación (3.29) solo tiene una constante de integración. Para evaluar tal constante se aplica la condición de la fuente, que implica que los neutrones son emitidos por la fuente y se distribuyen en forma radial

$$\lim_{r \rightarrow 0} \vec{j}(r) = \frac{S_0}{4\pi r^2}, \quad r > r_0$$

o bien

$$\lim_{r \rightarrow 0} \vec{j}(r)r^2 = \frac{S_0}{4\pi} \quad r > r_0$$

Y de acuerdo con la ley de Fick, como $\vec{J}(r) = -D \frac{\partial}{\partial r} \phi(r)$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \left[-D \frac{\partial}{\partial r} \phi(r) \right] = \frac{S_0}{4\pi}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \left[-DA \left(\frac{-rK e^{-Kr} - e^{-Kr}}{r^2} \right) \right] = \frac{S_0}{4\pi}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} [DA(rK e^{-Kr} + e^{-Kr})] = \frac{S_0}{4\pi}$$

Aplicando el límite y despejando

$$A = \frac{S_0}{4\pi D}$$

Por tanto, se sustituye en la ecuación (3.29a)

$$\phi(r) = \frac{S_0}{4\pi D} \frac{e^{-Kr}}{r}$$

Medio infinito que contiene un conjunto de fuentes puntuales uniformemente distribuidas u homogéneas

El flujo es el resultado de las contribuciones de todas las fuentes puntuales. Esto es

$$\phi(r) = \frac{S_0}{4\pi D} \int \frac{e^{-Kr}}{r} d^3r$$

Dado que d^3r es una diferencial de volumen; se considera una geometría esférica alrededor de cada fuente puntual $d^3r = 4\pi r^2 dr$

Y se sustituye

$$\phi(r) = \frac{S_0}{4\pi D} \int \frac{e^{-Kr}}{r} (4\pi r^2 dr) = \frac{S_0}{D} \int_0^\infty r e^{-Kr} dr =$$

Ejercicio 3.6. Demostrar que

$$\int_0^\infty r e^{-Kr} dr = \frac{1}{K^2} = \frac{\Sigma_a}{D}$$

Por lo tanto

$$\phi(r) = \frac{S_0}{\Sigma_a}$$

Lo que implica que el flujo es constante.

Distancia cuadrática media $\langle r^2 \rangle$

La solución de la ecuación de difusión para una fuente puntual permite definir el concepto distancia cuadrática media $\langle r^2 \rangle$, la cual se puede interpretar como el área, a partir de la aparición de un neutrón en un medio, dentro de la cual dicho neutrón interacciona

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\frac{S_0}{4\pi D} \int r^2 \frac{e^{-Kr}}{r} d^3r}{\frac{S_0}{4\pi D} \int \frac{e^{-Kr}}{r} d^3r}$$

Ejercicio 3.7. Demostrar que

$$\langle r^2 \rangle = \frac{6}{K^2} = 6 \frac{\Sigma_a}{D} = 6L^2$$

donde L es llamada longitud de difusión y $L^2 = \frac{\Sigma_a}{D}$ es el área de difusión.

Capítulo 4. Ecuación de difusión de neutrones en un reactor nuclear

En un reactor nuclear la fuente de neutrones depende de las fisiones nucleares. La razón de fisión o número de fisiones que se producen por unidad de volumen por unidad de tiempo, como se sabe de la física nuclear, es $RR_f = \Sigma_f \phi(r, t)$. Y como se ha visto, en cada fisión se producen ν nuevos neutrones. Por tanto, en un reactor nuclear la fuente de neutrones es

$$S(r, t) = \nu \Sigma_f \phi(r, t) \quad (4.1)$$

La ecuación de difusión de una velocidad en un reactor nuclear es

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \phi(r, t) + \Sigma_a \phi(r, t) - \nabla \cdot D \nabla \phi(r, t) = \nu \Sigma_f \phi(r, t) \quad (4.2)$$

Análisis de la dependencia en el tiempo

La ecuación de difusión (1) es una ecuación diferencial parcial, puede resolverse por el método de separación de variables, asumiendo que el flujo puede descomponerse en dos funciones, una espacial, y la otra temporal

$$\phi(r, t) = \phi(r) T(t) \quad (4.3)$$

Al derivar el primer término de la ecuación (1) se convierte en:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(r, t) = \phi(r) \frac{\partial T(t)}{\partial t} \quad (4.4)$$

y se sustituye en la ecuación de difusión

$$\left\{ \frac{1}{u} \frac{dT(t)}{dt} + \Sigma_a T(t) - \nabla \cdot D \nabla T(t) \right\} \phi(r) = \nu \Sigma_f T(t) \phi(r) \quad (4.5)$$

de donde se cancela $\phi(r)$

$$\frac{1}{u} \frac{dT(t)}{dt} = (\nu \Sigma_f - \Sigma_a + \nabla \cdot D \nabla) T(t) \quad (4.6)$$

o bien

$$\frac{dT(t)}{T(t)} = u (\nu \Sigma_f - \Sigma_a + \nabla \cdot D \nabla) dt \quad (4.7)$$

Al hacer

$$u (\nu \Sigma_f - \Sigma_a + \nabla \cdot D \nabla) = -\Lambda \quad (4.8)$$

o

$$\Lambda = u (\Sigma_a - \nabla \cdot D \nabla - \nu \Sigma_f) \quad (4.9)$$

Así que la ecuación (4.7) se puede reescribir como

$$\frac{dT(t)}{T(t)} = -\Lambda dt \quad (4.10)$$

e integrar

$$\int_{T_0}^T \frac{dT(t)}{T(t)} = -\Lambda \int_0^t dt \quad (4.11)$$

se obtiene

$$T(t) = T_0 e^{-\Lambda t} \quad (4.12)$$

que indica que la dependencia temporal del flujo es de naturaleza exponencial

si $\Lambda > 0$ el flujo disminuye (reactor subcrítico),

si $\Lambda < 0$ el flujo aumenta (reactor crítico),

y si $\Lambda = 0$ el flujo permanece constante, lo que implica el estado estacionario.

Al sustituir la ecuación (4.12) $T(t) = T_0 e^{-\Lambda t}$ en el cambio de variable [ec. (4.3)] $\phi(r, t) = \phi(r) T(t)$

$$\phi(r, t) = \phi(r) T(t) = \phi(r) T_0 e^{-\Lambda t} \quad (4.13)$$

Derivando nuevamente respecto a t

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(r, t) = -\Lambda \phi(r) e^{-\Lambda t} \quad (4.14)$$

y sustituyendo en la ecuación de difusión [ec. (4.2)]

$$\left(-\frac{\Lambda}{u} + \Sigma_a - \nabla \cdot D \nabla \right) \phi(r) e^{-\Lambda t} = \nu \Sigma_f \phi(r) e^{-\Lambda t} \quad (4.15)$$

Y cancelando $e^{-\Lambda t}$

$$\frac{\Lambda}{u} \phi(r) = (\Sigma_a - \nabla \cdot D \nabla - \nu \Sigma_f) \phi(r) \quad (4.16)$$

Buckling material

En estado estacionario ($\Lambda = 0$) y con un coeficiente de difusión independiente de la posición, la ecuación (4.16) se reduce a

$$\nabla^2 \phi(r) + \left(\frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D} \right) \phi(r) = 0 \quad (4.17)$$

Al término:

$$B_m^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D} \quad (4.18)$$

Se le asigna el nombre de *buckling material* (B_m^2), dado que incluye estrictamente características nucleares de los materiales del reactor.

Así la ecuación (4.17) se puede expresar simplemente como

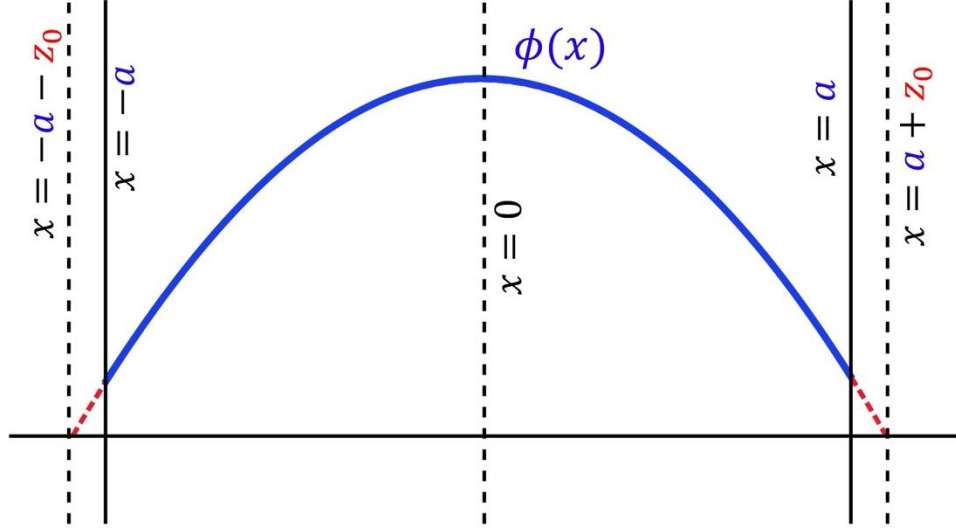
$$\nabla^2 \phi(r) + B_m^2 \phi(r) = 0 \quad (4.19)$$

que es llamada *ecuación de difusión en términos del buckling*.

Ecuación de difusión en una velocidad (reactor placa)

El laplaciano ∇^2 toma la forma de la geometría adoptada, la forma más simple, es decir, en una dimensión (x) corresponde a un reactor placa (figura 4.1)

Figura 4.1. *Flujo de neutrones en un reactor placa (una dimensión)*



Fuente: elaboración propia.

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} \quad (4.20)$$

En estado estacionario ($\Lambda = 0$), y con un coeficiente de difusión independiente de la posición, la ecuación (4.17) se reduce a

$$(\Sigma_a - D\nabla^2 - \nu\Sigma_f)\phi(r) = 0 \quad (4.21)$$

que es cero si

$$\nabla^2 = \frac{\Sigma_a - \nu\Sigma_f}{D} \quad (4.22)$$

Expresión que de acuerdo con (4.18) es el negativo del *buckling material*. Esto es

$$\nabla^2 = -B_m^2 \quad (4.23)$$

Surgimiento de eigenvalores

El reactor placa nos remite al problema de eigenvalores. Para un reactor placa la ecuación de difusión en estado estacionario (4.19) se expresa como:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + B_m^2\phi(x) = 0 \quad (4.24)$$

que se resuelve al hacer uso de la ecuación característica o ecuación auxiliar de raíces; siendo $m_{1,2} = \pm B_m i$. Lo que implica que las raíces son imaginarias, por tanto

$$\phi(x) = \phi_0 \cos(Bx) + \phi_1 \sen(Bx) \quad (4.25)$$

donde momentáneamente se ha omitido el índice m .

Las condiciones a la frontera son tales que

- i) el flujo en $x = 0$ no puede ser cero, por tanto la 2ª solución se deshecha, lo que hace $\phi_1 = 0$
- ii) en la frontera extrapolada ($x = \pm a'$) el flujo debe ser cero. Es decir,

$$\phi(\pm a') = 0$$

Hay una infinidad de valores para los cuales la función $\cos(Ba') = 0$. El conjunto de argumentos que cumplen esta condición está dado por $\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi$, con $n = 0, 1, \dots$

Esto es, en todo rigor no pueda haber una sola B sino que hay un número infinito n de valores, que se llaman eigenvalores y a los cuales se asigna un subíndice. Por tanto

$$B_n a' = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi \quad (4.26)$$

y

$$B_n = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{\pi}{a'} \quad (4.27)$$

En todo rigor el flujo (en estado estacionario) incluye la sumatoria de eigenfunciones

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(B_n x) \quad (4.28)$$

Mientras que la solución general (ec. 4.13) toma la forma general

$$\phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_0 e^{-\Lambda_n t} \cos(B_n x) \quad (4.29)$$

donde, en correspondencia con B_n , a Λ también se le ha asignado el subíndice n .

A medida que n aumenta, tanto Λ_n como B_n aumentan. Sin embargo, Λ_n en la solución anterior está afectada por un signo negativo, por lo tanto, a medida que n aumenta el efecto de las componentes temporales disminuye.

El coeficiente que produce la contribución dominante del flujo a medida que el tiempo aumenta es el menor de todos, Λ_0 . Las contribuciones de los demás coeficientes se desvanecen rápidamente conforme pasa el tiempo.

Al estado estacionario corresponde $\Lambda_0 = 0$ y a este le corresponde el valor B_0 el valor más pequeño de los eigenvalores B_n . De la ecuación (4.26) se observa que este equivale a

$$B_0 = \frac{\pi}{2a'} \quad (4.30)$$

donde está implícita la dimensión o el tamaño del reactor. Por tanto, a B_0 se le llama *buckling* geométrico. Esto es

$$B_0 = B_g = \frac{\pi}{2a'} \quad (4.30a)$$

De hecho, el desarrollo comenzó con B_m , siendo este el *buckling material*, pero del análisis de la solución emerge B_g , en el caso de estado estacionario. Esto implica que son iguales, pero solo en caso de estado estacionario

$$B_m = B_g \quad (4.31)$$

Ecuación de difusión de neutrones en un reactor esférico

Se parte de la ecuación de difusión de una velocidad para un reactor nuclear

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \phi(r, t) + \Sigma_a \phi(r, t) - \nabla \cdot D \nabla \phi(r, t) = v \Sigma_f \phi(r, t) \quad (4.2)$$

En estado estacionario y en términos del *buckling*, la ecuación de difusión se reduce a

$$\nabla^2 \phi(r) + B_m^2 \phi(r) = 0 \quad (4.19)$$

En geometría esférica, el laplaciano es

$$\nabla^2 \Phi(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \Phi(r) \quad (4.31)$$

Por tanto, la ecuación de difusión para geometría esférica es

$$\frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \Phi(r) + B_m^2 \Phi(r) = 0 \quad (4.32)$$

Que se resuelve al hacer uso del cambio de variable

$$u(r) = r \phi(r) \quad \text{o bien} \quad \phi(r) = \frac{u(r)}{r}$$

Puede demostrarse que

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{1}{r^2} \left(r \frac{du}{dr} - u \right)$$

y

$$\frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{2}{r^3} u$$

Luego, al sustituir en la ecuación (4.32) la ecuación diferencial se reduce a

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + B_c^2 u = 0 \quad (4.33)$$

Donde el subíndice del *buckling* m se ha cambiado por c para enfatizar que se trata de un reactor crítico.

La ecuación se resuelve al usar la ecuación auxiliar de raíces $m^2 + B_c^2 = 0$ de donde $m_{1,2} = \pm iB_c$

Y la solución general es

$$u(r) = A_1 e^{-iB_c r} + A_2 e^{iB_c r} \quad (4.34)$$

Y como $u(r) = r \phi(r)$

$$\phi(r) = \frac{A_1}{r} e^{-iB_c r} + \frac{A_2}{r} e^{iB_c r} \quad (4.35)$$

o bien

$$\phi(r) = \frac{A_1 \sin B_c r}{r} + \frac{A_2 \cos B_c r}{r} \quad (4.36)$$

Donde se toma $A_2 = 0$ dado que si $r \rightarrow 0 \phi(r) \rightarrow \infty$

La solución específica para el reactor esférico por el momento se reduce a

$$\phi(r) = \frac{A_1 \sin B_c r}{r} \quad (4.37)$$

Para conocer A_1 se requiere aplicar la condición de frontera $\phi(R') = 0$, que implica que en la frontera extrapolada del reactor de radio R , el flujo debe desaparecer. Al aplicar esta condición a la frontera

$$\frac{A_1 \sin(B_c R')}{R'} = 0 \quad (4.38)$$

que nos remite a un problema de los eigenvalores, puesto que hay muchos valores de $B_c R'$ para los cuales $\sin(B_c R') = 0$; por tanto el subíndice c se cambia por n . Los valores que puede tomar $B_n R'$ son

$$B_n R' = 0, \pi, 2\pi \dots \quad (4.39)$$

El primer valor (0) sería un valor trivial, por lo tanto, el primer eigenvalor real es

$$B_1 R' = \pi \quad (4.40)$$

de donde

$$B_g = \frac{\pi}{R'} \quad (4.40a)$$

En el cual se ha cambiado el subíndice c por g , dado de que R' es un parámetro geométrico. B_g se le llama *buckling* geométrico. Y dado que surgió del hecho de haber establecido la ecuación de difusión para estado estacionario, debe ser igual al *buckling material*. Esto es

$$B_g^2 = B_m^2 \quad (4.31)$$

Por tanto, para un reactor esférico

$$B_g^2 = \left(\frac{\pi}{R'}\right)^2 \quad (4.40b)$$

Ecuación de difusión de neutrones en un reactor cilíndrico

Se parte de la ecuación de difusión de una velocidad, que para un reactor nuclear es

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) + \Sigma_a \phi(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot D \nabla \phi(\mathbf{r}, t) = \nu \Sigma_f \phi(\mathbf{r}, t) \quad (4.2)$$

En estado estacionario y en términos del *buckling* la ecuación de difusión se reduce a

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + B_m^2 \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.19)$$

En geometría cilíndrica el laplaciano es

$$\nabla^2 \Phi(\rho, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi(\rho, z) \quad (4.41)$$

Por tanto, la ecuación de difusión se convierte en

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Phi(\rho, z) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi(\rho, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(\rho, z) + B_m^2 \Phi(\rho, z) = 0 \quad (4.42)$$

Que se resuelve por el método de separación de variables, para lo cual el cambio de variable es

$$\Phi(\rho, z) = R(\rho)Z(z) \quad (4.43)$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \Phi(\rho, z) = R'(\rho)Z(z) \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho^2} \Phi(\rho, z) = R''(\rho)Z(z) \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(\rho, z) = R(\rho)Z''(z) \quad (4.46)$$

Al sustituir en la ecuación (4.42)

$$R''(\rho)Z(z) + \frac{1}{\rho} R'(\rho)Z(z) + R(\rho)Z''(z) + R(\rho)Z(z)B_m^2 = 0 \quad (4.47)$$

y dividiendo entre $\chi(\rho)Z(z)$

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho} \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + B_m^2 = 0 \quad (4.48)$$

Si a

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho} \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} = -\alpha^2 \quad y \quad \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\beta^2$$

Al separar variables

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) + \alpha^2 R(\rho) = 0 \quad (4.49)$$

y

$$Z''(z) + \beta^2 Z(z) = 0 \quad (4.50)$$

donde

$$B_m^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (4.51)$$

La ecuación (4.49) es una ecuación de Bessel (§ A 2). En esta ecuación no aparece n^2 , esto implica que $n = 0$, por tanto la ecuación es de orden cero. Pero aparece α^2 en lugar de 1. Por tanto, en todo rigor la solución general es la combinación lineal de las dos funciones de Bessel $J_0(\alpha\rho)$ y $Y_0(\alpha\rho)$, en las cuales el argumento no es (ρ) solo sino $(\alpha\rho)$ Esto es

$$R(\rho) = A J_0(\alpha\rho) + B Y_0(\alpha\rho) \quad (4.52)$$

La ecuación (4.50), como ya se ha visto, es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, se resuelve al usare la ecuación auxiliar de raíces. Las raíces son imaginarias, por tanto, la solución es una combinación lineal de $\sin \beta z$ y $\cos \beta z$. Esto es

$$Z(z) = Z_0 \cos \beta z + Z_1 \sin \beta z \quad (4.53)$$

Condiciones a la frontera

- i) El flujo de neutrones debe ser real y finito.
 - a. En el caso de la dependencia radial, como el flujo debe ser real, $B = 0$ dado que si $\rho \rightarrow 0$, $Y_0(\rho) \rightarrow -\infty$. Por tanto, la solución (ec. 4.49) se reduce a

$$R(\rho) = A J_0(\alpha\rho) \quad (4.54)$$

- b. En el caso de la dependencia axial, el flujo tiene que ser simétrico a partir de $z = 0$ y no puede ser cero en $z = 0$, por tanto, en la ecuación (5.53) no se requiere la función seno y para ello se hace $Z_1 = 0$ y la solución se reduce a

$$Z(z) = Z_0 \cos \beta z \quad (4.55)$$

- ii) En las fronteras extrapoladas el flujo debe ser cero.
 - a. Para la envolvente del cilindro $\chi(R') = 0$

Por tanto

$$0 = A J_0(\alpha R') \quad (4.56)$$

En la figura A 6, **anexo 2** se observa que la primera raíz de J_0 es 2.405. Luego $\alpha R' = 2.405$. Por lo tanto

$$\alpha = \frac{2.405}{R'} \quad (4.57)$$

Luego sustituyen en la ecuación (4.54)

$$R(\rho) = A J_0\left(\frac{2.405}{R'}\rho\right) \quad (4.58)$$

- b. Para la base y la tapa del cilindro $Z(\pm H') = 0$.

Por tanto $0 = \cos(\pm\beta H')$, como se sabe hay muchos valores de $\pm\beta H'$ que cumplen esa condición, el primer valor es $\frac{\pi}{2}$. Por tanto

$$\beta = \frac{\pi}{2H'} \quad (4.59)$$

Luego sustituyen en la ecuación (4.55)

$$Z(z) = Z_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) \quad (4.60)$$

Y se sustituyen las ecuaciones (4.58) y (4.60) en la (4.43)

$$\Phi(\rho, z) = \emptyset_0 J_0 \left(\frac{2.405\rho}{R'} \right) \cos \left(\frac{\pi z}{2H'} \right) \quad (4.61)$$

donde $\emptyset_0 = AZ_0$

Adicionalmente, al sustituir las ecuaciones (4.57) y (4.59) de la ecuación (4.51) el *buckling* geométrico resulta

$$B_g^2 = \left(\frac{2.405}{R'} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2H'} \right)^2 \quad (4.62)$$

Análisis de la criticidad

En la ecuación

$$\frac{\Lambda}{u} \phi(r) = (\Sigma_a - \nabla \cdot D \nabla - \nu \Sigma_f) \phi(r) \quad (4.16)$$

Λ representa la constante de decaimiento del flujo de neutrones. Y de acuerdo con la ecuación (4.23) $\nabla^2 = -B_m^2$. Luego, al despejar Λ , sustituir la ecuación (4.23), factorizar Σ_a y simplificar, Λ puede expresarse como

$$\Lambda = u \Sigma_a \left(1 + \frac{D}{\Sigma_a} B_m^2 - \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a} \right) \quad (4.63)$$

De acuerdo con (§ 4.3) hay muchos valores de *buckling* geométrico y dado que en criticidad $B_g^2 = B_m^2$, a Λ , lo mismo que a B se les puede asignar un índice n . En tal caso, la ecuación (4.67) se convierte en

$$\Lambda_n = u \Sigma_a \left(1 + L^2 B_n^2 - \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a} \right) \quad (4.64)$$

donde

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} \quad y \quad B_m^2 = B_n^2$$

Para $\Lambda_0 = 0$, es decir, para un reactor crítico

$$0 = u \Sigma_a \left(1 + L^2 B_0^2 - \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a} \right) \quad (4.65)$$

De donde, al despejar:

$$B_0^2 = \frac{\frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a} - 1}{L^2} = \frac{\frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a} - 1}{\frac{D}{\Sigma_a}} \quad (4.66)$$

o simplemente

$$B_0^2 = B_m^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D} \quad (4.67)$$

Un reactor no necesariamente crítico tiene un *buckling* material cualquiera

$$B_m^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D} \quad (4.18)$$

mientras que en un reactor crítico, de acuerdo con la ecuación (4.32), su *buckling* geométrico es

$$B_g^2 = \frac{\nu_c \Sigma_f - \Sigma_a}{D} \quad (4.68)$$

donde ν_c denota un valor hipotético, que teóricamente habría que ajustar para obligar al *buckling* material a ser igual que el *buckling* geométrico o *buckling* crítico.

De la ecuación (4.68) se puede despejar ν_c

$$\nu_c = \frac{B_g^2 D + \Sigma_a}{\Sigma_f} \quad (4.69)$$

La relación entre ν real y ν_c hipotético es justamente la constante de criticidad

$$k_{eff} = \frac{\nu}{\nu_c} = \frac{\nu}{\frac{B_g^2 D + \Sigma_a}{\Sigma_f}} = \frac{\nu \Sigma_f}{B_g^2 D + \Sigma_a} \quad (4.70)$$

O bien, haciendo uso de $L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$

$$k_{eff} = \frac{\nu}{\nu_c} = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a (B_g^2 L^2 + 1)} \quad (4.71)$$

La constante de multiplicación en función tanto con el *buckling* geométrico como con el *buckling* material se puede obtener utilizando la expresión de *buckling* material

$$B_0^2 = B_m^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D} \quad (4.18)$$

de donde

$$D B_m^2 = \nu \Sigma_f - \Sigma_a \quad (4.72)$$

$$\Sigma_a = \nu \Sigma_f - D B_m^2 \quad (4.73)$$

y sustituyendo Σ_a en la ec (4.70). Esto es

$$k_{eff} = \frac{\nu \Sigma_f}{D B_g^2 + \nu \Sigma_f - D B_0^2} = \frac{\nu \Sigma_f}{D (B_g^2 - B_m^2) + \nu \Sigma_f} \quad (4.74)$$

En el caso de la *Teoría de Difusión* de una-velocidad, a menudo se puede considerar que el producto de, la probabilidad de escape a la resonancia por el factor las fisiones rápidas, es $p\epsilon = 1$; lo que implica que los neutrones que producen fisiones son los que ya escaparon a la resonancia. En tal caso, puede demostrarse que

$$k_\infty = f\eta = \nu \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} \quad (4.75)$$

En dado caso, como una simplificación, la ecuación (4.70) se reduce a

$$k_{eff} = \frac{\nu \Sigma_f}{B_g^2 D + \Sigma_a} = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a (B_g^2 L^2 + 1)} = \frac{k_\infty}{(B_g^2 L^2 + 1)} \quad (4.70a)$$

De acuerdo a la ecuación (4.75), si $k_\infty = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a}$ el término $\frac{1}{(B_g^2 L^2 + 1)}$ debe corresponder a la probabilidad de no escape de los neutrones térmicos, P_{NTh} . Esto es

$$P_{NTh} = \frac{1}{(B_g^2 L^2 + 1)} \quad (4.76)$$

En tal caso, mediante la *Teoría de Difusión* de un grupo, la constante de multiplicación efectiva está dada por

$$k_{eff} = k_\infty P_{NTh} \quad (4.77)$$

o bien, por la ecuación (4.70a)

$$k_{eff} = \frac{k_\infty}{(B_g^2 L^2 + 1)} \quad (4.70a)$$

Al utilizar la expansión en series puede demostrarse que para valores pequeños del producto $B^2 L^2$ el término $(B_g^2 L^2 + 1)$ puede escribirse como $e^{-B_g^2 L^2}$. Por tanto, la ec. (4.70a) puede escribirse como

$$k_{eff} = k_\infty e^{-B_g^2 L^2} \quad (4.78)$$

Ejercicio 4.1. Deducir la ecuación (4.75)

Solución: De acuerdo con la ecuación (1.20) $\eta = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_a}$ y con la ecuación (1.29) $f = \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a}$

Multiplicar

$$\eta f = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_a} \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a}$$

Multiplicando y dividir entre N_a^F

$$\eta f = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_a} \frac{N_a^F}{N_a^F} \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a} = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_a} \frac{N_a^F}{N_a^F} \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a} = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_a} \frac{N_a^F}{N_a^F} \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a} = \nu \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a}$$

donde $\Sigma_f = \sigma_f N_a^F$ y $\Sigma_a^F = \sigma_a N_a^F$

Probabilidad de no-escape de los neutrones en un reactor

La probabilidad de no-escape P_{NTh} es la relación entre el número de neutrones absorbidos en el reactor con relación al número total de neutrones producidos. El número total de neutrones producidos es la suma del número de neutrones que escapan del reactor más el número de neutrones absorbidos.

$$P_{NTh} = \frac{\Sigma_a \int \phi(r) d^3r}{\int \mathbf{J}(r) \cdot d\mathbf{S} + \Sigma_a \int \phi(r) d^3r} \quad (4.79)$$

Para un reactor esférico el flujo está dado por

$$\phi(r) = \frac{\phi_0 \text{sen } B_c r}{r} \quad (4.37)$$

y

$$d^3r = r^2 dr \int_0^{4\pi} d\Omega = r^2 dr \int_0^\pi \text{sen } \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi r^2 dr \quad (4.80)$$

Ejercicio 4.2. Demostrar que para un medio isotrópico $d^3r = 4\pi r^2 dr$ [ec. (4.80)]

Solución: La diferencial de ángulo sólido $d\Omega = r^2 \text{sen } \theta d\theta d\varphi dr$. En un medio isotrópico se pueden integrar todas las direcciones y dejar como variable la posición; en tal caso

$$d^3r = r^2 dr \int_0^{4\pi} d\Omega = r^2 dr \int_0^\pi \text{sen } \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi r^2 dr \quad (4.80)$$

El número de neutrones absorbidos en el reactor estará dado por la integral en el volumen total del reactor

$$\int \phi(r) d^3r = 4\pi\phi_0 \int \frac{\text{sen}(B_c r)}{r} r^2 dr = 4\pi\phi_0 \int r \text{sen}(B_c r) dr \quad (4.81)$$

La integral de la ec. (4.81) se puede resolver por partes

$$\int r \text{sen}(B_c r) dr = uv - \int v du \quad (4.82)$$

haciendo $u = r$ y $dv = \text{sen}(Br)$; $du = dr$ y $v = -\frac{1}{B} \cos(Br)$. Esto es

$$\begin{aligned} \int \text{sen}(B_c r) r dr &= uv - \int v du = -\frac{r}{B_c} \cos(Br) - \frac{1}{B_c} \int \cos(B_c r) du = \\ &= \left[-\frac{r}{B_c} \cos(B_c r) + \frac{r}{B_c^2} \text{sen}(B_c r) \right]_0^{R'} = \\ &= \left\{ -\frac{R'}{B_c} \cos(B_c R') + \frac{R'}{B_c^2} \text{sen}(B_c R') \right\} - \left\{ -\frac{0}{B_c} \cos(0) + \frac{0}{B_c^2} \text{sen}(0) \right\} = \\ &= -\frac{R'}{B_c} \cos(B_c R') + \frac{R'}{B_c^2} \text{sen}(B_c R') \end{aligned} \quad (4.83)$$

De acuerdo a la ecuación (4.40a) $B_c = B_g = \frac{\pi}{R'}$. Después se sustituye en la ecuación (4.83)

$$\begin{aligned} \left[-\frac{R'}{B_c} \cos\left(\frac{\pi}{R'} R'\right) + \frac{R'}{B_c^2} \text{sen}\left(\frac{\pi}{R'} R'\right) \right] &= \left[-\frac{R'}{B_c} \cos(\pi) + \frac{R'}{B_c^2} \text{sen}(\pi) \right] \\ &= \frac{R'}{B_c} \end{aligned} \quad (4.84)$$

Luego, se sustituye en la ecuación (4.81)

$$\int \phi(r) d^3\mathbf{r} = 4\pi\phi_0 \frac{R'}{B_c} \quad (4.85)$$

Mientras que el número de neutrones que escapan estará dado por la integral a través de toda la superficie del reactor

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (4.86)$$

De acuerdo con (§ 2.1)

$$J(r) = -D(r)\nabla \Phi(r) \quad (2.64)$$

Y para geometría esférica y un medio isotrópico $\nabla \Phi(r) = -D \frac{d}{dr} \Phi(r)$. Luego, se deriva la ecuación (4.37) y se sustituye en la ecuación (2.64)

$$J(r) = \nabla \Phi(r) = -D \frac{\partial}{\partial r} \Phi(r) = -D\phi_0 \left[\frac{B_c}{r} \cos(B_c r) - \frac{\text{sen}(B_c r)}{r^2} \right] \quad (4.87)$$

Usando el teorema de Gauss

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (4.88)$$

Por lo tanto, la integral de superficie se convierte en

$$\begin{aligned} \int \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} &= \int \frac{d}{dr} \left\{ -D\phi_0 \left[\frac{B_c}{r} \cos(B_c r) - \frac{\text{sen}(B_c r)}{r^2} \right] \right\} d^3\mathbf{r} = \\ &= -D\phi_0 \int \left\{ -\frac{B_c^2 \text{sen}(B_c r)}{r} - \frac{B_c \cos(B_c r)}{r^2} - \frac{B_c \cos(B_c r)}{r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \text{sen}(B_c r)}{r^3} \right\} 4\pi r^2 dr = \\ &= 4\pi D\phi_0 \int \left\{ \frac{B_c^2 \text{sen}(B_c r)}{r} + 2 \frac{B_c \cos(B_c r)}{r^2} - \frac{2 \text{sen}(B_c r)}{r^3} \right\} r^2 dr = \\ &= 4\pi D\phi_0 \left\{ B_c^2 \int_0^{R'} r \text{sen}(B_c r) dr + 2B_c \int_0^{R'} \cos(B_c r) dr \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_0^{R'} \frac{\text{sen}(B_c r)}{r} dr \right\} \quad (4.89) \end{aligned}$$

La primera integral ya fue resuelta, [procedimiento en las ecuaciones (4.82) – (4.84)] y resulta $\frac{R'}{B_c}$; la segunda se incluye en el procedimiento de la ecuación (4.83) y resulta 0. La tercera integral es una integral impropia que también resulta igual a 0.

Luego, la integral de la ecuación (4.89) resulta

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 4\pi D\phi_0 B_c^2 \frac{R'}{B_c} = 4\pi D\phi_0 B_c R' \quad (4.90)$$

Al sustituir las ecuaciones (4.85) y (4.89) en la ecuación (4.79)

$$P_{NTh} = \frac{\Sigma_a \int \phi(r) d^3r}{\int \mathbf{J}(r) \cdot d\mathbf{S} + \Sigma_a \int \phi(r) d^3r} = \frac{4\pi\phi_0\Sigma_a \frac{R'}{B_c}}{4\pi D\phi_0 B_c R' + 4\pi\phi_0\Sigma_a \frac{R'}{B_c}} = \frac{\frac{\Sigma_a}{B_c}}{B_c D + \frac{\Sigma_a}{B_c}} = \frac{1}{B_c^2 \frac{D}{\Sigma_a} + 1}$$

$$= \frac{1}{B_c^2 L^2 + 1} \quad (4.91)$$

que es el mismo resultado obtenido en forma intuitiva en la ecuación (4.76). Es importante enfatizar que esta expresión solo es apropiada a un reactor desnudo.

Efecto del reflector en un reactor nuclear

Para un reactor homogéneo con reflector se necesita formular las ecuaciones de difusión para el núcleo y el reflector. Para el núcleo, región 1

$$\Sigma_{a1}\phi_1(r) - \nabla \cdot D\nabla\phi_1(r) = \nu\Sigma_f\phi_1(r) \quad (4.92)$$

Y para el reflector, región 2

$$\Sigma_{a2}\phi_2(r) - \nabla \cdot D\nabla\phi_2(r) = 0 \quad (4.93)$$

Para un reactor placa sin reflector

$$\phi_1(x) = A_1 \cos B_c x \quad (4.37)$$

donde

$$B_0 = B_c = B_g = \frac{\pi}{2a'} = \frac{\pi}{2(a + z_0)} \quad (4.30a)$$

al ser

$$a = \frac{\pi}{2B_c} - z_0 \quad (4.30b)$$

la dimensión de la mitad del ancho de la placa, $a' = a + z_0$ la dimensión extrapolada y $z_0 = 0.71044 \lambda_{tr}$ la longitud extrapolada.

Para un reactor placa con reflector

El flujo en el reflector es tal que

$$\phi_2(x) = A_2 e^{-\frac{x}{L}} \quad (4.94)$$

Condiciones a la frontera, en, la frontera entre núcleo y reflector $x = a$

- i) $\phi_1(a) = \phi_2(a)$
- ii) $-D_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Big|_{x=a} = -D_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \Big|_{x=a}$

Aplicando las condiciones a la frontera

$$A_1 \cos B_c a = A_2 e^{-\frac{a}{L_2}} \quad (4.95)$$

$$A_1 D_1 B_c \sin B_c a = A_2 \frac{D_2}{L_2} e^{-\frac{a}{L_2}} \quad (4.96)$$

Al dividir la ecuación (4.96) entre (4.95)

$$D_1 \tan B_c a = \frac{D_2}{L_2 B_c} \quad (4.97)$$

de donde la dimensión del reactor con reflector es ahora

$$a = \frac{1}{B_c} \arctan \frac{D_2}{D_1 L_2 B_c} \quad (4.98)$$

El ahorro correspondiente al reflector es la diferencia entre las dimensiones, sin ecuación 4.30b y con ecuación (4.98) reflector

$$\delta = \left[\frac{\pi}{2 B_c} - z_0 \right] - \frac{1}{B_c} \arctan \frac{D_2}{D_1 L_2 B_c} \quad (4.99)$$

Teóricamente hay un espesor de reflector x , en el cual el flujo de neutrones se vuelve cero, y si b es el espesor del reflector, el mayor ahorro se obtiene cuando

$$\phi_2(a + b + z_0) = A_2 e^{-\frac{a+b+z_0}{L}} = 0 \quad (4.100)$$

Pero, dado que el flujo disminuye exponencialmente en el reflector, eso implicaría que

$$-\frac{a + b + z_0}{L} = \ln(0) = -\infty \quad (4.101)$$

o $b = \infty$.

Se puede considerar que para $x = 6 \Sigma_t$ el flujo de neutrones es despreciable, en tal caso

$$a + b + z_0 = 6 \Sigma_t$$

Y

$$b = 6 \Sigma_t - (a + z_0) \quad (4.102)$$

¿El agua podría actuar como un reflector?

Para un reactor esférico

El flujo en un reactor esférico está dado por la ecuación

$$\phi_1(r) = \frac{A_1 \sin B_c r}{r} \quad (4.37a)$$

$$\phi_2(r) = \frac{A_2 \sin L_2 r}{r} \quad (4.37b)$$

el *buckling* crítico está dado por

$$B_g = \frac{\pi}{R'} \quad (4.40a)$$

Y el *buckling* material por

$$B_m^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D} \quad (4.18)$$

Condiciones a la frontera, en $x = a$, la frontera entre nucleo y reflector

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \phi_1(a) = \phi_2(a) \\ \text{ii)} \quad & -D_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Big|_{x=a} = -D_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Big|_{x=a} \end{aligned}$$

La continuidad en el flujo implica que

$$\begin{aligned} A_1 \text{sen } B_c a &= A_2 \text{sen } L_2 a \\ A_2 &= A_1 \frac{\text{sen } B_c a}{\text{sen } L_2 a} \end{aligned} \quad (4.103)$$

La continuidad en la corriente

$$\begin{aligned} -D_1 \frac{d}{dx} \left[\frac{A_1 \text{sen } B_c r}{r} \right] \Big|_{r=a} &= -D_2 \frac{d}{dx} \left[\frac{A_2 \text{sen } L_2 r}{r} \right] \Big|_{r=a} \\ D_1 A_1 [a B_c \cos(B_c a) - \text{sen}(B_c a)] &= D_2 A_2 [a L_2 \cos(L_2 a) - \text{sen}(L_2 a)] \end{aligned} \quad (4.104)$$

De las ecuaciones (4.104) y (4.103) se puede conocer A_1 y A_2 . Sin embargo, conocer a es muy complicado, se tendría que obtener por iteraciones.

¿Sería suficiente aproximar el valor del ahorro del tamaño de un reactor, asumiendo que el tamaño del reflector de cualquier reactor se puede asimilar al de un reactor placa?

Potencia térmica

La potencia de un reactor es la energía liberada a partir de las fisiones nucleares por unidad de tiempo. De acuerdo con la definición de razón de reacción nuclear

$$R_i(\vec{r}, \vec{u}, t) = \phi(\vec{r}, \vec{u}, t) \Sigma_i(\vec{r}, \vec{u}, t) \quad (1.12)$$

Un reactor homogéneo puede caracterizarse por una sección transversal de fisión representativa de todo el reactor. Para obtener la potencia total del reactor hay que integrar la razón de reacción total y multiplicarla por el factor de conversión que da cuenta de la energía de cada fisión. Dado de que en cada fisión se liberan 200 MeV o 3.20×10^{-11} J, la potencia total de energía liberada en el reactor puede expresarse por

$$P = 200 \Sigma_f \int \phi(r) d^3 r \left(\frac{\text{MeV}}{s} \right) = 3.20 \times 10^{-11} \Sigma_f \int \phi(r) d^3 r (W) \quad (4.105)$$

En el caso de un reactor esférico, la integral del flujo está dada por la ecuación (4.85)

$$\int \phi(r) d^3 r = 4\pi \phi_0 \frac{R'}{B_c} \quad (4.85)$$

Para otra geometría habrá que calcular la integral del flujo.

En el caso de una geometría cilíndrica la diferencial de volumen depende de las coordenadas (ρ, φ, z) , es decir, $d^3r = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$. Y el flujo está dado por

$$\Phi(\rho, z) = \phi_0 J_0 \left(\frac{2.405\rho}{R'} \right) \cos \left(\frac{\pi z}{2H'} \right) \quad (4.61)$$

Por tanto, la potencia liberada en un reactor con geometría cilíndrica estaría dada por

$$P = 3.20 \times 10^{-11} \Sigma_f \int \phi(\rho, \varphi, z) \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz \quad (W) \quad (4.106)$$

Y al sustituir la ecuación (4.61) en la (4.106)

$$P = 3.20 \times 10^{-11} \Sigma_f \phi_0 \int_0^{R'} \rho J_0 \left(\frac{2.405\rho}{R'} \right) d\rho \int_{-H'}^{H'} \cos \left(\frac{\pi z}{2H'} \right) dz \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (W) \quad (4.107)$$

Capítulo 5. Cinética de reactores nucleares

Problemas de dependencia en el tiempo

Dimensionalmente puede verificarse fácilmente que la relación entre el camino libre medio y su velocidad tiene unidades de tiempo. Por tanto, la relación entre ambos puede definirse como *la vida media de los neutrones* antes de ser absorbidos. Esto es

$$l_a(s) = \frac{\lambda_a(cm)}{u\left(\frac{cm}{s}\right)} = \frac{1}{u\Sigma_a} \quad (5.1)$$

Considerando que los dos eventos que pueden experimentar los neutrones son, la absorción y el escape, de manera semejante a la absorción, puede definirse una vida media de los neutrones ante de escapar. Esta se puede caracterizar mediante la relación $\frac{1}{DB^2}$. Entonces, se puede definir la vida media efectiva de los neutrones como

$$l_{eff} = \frac{\lambda_{eff}}{u} = \frac{1}{u(\Sigma_a + DB^2)} \quad (5.2)$$

De la ecuación (4.70a)

$$v\Sigma_f = k(B_m^2 D + \Sigma_a) \quad (5.3)$$

Y de la ecuación (5.2)

$$(\Sigma_a + DB^2) = \frac{1}{u l_{eff}} \quad (5.4)$$

Sustituyendo la ecuación (5.4) en la (5.3)

$$v\Sigma_f = \frac{k}{u l_{eff}} \quad (5.5)$$

La componente temporal del flujo de manera general está dada por

$$T(t) = T_0 e^{-\Lambda t} \quad (4.12)$$

donde:

$$\Lambda = u(\Sigma_a - \nabla \cdot D \nabla - v\Sigma_f) \quad (4.9)$$

O bien, de acuerdo con la ecuación (4.23) dado que $\nabla \cdot \nabla = -B^2$

$$\Lambda = u(\Sigma_a + DB^2 - v\Sigma_f) \quad (5.6)$$

Luego al sustituir en la ecuación (5.6) en la (4.12)

$$T(t) = T_0 e^{-\Lambda t} = T_0 e^{-u(\Sigma_a + DB^2 - v\Sigma_f)t} \quad (5.7)$$

Al sustituir las ecuaciones (5.4) y (5.5) en (5.7)

$$T(t) = T_0 e^{-\left(\frac{1}{l_{eff}} - \frac{k}{l_{eff}}\right)t} \quad (5.8)$$

O bien

$$T(t) = T_0 e^{\left(\frac{k-1}{l_{eff}}\right)t} \quad (5.8a)$$

La vida efectiva de los neutrones es

$$l_{eff} \approx 10^{-3} \text{ s}$$

Si se asume que k es 1 milésimo por encima de la criticidad; es decir $k = 1.001$, se sustituye en la ecuación (5.8)

$$T(t) = T_0 e^{\left(\frac{1.001-1}{0.001}\right)t} = T_0 e^t$$

Esto implicaría que basta 1 segundo para que el componente temporal de flujo aumente en un factor e , o sea 2.71828182 veces. Lo que querría decir que con una reactividad de tan solo un milésimo por encima de la criticidad se tendría menos de un segundo para controlar el aumento en el flujo en un factor e , lo cual sería muy difícil para cualquier operador de un reactor por muy atento que fuera.

Se llama periodo T al tiempo en el que aumenta el flujo en un factor e . En este caso el periodo sería de 1 segundo.

De la ecuación (5.8a) puede ser evidente que el periodo está dado por

$$T = \frac{k - 1}{l_{eff}} \quad (5.9)$$

Afortunadamente, solo alrededor del 99.35 % de los neutrones de fisión son emitidos en el instante de la fisión, a ellos se les denomina **neutrones prontos**; el restante 0.65 % son emitidos con un cierto retardo, que va desde una fracción de segundo hasta prácticamente un minuto, estos se les denomina **neutrones retardados**.

En la tabla 5.1 se presentan las características de los neutrones retardados, distribuido en 6 grupos, siendo λ_i la constante de decaimiento característica de cada grupo, β_i la abundancia de cada grupo, $\beta = 0.0065$ de los neutrones retardados y β_i/β la abundancia relativa.

Tabla 5.1. *Grupos de neutrones retardados para U^{235}*

Grupo	$\lambda_i \text{ (s}^{-1}\text{)}$	β_i/β
1	0.0124	0.033
2	0.0305	0.219
3	0.111	0.196
4	0.301	0.395
5	1.14	0.115
6	3.01	0.042

Fuente: elaboración propia.

Dados los neutrones retardados, la vida media de los neutrones en un reactor no es propiamente $l_{eff} \approx 10^{-3} \text{ s}$, sino

$$l = (1 - \beta) l_{eff} + \sum_{i=1}^6 \beta_i l_i \quad (5.10)$$

Ejercicio 5.1. Usando la ecuación (5.10) y los datos de la tabla 5.1, a) calcular la vida de los neutrones l para el conjunto de neutrones (prontos + retardados) b), luego, adaptando la ecuación (5.9) calcular el periodo de un reactor, para varios valores de exceso de criticidad, y construir una gráfica.

Ecuaciones cinéticas de los neutrones retardados

Los neutrones de cada grupo de neutrones retardados son liberados por fragmentos de fisión que tienen una constante de decaimiento característica de cada grupo λ_i . A tales fragmentos de fisión se les llama precursores y a la concentración se les designa mediante C_i .

La ecuación cinética de los precursores de cada grupo establece que el cambio en el número de neutrones emitidos por concentración de precursores de cada grupo es el resultado la diferencia entre la formación y decaimiento de los precursores, Esto es

$$\frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \beta_i v \Sigma_f \phi(\mathbf{r}, t) - \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \quad (5.11)$$

donde $\beta_i v \Sigma_f \phi(\mathbf{r}, t)$ es la razón de producción de precursores de neutrones retardados del grupo i (una fracción de las fisiones), y $\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t)$, la razón de decaimiento de los precursores (liberación de neutrones).

La ecuación (5.11) debe estar acoplada a la ecuación de difusión o de flujo de neutrones, considerando que no todos los neutrones son prontos. Por tanto, la ecuación de difusión que considera ambos tipos de neutrones es

$$\frac{1}{u} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left((1 - \beta) v \Sigma_f - \Sigma_a - D B_m^2 \right) \phi(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \quad (5.12)$$

Al hacer uso de la ecuación (5.5) $v \Sigma_f = \frac{k}{l_{eff}}$, la ecuación (5.11) se puede reescribir en la forma

$$\frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \beta_i \frac{k}{l_{eff}} n - \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \quad (5.11a)$$

y dado que $\frac{\phi(\mathbf{r}, t)}{u} = n$, donde n es la densidad de neutrones y usando las ecuaciones (5.3) a (5.5), la ecuación (5.12) puede escribirse como

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \left(\frac{\delta k}{l_{eff}} - \frac{\beta k}{l_{eff}} \right) n + \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \quad (5.12a)$$

Asumiendo un decaimiento en el tiempo similar y de tipo exponencial, tanto del número de precursores como del flujo

$$C_i(\mathbf{r}, t) = \tilde{C}_i e^{\omega t} \quad (5.13)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \tilde{\phi} e^{\omega t} \quad (5.14)$$

se sustituyen en la ecuación (5.11a)

$$\omega \tilde{C}_i e^{\omega t} = \beta_i v \Sigma_f \tilde{\phi} e^{\omega t} - \lambda_i \tilde{C}_i e^{\omega t} \quad (5.15)$$

donde se puede prescindir de $e^{\omega t}$, quedando

$$\tilde{C}_i = \frac{\beta_i v \Sigma_f}{\omega + \lambda_i} \tilde{\phi} \quad (5.16)$$

Y la ecuación (5.12) se convierte en

$$\frac{\omega}{u} \tilde{\phi} e^{\omega t} = \left((1 - \beta) v \Sigma_f - \Sigma_a - DB_m^2 \right) \tilde{\phi} e^{\omega t} + e^{\omega t} \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{C}_i \quad (5.17)$$

donde se puede prescindir de $e^{\omega t}$, obteniendo

$$\frac{\omega}{u} \tilde{\phi} = \left((1 - \beta) v \Sigma_f - \Sigma_a - DB_m^2 \right) \tilde{\phi} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{C}_i \quad (5.18)$$

Al sustituir la ecuación (5.16) en la ecuación (5.18)

$$\frac{\omega}{u} \tilde{\phi} = \left((1 - \beta) v \Sigma_f - \Sigma_a - DB_m^2 \right) \tilde{\phi} + v \Sigma_f \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i} \tilde{\phi} \quad (5.19)$$

se puede prescindir de $\tilde{\phi}$.

Haciendo uso de las ecuaciones (5.4) y (5.5), la ecuación (5.19) se convierte en

$$\frac{1}{u l_{eff}} [\omega l_{eff} + 1 - k + \beta k] = \frac{k}{u l_{eff}} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i} \quad (5.20)$$

donde dividiendo entre k

$$\left[\frac{\omega l_{eff}}{k} + \frac{1 - k}{k} + \beta \right] = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i} \quad (5.21)$$

Ejercicio 5.2. Verificar la deducción de la ecuación (5.21).

Reactividad

Ahora bien, se define la *reactividad* como el exceso relativo de criticidad, esto es

$$\rho = \frac{k - 1}{k} \quad (5.22)$$

dado que

$$\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i \quad (5.23)$$

La ecuación (5.21) se puede escribir como

$$\frac{\omega l_{eff}}{k} - \rho = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i} - \beta_i \right] \quad (5.24)$$

de donde la reactividad resulta

$$\rho = \frac{\omega l_{eff}}{k} - \omega \sum_{i=1}^n \left[\frac{\beta_i}{\omega + \lambda_i} \right] \quad (5.25)$$

Pero de acuerdo con la ecuación (5.22) k es función de la reactividad. Esto es

$$k = \frac{1}{1 - \rho} \quad (5.22')$$

Por lo tanto, al sustituir la ecuación (5.22') en la (5.25)

$$\rho = \frac{\omega l_{eff}}{1 + \omega l_{eff}} - \frac{\omega}{1 + \omega l_{eff}} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\beta_i}{\omega + \lambda_i} \right] \quad (5.26)$$

Se puede observar que la reactividad ρ es una curva de $n+1$ ramas que tiene discontinuidades siempre que $\omega + \lambda_i = 0$. También se puede observar que $\rho \rightarrow 1$ cuando $\omega \rightarrow \infty$.

Por tanto, se puede sumir que a cada valor de λ_i le corresponde un valor de ω , por lo que deben existir n valores ω_i . Ya que al flujo se le asignó un comportamiento exponencial, el flujo debe ser la suma de las contribuciones de todos los modos de decaimiento ω_i . Esto es

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_0 e^{\omega_0 t} + \phi_1 e^{\omega_1 t} + \phi_2 e^{\omega_2 t} + \dots + \phi_n e^{\omega_n t} \quad (5.27)$$

donde, dado que los valores de ω_i son negativos, $\omega_0 > \omega_1 > \dots > \omega_n$

Lo que implica que el valor determinante del comportamiento del flujo es

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_0 e^{\omega_0 t} \quad (5.28)$$

La cantidad $T = \omega_0^{-1}$ es llamada **periodo del reactor**. Un reactor operado en estado crítico tiene un periodo $T = \infty$.

Haciendo uso del periodo, la ecuación (5.26) puede escribirse como

$$\rho = \frac{l_{eff}}{kT} - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\beta_i}{1 + \lambda_i T} \right] \quad (5.29)$$

La cual se denomina *formula horas inversas*.

La reactividad equivalente a 1 hora inversa (*in-hour*) es aquella para la cual el reactor se estabiliza en 1 hora ($T = 3600$ s). Pero esta fórmula no es práctica, porque evidentemente no es lineal, por tanto, prácticamente solo tiene interés histórico. Si en un cierto tiempo la reactividad del reactor se cambia en una cierta cantidad, el flujo comenzará a cambiar de acuerdo con la ecuación (5.27) y después de una fracción de segundos el flujo se comportará acorde a la ecuación (5.28).

Periodo estable de un reactor, en un grupo de neutrones retardados

Si se considera el conjunto de los neutrones retardados en un solo grupo, usando los datos de la tabla 1

$$\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i = 0.0065$$

y

$$\lambda = \left[\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right]^{-1} = 0.077 \text{ s}$$

En tal caso, la ecuación (5.25) puede aproximarse como

$$\rho = \omega l_{eff} + \frac{\beta \omega}{\omega + \lambda} \quad (5.30)$$

que es la ecuación de la reactividad en un grupo de neutrones retardados. Esta es una ecuación cuadrática en ω , cuyas soluciones son

$$\omega_{\pm} = -\frac{\beta - \rho' + \lambda l_{eff}}{2 l_{eff}} \left[1 \mp \sqrt{1 + \frac{4\lambda \rho l_{eff}}{(\beta - \rho' + \lambda l_{eff})^2}} \right] \quad (5.31)$$

Esta expresión se puede simplificar un poco más. Al considerar que $\beta = 0.0065$, $\lambda = 0.077$ y si la reactividad ρ es del orden de 10^{-3} , el termino $\frac{4\lambda \rho l_{eff}}{(\beta - \rho' + \lambda l_{eff})^2}$ es del orden de 10^{-5} , por tanto, la raíz se puede simplificar, de tal forma que

$$\omega_{\pm} = -\frac{\beta - \rho' + \lambda l_{eff}}{2 l_{eff}} \left[1 \mp \frac{2\lambda \rho l_{eff}}{(\beta - \rho' + \lambda l_{eff})^2} \right] \quad (5.32)$$

De donde

$$\omega_+ = \frac{\lambda \rho}{\beta - \rho' + \lambda l_{eff}} \quad (5.33)$$

y

$$\omega_- = -\frac{\beta - \rho' + \lambda l_{eff}}{l_{eff}} \quad (5.34)$$

Dado que $\lambda l_{eff} = 0.0005$ y $\beta - \rho = 0.0065$, λl_{eff} se puede despreciar, por lo tanto

$$\omega_+ = \frac{\lambda \rho}{\beta - \rho'} \quad (5.33a)$$

y

$$\omega_- = -\frac{\beta - \rho'}{l_{eff}} \quad (5.34a)$$

Una forma práctica de evaluar la reactividad es utilizar la relación entre la reactividad y la abundancia de los neutrones retardados; a tal relación se le denomina dólar \$ (o reactividad en dólares)

$$\$ = \frac{\rho}{\beta^*} = \quad (5.35)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (5.33a) y (5.34a)

$$\omega_+ = \frac{\lambda\$}{1 - \$} \quad (5.36)$$

y

$$\omega_- = -\frac{\beta(1 - \$)}{l_{eff}} \quad (6.37)$$

De modo que el flujo solo depende de la combinación lineal de dos funciones

$$\phi(r, t) = \phi_0 e^{\left(\frac{\lambda\$}{\beta - \rho}\right)t} + \phi_1 e^{-\left(\frac{\beta(1 - \$)}{l_{eff}}\right)t} \quad (5.38)$$

Ejercicio 5.3. Medida de la reactividad.

Supóngase que un reactor opera en estado estacionario y en el instante $t = 0$ se aplica un cambio de reactividad de 1ϕ de dólar con el fin de determinar qué tan rápido decae el transiente. De acuerdo con la ecuación (5.67)

$$\omega_- = -\frac{0.0065(0.99)}{0.001} = -6.43 \text{ s}^{-1}$$

y el periodo correspondiente es

$$T_- = 0.156 \text{ s}$$

así que el decaimiento del transiente es muy rápido.

Mientras que de acuerdo con la ecuación (5.37)

$$\omega_+ = \frac{(0.077)(0.01)}{0.0065 - 0.01} = 7.77 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

y

$$T_+ = \frac{1 - \$}{\lambda\$} = 1285.7 \text{ s} = 21.4 \text{ min}$$

Lo cual determina el periodo estable.

Es interesante calcular el valor de 1 in-hour (hora inversa) en \$. En tal caso el periodo estable es 3600 s

$$T_+ = \frac{1 - \$}{\lambda\$} = 3600$$

$$\$ = 0.0036$$

lo que equivale a cerca de $1/3 \phi$; o sea una cantidad de reactividad muy pequeña.

En caso de 2 *in-hour* puede demostrarse que la reactividad es $\rho = 0.0018$.

Ejercicio 5.4. Demostrar, aplicando un 1\$ de reactividad, que los periodos del reactor son

$$T_- = \infty$$

$$T_+ = 0$$

Capítulo 6. Teoría de Frenado

La relación entre la energía de un neutrón antes y después de la interacción con un núcleo de masa A está dada por

$$E = E_0 \left[\frac{1 + A^2 + 2A \cos \theta_C}{[1 + A]^2} \right] \quad (6.1)$$

donde E_0 es la energía cinética del neutrón antes de la interacción, θ_C es el ángulo de dispersión del neutrón en coordenadas de centro de masa.

Ejercicio 6.1. Demostrar la ecuación (6.1) [Demostración: Anexo A 1, ecuación (A.26)]

Dado que

$$-1 \leq \cos \theta_C \leq 1$$

Para $\cos \theta_C = -1$

$$E = E_0 \left[\frac{1 + A^2 - 2A}{[1 + A]^2} \right] = E_0 \left[\frac{A - 1}{A + 1} \right]^2 \quad (6.2)$$

mientras que para $\cos \theta_C = 1$

$$E = E_0 \left[\frac{1 + A^2 + 2A}{[1 + A]^2} \right] = E_0 \quad (6.3)$$

esto implica que

$$E_0 \left[\frac{A - 1}{A + 1} \right]^2 < E < E_0 \quad (6.4)$$

$$\alpha = \left[\frac{A - 1}{A + 1} \right]^2 \quad (6.5)$$

se le llama *factor de frenado*. Por lo tanto, la ecuación (7.4) puede reescribirse como

$$\alpha E_0 < E < E_0 \quad (6.6)$$

siendo E_0 la energía inicial y αE_0 la energía final promedio después de una primera interacción.

Para el hidrógeno $A = 1$, luego $\alpha = 0$

Para isótopos pesados (digamos U^{235}) $A \gg 1$, $\alpha \rightarrow 1$

Sustituyendo α en la ecuación (7.1) puede demostrarse que

$$E = E_0 \left[\left(\frac{1 + \alpha}{2} \right) + \left(\frac{1 - \alpha}{2} \right) \cos \theta_C \right] \quad (6.7)$$

Ejercicio 6.2. Demostrar la ecuación (6.7) (Resuelto: Anexo A1).

Derivando respecto a θ_C

$$\frac{dE}{d\theta_C} = -E_0 \left(\frac{1 - \alpha}{2} \right) \sin \theta_C \quad (6.8)$$

La probabilidad de dispersión de un neutrón en la dirección θ_c en un ángulo diferencial $d\theta_c$ puede definirse como

$$P(\theta_c)d\theta_c = \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (6.9)$$

Dado que $d\Omega = 2\pi \sin\theta_c d\theta_c$ se sustituye

$$P(\theta_c)d\theta_c = \frac{2\pi \sin\theta_c d\theta_c}{4\pi} \quad (6.10)$$

O bien

$$P(\theta_c) = \frac{\sin\theta_c}{2} \quad (6.10a)$$

La correspondencia entre $P(E) \rightarrow P(\theta_c)$ es tal que $P(E)dE = P(\theta_c)d\theta_c$, de donde

$$P(E) = P(\theta_c) \frac{d\theta_c}{dE} \quad (6.11)$$

Se sustituyen (6.8) y (6.10a) en (6.11)

$$P(E) = \frac{\frac{\sin\theta_c}{2}}{-E_0 \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) \sin\theta_c} = -\frac{1}{E_0(1-\alpha)} \quad (6.12)$$

De acuerdo con la teoría de las probabilidades la integral

$$\int P(E)dE = 1 \quad (6.13)$$

Pero ¿cuáles son los límites de integración para que esta integral sea igual a 1?

Conociendo $P(E)$ de la ecuación (7.11) y se sustituye

$$\int P(E)dE = - \int \frac{dE}{E_0(1-\alpha)} = -\frac{1}{E_0(1-\alpha)} \int dE \quad (6.14)$$

Para que la integral sea igual a 1, los límites de integración deben ser de E_0 a αE_0 . En consecuencia, al sustituir en (6.14)

$$\int_{E_0}^{\alpha E_0} P(E)dE = -\frac{1}{E_0(1-\alpha)} \int_{E_0}^{\alpha E_0} dE = 1 \quad (6.14a)$$

De esta manera la integral resulta igual a 1.

La conclusión es que la suma de las probabilidades se refiere a un solo choque o a una sola interacción; puesto que en un solo choque la energía de un neutrón disminuye de E_0 a $E = \alpha E_0$.

La función de probabilidad de dispersión [ecuación (6.11)] permite entre otras cosas calcular la energía promedio de los neutrones después de un solo choque. Esto es

$$\bar{E} = \int_{E_0}^{\alpha E_0} E P(E) dE = - \int_{E_0}^{\alpha E_0} \frac{E dE}{E_0(1-\alpha)} = - \left[\frac{1}{E_0(1-\alpha)} \right] \left[\frac{\alpha^2 E_0^2 - E_0^2}{2} \right] = \frac{E_0(1+\alpha)}{2} \quad (6.15)$$

Esta expresión muestra que $\bar{E}$ depende de α . Así, para

$$\alpha = 0 \quad \bar{E} = \frac{E_0}{2}$$

lo que implica que un neutrón en un solo choque pierde la mitad de su energía en promedio.

Sin embargo, para isótopos pesados

$$\alpha = 1 \text{ y sustituyendo en la ec. (6.15) } \bar{E} = E_0$$

lo que implica que un neutrón al chocar con núcleo pesado prácticamente no pierde energía.

La pérdida promedio de energía en un solo choque está dada por

$$\Delta \bar{E} = E_0 - \bar{E} = \frac{E_0(1-\alpha)}{2} \quad (6.16)$$

Letargia

La letargia puede ser definida, en forma diferencial, como la disminución relativa de la energía de los neutrones por difusión

$$du = -\frac{dE}{E} \quad (6.17)$$

A cada nivel de energía debe corresponder un nivel de letargia. Integrando la ecuación (7.17) desde una energía inicial E_0 hasta una energía E

$$\int_{u_0}^u du = - \int_{E_0}^E \frac{dE}{E} \quad (6.18)$$

se obtiene

$$\Delta u = u - u_0 = -[\ln E - \ln E_0] = \ln \frac{E_0}{E} \quad (6.19)$$

De esta expresión se puede verificar para $E = E_0$, es decir, $\Delta u = 0$

$$\Delta u = \ln \frac{E_0}{E_0} = \ln 1 = 0$$

Esto implica que la escala de la letargia comienza en E_0 , a cuyo valor correspondiente de letargia puede asignársele $u_0 = 0$.

La letargia u aumenta a medida que disminuye la energía. Dado que $u_0 = 0$ la ecuación (6.19) muestra que

$$u = -\ln \frac{E}{E_0} \quad \text{o} \quad -u = \ln \frac{E}{E_0} \quad (6.20)$$

que puede ser considerada como la formula general de la letargia.

Así pues, los neutrones de fisión tienen una energía del orden de $E_0 = 2 \text{ MeV}$, mientras que los neutrones térmicos tienen una energía $E_{Th} = 0.025 \text{ eV}$, la letargia correspondiente a la termalización es

$$u = -\ln \frac{0.025}{2 \times 10^6} = 18.19$$

Lo que significa que entre la energía de fisión y la energía térmica hay 18 unidades de letargia.

En forma exponencial, la ecuación (6.20) puede expresarse como

$$e^{-u} = \frac{E}{E_0} \quad (6.21)$$

o bien

$$E = E_0 e^{-u} \quad (6.21a)$$

Así como en forma diferencial

$$\frac{dE}{du} = -E_0 e^{-u} \quad (6.22)$$

La correspondencia entre $P(E) \rightarrow P(u)$ es tal que $-P(E)dE = P(u)du$

Al despejar

$$P(u) = -P(E) \frac{dE}{du} \quad (6.23)$$

Al sustituir (6.12) y (6.22)

$$P(u) = -P(E) \frac{dE}{du} = \left[-\frac{1}{E_0(1-\alpha)} \right] (-E_0 e^{-u}) = \frac{e^{-u}}{1-\alpha} \quad (6.24)$$

El cálculo de la letargia promedio después de un choque puede hacerse de forma similar al cálculo de la energía promedio

$$\bar{u} = \int u P(u) du = \int \frac{u e^{-u}}{1-\alpha} du \quad (6.25)$$

Como en un solo choque, la energía de un neutrón disminuye de E_0 a $E = \alpha E_0$; dada la definición de letargia $u = -\ln \frac{E}{E_0}$, como $u_0 = 0$, la letargia al cabo de un choque es

$$u = -\ln \frac{\alpha E_0}{E_0} = \ln \frac{1}{\alpha}$$

Por lo tanto, al utilizar estos límites de integración

$$\bar{u} = \int_0^{\ln \frac{1}{\alpha}} \frac{u e^{-u}}{1-\alpha} du = \frac{1}{1-\alpha} [\alpha \ln \alpha - \alpha + 1] \quad (6.26)$$

o bien

$$\bar{u} = \frac{\alpha \ln \alpha}{1-\alpha} + 1 = \xi \quad (6.26a)$$

ξ se denomina **pérdida de energía por choque**, la cual es equivalente a la ganancia de letargia.

Dado que $\bar{u} = \xi$ de acuerdo con (6.20)

$$\xi = -\ln \frac{E}{E_0} \quad (6.27)$$

Para n choques el cambio de letargia es

$$n\xi = -\ln \frac{E}{E_0} \quad (6.28)$$

Por lo tanto,

$$E = E_0 e^{-n\xi} \quad (6.29)$$

En la tabla 2 se presenta, para algunos isotopos utilizados en reactores nucleares, las propiedades de dispersión. El mejor moderador es aquel para el cual el número de choques, para descender desde energía promedio de fisión hasta la energía térmica, es mínimo.

Tabla 6.1. *Pérdida de energía por choque y número de choques desde energía de fisión hasta la energía térmica, para algunos núcleos*

	A	α	ξ	n
H	1	0	1	18
D	2	0.111	0.726	25
He	4	0.360	0.425	43
Li	7	0.563	0.268	67
Be	9	0.640	0.209	86
C	12	0.716	0.159	115
O	16	0.779	0.200	150
Na	23	0.840	0.085	220
Fe	56	0.931	0.036	505
U^{238}	238	0.983	0.0084	2172

Fuente: elaboración propia.

Probabilidad de escape a la resonancia

En un medio caracterizado por las propiedades nucleares Σ_s y Σ_a , el **poder de frenado** está dado por la expresión

$$\frac{\Sigma_s \xi}{\Sigma_a} \quad (6.30)$$

mientras que el inverso

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s \xi} \quad (6.31)$$

representa el poder de captura.

Así, la probabilidad de absorción o de captura de un neutrón en el intervalo diferencial de energía dE está dado por

$$1 - p = \frac{\Sigma_a dE}{\Sigma_s \xi E} \quad (6.32)$$

y la probabilidad de escape a la absorción

$$p = 1 - \frac{\Sigma_a dE}{\Sigma_s \xi E} = e^{-\frac{\Sigma_a dE}{\Sigma_s \xi E}} \quad (6.33)$$

Esta expresión se utiliza para calcular la probabilidad de escape a la resonancia; para ello debe de integrarse esta expresión entre los límites de energía en los que se encuentre un pico de resonancia.

Flujo de frenado

La dispersión de un flujo de neutrones se caracteriza por la sección transversal de dispersión. El número de neutrones dispersados que llegan a la energía E alrededor de dE está dado por

$$F(E) = \Sigma_s(E)\phi(E) \quad (6.34)$$

$$F(E)dE = \Sigma_s(E)\phi(E)dE \quad (6.34a)$$

Este concepto se le llama **densidad de dispersión**.

A la energía E los neutrones podrán llegar en uno o en varios choques. Si S_0 es el neutrón inicial o de una fuente, con energía E_0 , el número de neutrones que pasa de $E_0 \rightarrow E$ alrededor de dE en un solo choque, se podrá representar por

$$n_1 = \frac{S_0 dE}{E} \quad (6.35)$$

o usando el concepto de probabilidad de dispersión

$$n_1 = S_0 P(E) dE \quad (6.35a)$$

Se sustituye la ecuación (6.12)

$$n_1 = \frac{S_0 dE}{E_0(1-\alpha)} \quad (6.35b)$$

Nota: el signo menos de la ecuación (6.12) puede ignorarse tomando en cuenta que dE es negativo, puesto la energía va disminuyendo.

El número de neutrones que llega a la energía E en m choques después de un primer choque, es decir, a partir de la energía E' es

$$n_m = \int_E^{E'} \frac{\Sigma_s(E')\phi(E')dE'}{E'(1-\alpha)} dE' \quad (6.36)$$

$\Sigma_s(E')\phi(E')$ es la densidad de dispersiones de los neutrones con energía E' y el signo menos se ha suprimido, invirtiendo los límites de integración.

A la energía E alrededor de dE los neutrones podrán llegar en uno o en varios choques. Es decir,

$$\Sigma_s(E)\phi(E)dE = n_1 + n_m \quad (6.37)$$

Se sustituye (6.35b) y (6.36)

$$\Sigma_s(E)\phi(E)dE = \frac{S_0 dE}{E_0(1-\alpha)} + \int_E^{E'} \frac{\Sigma_s(E')\phi(E')dE'}{E'(1-\alpha)} dE \quad (6.38)$$

Se utiliza la notación de densidades de dispersión

$$F(E)dE = \frac{S_0 dE}{E_0(1-\alpha)} + \int_E^{E'} \frac{F(E')dE'}{E'(1-\alpha)} dE \quad (6.39)$$

derivando

$$\frac{d}{dE}[F(E)] = \frac{d}{dE}\left(\frac{S_0}{E_0(1-\alpha)}\right) + \frac{d}{dE}\left\{\int_E^{E'} \frac{F(E')dE'}{E'(1-\alpha)}\right\} dE \quad (6.39a)$$

El primer término del lado derecho implica la derivada de una constante, por lo tanto, es cero. El segundo implica la derivada de una integral.

El 2° teorema fundamental del cálculo establece que $\frac{d}{dx} \int_c^x f(t)dt = f(x)$. Por lo tanto, se aplica este teorema

$$\frac{d}{dE}\left\{\int_E^{E'} \frac{F(E')dE'}{E'(1-\alpha)}\right\} = -\frac{F(E)}{E(1-\alpha)} \quad (6.40)$$

$$d[F(E)] = -\frac{F(E)dE}{E(1-\alpha)} \quad (6.41)$$

O bien

$$\frac{d[F(E)]}{F(E)} = -\frac{1}{(1-\alpha)} \frac{dE}{E} \quad (6.41a)$$

de donde, nuevamente se integra

$$\ln F(E) = -\ln E + \ln C \quad (6.42)$$

o bien

$$F(E) = \frac{C}{E} \quad (6.42a)$$

$$C = E F(E) \quad (6.42b)$$

En la condición inicial para E_0 los neutrones iniciales o fuente de neutrones es S_0 , y el número de neutrones que pasa de $E_0 \rightarrow E$ no es otra cosa que la densidad de dispersión. Es decir,

$$F(E_0)dE = \frac{S_0 dE}{E} \quad (6.43)$$

por lo tanto $C = S_0$. Por lo que para cualquier otra energía

$$F(E) = \frac{S_0}{E} \quad (6.44)$$

Y de acuerdo con la ecuación (6.34) $F(E) = \Sigma_s(E)\phi(E)$. Por tanto

$$\Sigma_s(E)\phi(E) = \frac{S_0}{E} \quad (6.45)$$

Despejar el flujo en función de la energía es

$$\phi(E) = \frac{S_0}{\Sigma_s(E)E} \quad (6.46)$$

Por analogía, con la ecuación (6.34) la densidad de dispersión puede definirse en función de la letargia

$$F(u) = \Sigma_s(u)\phi(u) \quad (6.47)$$

La relación con la densidad de dispersión en términos de la energía es directa

$$F(E)dE = -F(u)du \quad (6.48)$$

Se despeja y utiliza la ecuación (6.17) y la ecuación (6.44)

$$F(u) = -F(E) \frac{dE}{du} = -\frac{S_0}{E} (-E) = S_0 \quad (6.49)$$

Al utilizar (6.47) y despejar el flujo se sustituye en la ecuación (6.49)

$$\phi(u) = \frac{S_0}{\Sigma_s} \quad (6.50)$$

lo que implica que el flujo, en términos de la letargia, es constante.

Corriente de frenado o corriente de moderación $q(E)$

La corriente de frenado se define como el número de neutrones que pasan por unidad de tiempo, por unidad de volumen, de la energía $E' \rightarrow \alpha E'$. Si E es cualquier energía dentro de ese intervalo

$$q(E) = F(\alpha E') - F(E) \quad (6.51)$$

La densidad de dispersión total puede expresarse como

$$F(E) = F_1(E) + F_2(E) + \dots + F_n(E) \quad (6.52)$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$ es el número de choques.

El primer choque es $E_0 > E > \alpha E_0$ de la ecuación (6.35b)

$$n_1 = F_1(E)dE = \frac{S_0 dE}{E_0(1-\alpha)} \quad (6.53)$$

Para un segundo choque se parte de la energía final del primer choque E' . En lugar de S_0 de la energía, hay que usar la densidad de dispersión a esa energía, es decir, la integral de la ecuación (6.41)

$$n_2 = F_2(E)dE = \int_E^{E_0} \frac{F_1(E')dE'}{E'(1-\alpha)} dE' = \frac{S_0}{E_0(1-\alpha)} \int_E^{E_0} \left[\frac{dE'}{E'(1-\alpha)} \right] dE \quad (6.54)$$

O bien

$$F_2(E) = \frac{S_0}{E_0(1-\alpha)^2} \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} = \frac{S_0}{E_0(1-\alpha)^2} \ln \frac{E_0}{E} \quad (6.55)$$

El rango de energía correspondiente para este segundo choque es $\alpha^2 E_0 < E < \alpha E_0$

$$F_2(E) = \int_{\alpha E_0}^{\frac{E}{\alpha}} \frac{F_1(E')dE'}{E'(1-\alpha)} = \frac{S_0}{E_0(1-\alpha)^2} \int_{\alpha E_0}^{\frac{E}{\alpha}} \frac{dE'}{E'} = \frac{S_0}{E_0(1-\alpha)^2} \ln \frac{E}{\alpha^2 E_0} \quad (6.56)$$

Generalizando la ecuación (6.56)

$$F(E) = \int_E^{\frac{E}{\alpha}} \frac{F(E')dE'}{E'(1-\alpha)} \quad (6.57)$$

La corriente de frenado puede expresarse como

$$q(E) = \int_E^{\frac{E}{\alpha}} \frac{F(E')dE'}{E'(1-\alpha)} (E - \alpha E') \quad (6.58)$$

Se utiliza la ecuación (6.42a)

$$F(E') = \frac{C}{E'} \quad (6.42b)$$

Y se sustituye en la ecuación (6.58)

$$q(E) = \int_E^{\frac{E}{\alpha}} \frac{C dE'}{E'^2(1-\alpha)} (E - \alpha E') = \int_E^{\frac{E}{\alpha}} \frac{CE}{(1-\alpha)} \frac{dE'}{E'^2} - \int_E^{\frac{E}{\alpha}} \frac{C \alpha}{(1-\alpha)} \frac{dE'}{E'} \quad (6.59)$$

La primera integral resulta

$$\int_E^{\frac{E}{\alpha}} \frac{CE}{(1-\alpha)} \frac{dE'}{E'^2} = \frac{CE}{(1-\alpha)} \left[-\frac{1}{E'} \right]_E^{\frac{E}{\alpha}} = C \quad (6.60)$$

y la segunda es

$$- \int_E^{\frac{E}{\alpha}} \frac{C \alpha}{(1-\alpha)} \frac{dE'}{E'} = - \frac{C \alpha}{(1-\alpha)} \ln \frac{1}{\alpha} = \frac{C \alpha}{(1-\alpha)} \ln \alpha \quad (6.61)$$

Por lo tanto, al sustituir en la ecuación (6.59)

$$q(E) = C \left[1 + \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \ln \alpha \right] = C\xi \quad (6.62)$$

donde se identifica ξ , la **pérdida de energía por choque**, ecuación (7.26a)

Se utiliza la condición inicial

$$q(E_0) = S_0 = C\xi \quad (6.63)$$

Por lo tanto,

$$C = \frac{S_0}{\xi} \quad (6.64)$$

Se sustituye en la (6.62)

$$q(E) = S_0 \quad (6.65)$$

Se reemplaza C de la ecuación (6.64) en $F(E)$ en la ecuación (6.42b)

$$F(E') = \frac{C}{E'} = \frac{S_0}{\xi E'} \quad (6.42c)$$

Y la correspondencia entre $F(E') \rightarrow F(u')$ es tal que

$$F(E')dE' = -F(u')du' \quad (6.48)$$

Se despeja $F(u')$ y sustituye $F(E')$ de la ecuación (6.42c) y $\frac{dE}{du}$ a partir de la definición diferencial de letargia, ecuación (6.12), $du = -\frac{dE}{E}$

$$F(u') = F(E')E' = -\frac{S_0}{\xi} \quad (6.66)$$

lo que, nuevamente, implica que $F(u')$ es constante y **no depende de la energía**, a diferencia de $F(E')$ (ec. 6.42c).

Se puede enfatizar la distinción entre densidad de dispersión elástica para un solo componente y la densidad para cada componente i

$$F(E) = \Sigma_s(E)\phi(E) \quad (6.34a)$$

$$F_i(E) = \Sigma_{si}(E)\phi(E) \quad (6.34b)$$

Se despeja el flujo de ambas ecuaciones y se iguala

$$F(E) = \Sigma_s(E) \frac{F_i(E)}{\Sigma_{si}(E)} \quad (6.67)$$

o bien

$$F_i(E) = \Sigma_{si}(E) \frac{F(E)}{\Sigma_s(E)} \quad (6.67a)$$

Para una mezcla de isótopos se utilizan las ecuaciones (6.62) $q(E) = C\xi$, (6.42b) $C = E F(E)$ y se sustituye la ecuación (6.67a) en la (6.34)

$$S_0 = \sum q(E)_i = \sum C_i \xi_i = \sum E F_i(E) \xi_i = \sum \frac{E \Sigma_{si}(E) F(E) \xi_i}{\Sigma_s(E)} \quad (6.68)$$

de donde resulta una expresión para la densidad de dispersión

$$F(E) = \Sigma_s(E)\phi(E) = \frac{S_0 \Sigma_s(E)}{E \sum \Sigma_{si}(E) \xi_i} \quad (6.69)$$

Así la expresión del flujo para una mezcla de isótopos, como expresión alterna a la ecuación (6.46) $\phi(E) = \frac{S_0}{\Sigma_s(E)E}$, es

$$\phi(E) = \frac{S_0}{E \sum \Sigma_{si}(E) \xi_i} = \frac{S_0}{E \Sigma_s \bar{\xi}} \quad (6.70)$$

Donde $\Sigma_s \bar{\xi} = \sum \Sigma_{si}(E) \xi_i$ es la pérdida de energía por choque de la mezcla de isótopos

Se sustituye la ecuación (6.70) en la (6.50)

$$\phi(u) = E\phi(E) = \frac{S_0}{\Sigma_s \bar{\xi}} \quad (6.71)$$

Donde, nuevamente, queda de manifiesto que el flujo dependiente de la letargia es constante.

Y de acuerdo con la ecuación (6.63) $q(E_0) = S_0$

$$q(u_0) = q(E_0) = S_0 \quad (6.72)$$

Al utilizar la ecuación (6.70) la razón de reacciones de absorción en resonancia $R_a = \Sigma_a \phi$ entre las energías E_0 y E resulta

$$R_a = \int_E^{E_0} \Sigma_a(E) \frac{S_0}{\Sigma_s \bar{\xi}} \frac{dE}{E} \quad (6.73)$$

Y la probabilidad de escape a la resonancia es

$$p(E) = \frac{q(E)}{q(E_0)} = \frac{S_0}{S_0} \exp \left[- \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma_s} \frac{dE}{E} \right] = \exp \left[- \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma_s} \frac{dE}{E} \right] \quad (6.74)$$

Teoría de edad de Fermi

La difusión de neutrones puede establecerse como una función de la corriente de moderación o corriente de frenado en términos de la letargia. La ecuación de difusión se escribe en la forma

$$\frac{\partial q(r, u)}{\partial u} d^3r du = S(r, u) d^3r du - \Sigma_a(r, u) \phi(r, u) d^3r du - \nabla J(r, u) d^3r du \quad (6.75)$$

Para cualquier punto r , las ecuaciones (6.70), (6.71) y (6.72) puede escribirse como

$$\phi(r, E) = \frac{S_0}{E \Sigma_s \bar{\xi}} \quad (6.70a)$$

$$\phi(r, u) = E \phi(r, E) \quad (6.71a)$$

$$q(r, u) = q(r, E) = S_0 \quad (6.72a)$$

Por lo tanto, al combinar las ecuaciones (6.70a), (6.71a) y (6.72a), la relación entre flujo y corriente de moderación es tal que

$$\phi(r, u) = \frac{q(r, u)}{\Sigma_s \xi} \quad (6.76)$$

y al sustituir en la ecuación de difusión (6.75) se obtiene una ecuación en función estrictamente de la corriente de moderación y de la letargia

$$\frac{\partial q(r, u)}{\partial u} d^3r du = S(r, u) d^3r du - \Sigma_a(r, u) \frac{q(r, u)}{\Sigma_s \xi} d^3r du + \nabla D(u) \nabla \frac{q(r, u)}{\Sigma_s \xi} d^3r du \quad (6.77)$$

Para un medio estrictamente difusor:

Si el medio es homogéneo $D(u) = cte$

Si el medio no es absorbedor $\Sigma_a = 0$ y $\Sigma_T = \Sigma_s$

Si no hay fuente de neutrones $S(r, u) = 0$. Por tanto, la ecuación de difusión se reduce a

$$\frac{\partial q(r, u)}{\partial u} = D(u) \nabla^2 \frac{q(r, u)}{\Sigma_s(u) \xi} \quad (6.78)$$

Esta ecuación permite caracterizar un medio difusor.

Edad de Fermi y ecuación de difusión de Fermi

La **edad de Fermi** τ se define como

$$\tau = \int_0^u \frac{D(u)}{\Sigma_s(u) \xi} du \quad (6.79)$$

lo que implica que

$$d\tau = \frac{D(u)}{\Sigma_s(u) \xi} du \quad (6.80)$$

Se hace uso de la regla de la cadena y se sustituye la ecuación (6.80) en la (6.78)

$$\frac{\partial q}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial \tau} \frac{D(u)}{\Sigma_s(u) \xi} \quad (6.81)$$

Luego la ecuación (6.78)

$$\frac{\partial q(r, u)}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial \tau} \frac{D(u)}{\Sigma_s(u) \xi} = D \nabla^2 \frac{q(r, u)}{\Sigma_s \xi} \quad (6.78a)$$

de donde

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \frac{D(u) \nabla^2 \frac{q(r, u)}{\Sigma_s(u) \xi}}{\frac{D(u)}{\Sigma_s(u) \xi}} \quad (6.82)$$

o bien, se reduce

$$\frac{\partial q(r, u)}{\partial \tau} = \nabla^2 q(r, u) \quad (6.82a)$$

que es la **ecuación de difusión Fermi**.

De acuerdo con la *Teoría de Difusión*

$$\nabla^2 = -B^2 \quad (6.83)$$

Por tanto, la ecuación (6.82) puede escribirse como

$$\frac{\partial q(r, u)}{\partial \tau} = -B^2 q(r, u) \quad (6.84)$$

La cual puede integrarse por separación de variables. Así, entre dos corrientes de moderación, o dos niveles de energía, de la energía de fisión (rápida) a la térmica

$$\int_{q_0}^{q_{Th}} \frac{\partial q}{q} = -B^2 \int_0^\tau \partial \tau \quad (6.85)$$

Esto es

$$\frac{q_{Th}}{q_0} = e^{-B^2 \tau} \quad (6.86)$$

que es justamente la probabilidad de moderación de los neutrones rápidos, o probabilidad de no escape de los neutrones rápidos P_{NR} , o permanencia de los neutrones dentro de los límites de un reactor durante su moderación, y se expresa

$$P_{NR} = e^{-B^2 \tau} \quad (6.87)$$

Puede demostrarse que

$$P_{NR} = e^{-B^2 \tau} = 1 - B^2 \tau \simeq \frac{1}{1 + B^2 \tau} \quad (6.88)$$

Luego, el coeficiente de multiplicación efectiva es

$$k_{eff} = k_\infty P_{NR} P_{NTh} \quad (6.89)$$

y dado que la probabilidad de escape de los neutrones térmicos es

$$P_{NTh} = \frac{1}{1 + L^2 B^2} \quad (6.90)$$

por lo tanto, se expresa

$$k_{eff} = \frac{k_\infty}{(1 + L^2 B^2)(1 + B^2 \tau)} \quad (6.91)$$

Para un reactor crítico si $k_{eff} = 1$, a partir de (6.91) puede demostrarse que

$$B_m^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2 + \tau} \quad (6.92)$$

o bien

$$B_m^2 = \frac{\frac{v\Sigma_f}{\Sigma_a} - 1}{L^2 + \tau} \quad (6.92a)$$

Al denominador de esta ecuación se le llama *distancia de migración* o, más apropiadamente, *cuadrada de migración*

$$M^2 = L^2 + \tau \quad (6.93)$$

Distancia cuadrática media de moderación $\overline{r^2}(\tau)$

La solución de la ecuación de Fermi para una fuente puntual se puede obtener asumiendo que en un medio infinito la densidad de frenado depende estrictamente de la distancia respecto de un punto de origen de la fuente. La densidad de frenado a una distancia r a partir de una fuente puntual depende de la edad de los neutrones τ a la distancia r , y resulta

$$q(\mathbf{r}, \tau) = \frac{e^{-\frac{r^2}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{3/2}} \quad (6.94)$$

La densidad de frenado en función de la edad de Fermi permite definir el concepto distancia cuadrática media de frenado o moderación $\overline{r^2}(\tau)$, la cual se puede interpretar como el área, a partir de la aparición de un neutrón en un medio, dentro de la cual dicho neutrón interacciona

$$\overline{r^2}(\tau) = \frac{\int_0^\infty r^2 [4\pi r^2 q(\mathbf{r}, \tau)] d\mathbf{r}}{\int_0^\infty 4\pi r^2 q(\mathbf{r}, \tau) d\mathbf{r}} = \frac{\int_0^\infty r^4 e^{-\frac{r^2}{4\tau}} dr}{\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{4\tau}} dr} = 6\tau \quad (6.95)$$

De aquí que

$$\tau = \frac{\overline{r^2}}{6} \quad (6.96)$$

Ejercicio 6.3. Demostrar la ecuación (6.95).

Capítulo 7. Teoría de multigrupos

Se parte de la *Ecuación de Transporte* de neutrones en su forma general

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \Sigma_T(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \\ = S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \int d^3 \mathbf{u}' \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}, t) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Donde el último término puede expresarse como

$$\int d^3 \mathbf{u}' \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}, \widehat{\Omega}' \cdot \widehat{\Omega}) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t)$$

En estado estacionario la dependencia en el tiempo de la ecuación (2.15) desaparece, el primer término es cero y la ecuación (2.25) se reduce a

$$\Sigma_T(\mathbf{r}, \mathbf{u},) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u},) + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u},) = S(\mathbf{r}, \mathbf{u},) + \int d^3 \mathbf{u}' \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}, \widehat{\Omega}' \cdot \widehat{\Omega}) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}',) \quad (7.1)$$

En tal caso, es más conveniente desarrollar la ecuación en términos de la energía y la dirección ($E, \widehat{\Omega}$) y no en términos de la velocidad vectorial ($\mathbf{u}$). Es decir, el flujo tiene que pasar de

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \rightarrow \Phi(\mathbf{r}, E, \widehat{\Omega}) \quad (7.2)$$

Para eso hay que tomar en cuenta la relación entre rapidez y energía cinética

$$E = \frac{1}{2} m u^2 \quad \text{y} \quad dE = m u du \quad (7.3)$$

Luego,

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d^3 \mathbf{u} = \Phi(\mathbf{r}, E, \widehat{\Omega}) dE d\widehat{\Omega} \quad (7.4)$$

Y como

$$d^3 \mathbf{u} = u^2 du d\widehat{\Omega} \quad \text{y} \quad dE d\widehat{\Omega} = m u du d\widehat{\Omega} \quad (7.5)$$

Por lo tanto, se despeja $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ de la ecuación (7.4)

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \frac{m}{u} \Phi(\mathbf{r}, E, \widehat{\Omega}) = \sqrt{\frac{m^3}{2E}} \Phi(\mathbf{r}, E, \widehat{\Omega}) \quad (7.6)$$

Después se sustituye la ecuación (7.6) en la (7.1)

$$\begin{aligned} \Sigma_T(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, E, \widehat{\Omega}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, E, \widehat{\Omega}) = \\ = S(\mathbf{r}, E, \widehat{\Omega}) + \int d\widehat{\Omega}' \int dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E, \widehat{\Omega}' \cdot \widehat{\Omega}) \Phi(\mathbf{r}, E', \widehat{\Omega}) \end{aligned} \quad (7.7)$$

donde

$$S(\mathbf{r}, E, \widehat{\Omega}) = \sqrt{\frac{2E}{m^3}} S(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \quad (7.8)$$

$$\Sigma_s(E \rightarrow E', \widehat{\Omega}' \cdot \widehat{\Omega}) = \sqrt{\frac{2E}{m^3}} \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}, \widehat{\Omega}' \cdot \widehat{\Omega}) \quad (7.9)$$

Se integra la ecuación (7.7) sobre todas las direcciones

$$\begin{aligned} \int \Sigma_T(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} + \int \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = \\ = \int S(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} + \int \int d\hat{\Omega}' \int dE' \Sigma_s(E \rightarrow E', \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) \Phi(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Se hace uso de las integrales

$$\int \Phi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = \Phi(\mathbf{r}, E) \quad (7.11)$$

$$\int \Phi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) \hat{\Omega} d\hat{\Omega} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) \quad (7.12)$$

$$\Sigma_s(E \rightarrow E', \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) \Phi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = \Sigma_s^0(E \rightarrow E') \quad (7.13)$$

y la ecuación (7.10) se reduce a

$$\Sigma_T(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, E) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = S(\mathbf{r}, E) + \int dE' \Sigma_s^0(E \rightarrow E') \Phi(\mathbf{r}, E') \quad (7.14)$$

Al utilizar la expansión serie [ecuación (2.31)]

$$\Phi(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} [\Phi(\mathbf{r}, E) + 3 \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E)] = \frac{1}{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, E) + \frac{3}{4\pi} \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) \quad (7.15)$$

Y se sustituye en la ecuación (7.14)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} [\Sigma_T(\mathbf{r}, E) + \hat{\Omega} \cdot \nabla] [\Phi(\mathbf{r}, E) + 3 \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E)] \\ = S(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) \\ + \frac{1}{4\pi} \left[\int dE' \Sigma_s^0(E \rightarrow E') \Phi(\mathbf{r}, E') \right. \\ \left. + 3 \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) \int d\hat{\Omega}' \hat{\Omega}' \Sigma_s^0(E \rightarrow E', \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) \right] \end{aligned} \quad (7.16)$$

La integral del último término se resuelve utilizando los cambios de variable $\hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega} = \cos\theta$ y $d\hat{\Omega} = \sin\theta d\theta d\varphi$. Así, de manera semejante a la deducción de la ecuación (2.49)

$$\int d\hat{\Omega}' \hat{\Omega}' \Sigma_s^0(E \rightarrow E', \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) = \hat{\Omega} \Sigma_s^0(E' \rightarrow E)$$

Donde se usa la definición de coseno promedio del ángulo de dispersión

$$\Sigma_s^0(E' \rightarrow E) = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu \mu \Sigma_s^0(E' \rightarrow E, \mu)$$

Para luego sustituir en la ecuación (7.16)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} [\Sigma_T(\mathbf{r}, E) + \hat{\Omega} \cdot \nabla] [\Phi(\mathbf{r}, E) + 3 \hat{\Omega} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E)] \\ = S(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) \\ + \frac{1}{4\pi} \left[\int dE' \Sigma_s^0(E \rightarrow E') \Phi(\mathbf{r}, E') + 3 \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) \hat{\Omega} \Sigma_s^0(E' \rightarrow E) \right] \end{aligned} \quad (7.16a)$$

Al seguir el procedimiento de (§ 2.1), se multiplican por Ω_z e integran sobre todas las direcciones $d\hat{\Omega}$. Luego, se hace lo mismo para Ω_y y Ω_x . Al sumar las ecuaciones vectoriales se obtiene

$$\Sigma_T(\mathbf{r}, E) \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) + \frac{1}{3} \nabla \Phi(\mathbf{r}, E) = \int dE' \mathbf{J}(\mathbf{r}, E') \Sigma_s^1(E' \rightarrow E) \quad (7.17)$$

donde

$$\Sigma_s^1(E' \rightarrow E) = \mu \Sigma_s^0(E' \rightarrow E) \quad (7.18)$$

Para un medio isotrópico $\Sigma_s^1(E' \rightarrow E) = 0$ y de la ec. (7.17) se obtiene la regla de Fick

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = - \frac{1}{3 \Sigma_T(\mathbf{r}, E)} \nabla \Phi(\mathbf{r}, E) = - D(\mathbf{r}, E) \nabla \Phi(\mathbf{r}, E) \quad (7.19)$$

donde

$$D(\mathbf{r}, E) = \frac{1}{3 \Sigma_T(\mathbf{r}, E)} \quad (7.20)$$

Se sustituye en la ecuación (7.16a)

$$\Sigma_T(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, E) - \nabla \cdot D(\mathbf{r}, E) \nabla \Phi(\mathbf{r}, E) = S(\mathbf{r}, E) + \int dE' \Sigma_s^0(E \rightarrow E') \Phi(\mathbf{r}, E') \quad (7.21)$$

El flujo de neutrones de un grupo k , de energía comprendida entre E_{k+1} y E_k , puede definirse como

$$\Phi_k(r) = \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE \Phi(\mathbf{r}, E) \quad (7.22)$$

Se multiplica la ecuación (7.21) por dE e integra el componente z entre los límites de energía del grupo

$$\begin{aligned} \int_{E_{k+1}}^{E_k} \Sigma_T(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, E) dE - \int_{E_{k+1}}^{E_k} \nabla \cdot D(\mathbf{r}, E) \nabla \Phi(\mathbf{r}, E) dE &= \int_{E_{k+1}}^{E_k} S(\mathbf{r}, E) dE \\ &= \sum_{k'=1}^n \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE' \Phi(\mathbf{r}, E') \Sigma_s^0(E' \rightarrow E) \end{aligned} \quad (7.23)$$

El último término se convierte en una sumatoria, puesto que incluye la ganancia de neutrones en el grupo k por dispersiones de todos los grupos de energía.

Se integra

$$\Sigma_{Tk}(\mathbf{r}) \Phi_k(\mathbf{r}) - \nabla \cdot D_k(\mathbf{r}) \nabla \Phi_k(\mathbf{r}) = S_k(\mathbf{r}) + \sum_{k'=1}^n \Sigma_{k'k}^0 \Phi_{k'}(\mathbf{r}) \quad (7.24)$$

Las fisiones son fuente de neutrones y el total de neutrones de fisión es la suma de las fracciones χ_k de los neutrones de cada uno de los n grupos de energía

$$S_k(\mathbf{r}) = \nu \chi_k \sum_{k'=1}^n \Sigma_{fk'}(\mathbf{r}) \Phi_{k'}(\mathbf{r}) \quad (7.25)$$

Se sustituye en la ecuación (7.24)

$$\begin{aligned}\Sigma_{Tk}(r) \Phi_k(r) - \nabla \cdot D_k(r) \nabla \Phi_k(r) \\ = \nu \chi_k \sum_{k'=1}^n \Sigma_{fk'}(r) \Phi_{k'}(r) + \sum_{k'=1}^n \Sigma_{k'k} \Phi_{k'}(r)\end{aligned}\quad (7.26)$$

Si $\Sigma_{kk}(r)$ es la sección transversal de dispersión de los neutrones dentro de un cierto grupo de energía, el conjunto de todas las dispersiones se puede reescribir como

$$\sum_{k'=1}^n \Sigma_{k'k} \Phi_{k'}(r) = \Sigma_{kk}(r) \Phi_k(r) + \sum_{k' \neq k} \Sigma_{k'k} \Phi_{k'}(r) \quad (7.27)$$

Es decir, dispersiones en las que no cambia la energía, más las dispersiones en donde si hay intercambio de energía.

Por lo que la ecuación (7.20) puede escribirse como

$$\begin{aligned}\Sigma_{Tk}(r) \Phi_k(r) - \Sigma_{kk}(r) \Phi_k(r) - \nabla \cdot D_k(r) \nabla \Phi_k(r) \\ = \nu \chi_k \sum_{k'=1}^n \Sigma_{fk'}(r) \Phi_{k'}(r) + \sum_{k' \neq k} \Sigma_{k'k} \Phi_{k'}(r)\end{aligned}\quad (7.28)$$

Se puede definir la sección macroscópica de eliminación del grupo k , designado por el subíndice R de Remouve

$$\Sigma_{Rk}(r) = \Sigma_{Tk}(r) - \Sigma_{kk}(r) \quad (7.29)$$

La ecuación (7.28) se puede rescribir como

$$\begin{aligned}\Sigma_{Rk}(r) \Phi_k(r) - \nabla \cdot D_k(r) \nabla \Phi_k(r) = \\ = \nu \chi_k \sum_{k'=1}^n \Sigma_{fk'}(r) \Phi_{k'}(r) + \sum_{k' \neq k} \Sigma_{k'k} \Phi_{k'}(r)\end{aligned}\quad (7.30)$$

Esta es la forma general de la **ecuación de difusión de multigrupos**.

Teoría de Difusión de dos-grupos

Para dos-grupos de energía —el numero 1 es el *grupo rápido* y en el que se producen neutrones de fisión, y el 2 es el *grupo térmico*, en el que se pierden neutrones por escape o por absorción y ganan neutrones por dispersión del grupo 1 al 2— las ecuaciones de difusión toman la forma

$$-D_1(r) \nabla^2 \Phi_1(r) + \Sigma_{12}(r) \Phi_1(r) = \nu \Sigma_{f1}(r) \Phi_1(r) + \nu \Sigma_{f2}(r) \Phi_2(r) \quad (7.31)$$

$$-D_2(r) \nabla^2 \Phi_2(r) + \Sigma_{a2}(r) \Phi_2(r) = \Sigma_{12}(r) \Phi_1(r) \quad (7.32)$$

De acuerdo con la *Teoría de Difusión*, en estado estacionario la ecuación de difusión puede tomar la forma

$$\nabla^2 \phi(r) + B_g^2 \phi(r) = 0 \quad (4.19)$$

de donde

$$\nabla^2 = -B_g^2 \quad (4.23)$$

Se sustituye la ecuación (4.23) en las ecuaciones (7.31) y (7.32)

$$[D_1(\mathbf{r})B_g^2 + \Sigma_{12}(\mathbf{r}) - \nu \Sigma_{f1}(\mathbf{r})] \Phi_1(r) - \nu \Sigma_{f2}(\mathbf{r}) \Phi_2(r) = 0 \quad (7.32a)$$

$$-\Sigma_{12}(\mathbf{r}) \Phi_1(r) + [D_2(\mathbf{r})B_g^2 + \Sigma_{a2}(\mathbf{r})] \Phi_2(r) = 0 \quad (7.33a)$$

O en forma matricial

$$\begin{vmatrix} [D_1(\mathbf{r})B_g^2 + \Sigma_{12}(\mathbf{r}) - \nu \Sigma_{f1}(\mathbf{r})] & -\nu \Sigma_{f2}(\mathbf{r}) \\ -\Sigma_{12}(\mathbf{r}) & [D_2(\mathbf{r})B_g^2 + \Sigma_{a2}(\mathbf{r})] \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Phi_1(r) \\ \Phi_2(r) \end{vmatrix} = 0 \quad (7.34)$$

Constante de multiplicación para dos-grupos

De acuerdo con la teoría de las ecuaciones lineales y $\Phi_2(r)$ tienen solución diferente a cero si el determinante es igual a cero. Esto es, si

$$\begin{vmatrix} [D_1(\mathbf{r})B_g^2 + \Sigma_{12}(\mathbf{r}) - \nu \Sigma_{f1}(\mathbf{r})] & -\nu \Sigma_{f2}(\mathbf{r}) \\ -\Sigma_{12}(\mathbf{r}) & [D_2(\mathbf{r})B_g^2 + \Sigma_{a2}(\mathbf{r})] \end{vmatrix} = 0 \quad (7.35)$$

lo que implica que

$$[D_1(\mathbf{r})B_g^2 + \Sigma_{12}(\mathbf{r}) - \nu \Sigma_{f1}(\mathbf{r})][D_2(\mathbf{r})B_g^2 + \Sigma_{a2}(\mathbf{r})] - [\Sigma_{12}(\mathbf{r})][\nu \Sigma_{f2}(\mathbf{r})] = 0 \quad (7.36)$$

Se divide entre el producto $D_1(\mathbf{r}) D_2(\mathbf{r})$

$$\frac{[D_1(\mathbf{r})B_g^2 + \Sigma_{12}(\mathbf{r}) - \nu \Sigma_{f1}(\mathbf{r})]}{D_1(\mathbf{r})} \frac{[D_2(\mathbf{r})B_g^2 + \Sigma_{a2}(\mathbf{r})]}{D_2(\mathbf{r})} = \frac{[\Sigma_{12}(\mathbf{r})]}{D_1(\mathbf{r})} \frac{[\nu \Sigma_{f2}(\mathbf{r})]}{D_2(\mathbf{r})} \quad (7.37)$$

y se reduce

$$\left[B_g^2 + \frac{\Sigma_{12}(\mathbf{r}) - \nu \Sigma_{f1}(\mathbf{r})}{D_1(\mathbf{r})} \right] \left[B_g^2 + \frac{\Sigma_{a2}(\mathbf{r})}{D_2(\mathbf{r})} \right] = \frac{[\Sigma_{12}(\mathbf{r})]}{D_1(\mathbf{r})} \frac{[\nu \Sigma_{f2}(\mathbf{r})]}{D_2(\mathbf{r})} \quad (7.38)$$

Se utiliza el concepto de área de difusión

$$\frac{[\Sigma_{12}(\mathbf{r}) - \nu \Sigma_{f1}(\mathbf{r})]}{D_1(\mathbf{r})} = \frac{1}{L_1^2} \quad y \quad \frac{\Sigma_{a2}(\mathbf{r})}{D_2(\mathbf{r})} = \frac{1}{L_2^2} \quad (7.39)$$

$$\left[B_g^2 + \frac{1}{L_1^2} \right] \left[B_g^2 + \frac{1}{L_2^2} \right] = \frac{[\Sigma_{12}(\mathbf{r})]}{D_1(\mathbf{r})} \frac{[\nu \Sigma_{f2}(\mathbf{r})]}{D_2(\mathbf{r})} \quad (7.38a)$$

O bien

$$[B_g^2 L_1^2 + 1][B_g^2 L_2^2 + 1] = \frac{\Sigma_{12}(\mathbf{r}) L_1^2 \nu \Sigma_{f2}(\mathbf{r}) L_2^2}{D_1(\mathbf{r}) D_2(\mathbf{r})} \quad (7.38b)$$

Donde, nuevamente, se utilizan los conceptos de área de difusión (ecuación 7.39)

$$[B_g^2 L_1^2 + 1][B_g^2 L_2^2 + 1] = \frac{\Sigma_{12}(\mathbf{r})}{\Sigma_{12}(\mathbf{r}) - \nu \Sigma_{f1}(\mathbf{r})} \frac{\nu \Sigma_{f2}(\mathbf{r})}{\Sigma_{a2}(\mathbf{r})} \quad (7.38c)$$

De la definición de probabilidad de no-escape de los neutrones rápidos que se obtiene de la *Teoría de Fermi*, sección (§ 6.6), al hacer $L_1^2 = \tau$ se puede concluir que el primer término de la ecuación (7.38c) es

$$B_g^2 L_1^2 + 1 = \frac{1}{P_{NF}} \quad (6.87a)$$

De forma similar, de la sección (§ 4.7), el segundo término de la definición de probabilidad de no-escape de los neutrones térmicos equivale a

$$B_g^2 L_2^2 + 1 = \frac{1}{P_{NTh}} \quad (4.91a)$$

Por lo que la ecuación (7.38c) se puede describir como

$$1 = \frac{\Sigma_{12}(r)}{\Sigma_{12}(r) - \nu \Sigma_{f1}(r)} \frac{\nu \Sigma_{f2}(r)}{\Sigma_{a2}(r)} P_{NTh} P_{NF} \quad (7.38d)$$

En la sección (§ 4.6) se definió el producto ηf como

$$\frac{\nu \Sigma_{f2}(r)}{\Sigma_{a2}(r)} = \eta f \quad (4.75a)$$

Por tanto, de acuerdo con la definición de constante de multiplicación efectiva (ecuación 1.12), el penúltimo término de la ecuación (7.38d) debe ser equivalente al producto de la probabilidad de fisión rápida por la probabilidad de escape a la resonancia

$$\frac{\Sigma_{12}(r)}{\Sigma_{12}(r) - \nu \Sigma_{f1}(r)} = p\epsilon \quad (7.39)$$

Dado que la ecuación (7.38d) es igual a 1, se concluye que el ensamble de parámetros nucleares correspondiente a la constante de multiplicación infinita en estado estacionario es

$$k_{eff} = 1 = \epsilon P_{NR} p f P_{NTh} \eta \quad (1.22)$$

De manera general, es decir, en estado no necesariamente estacionario, la ecuación (7.30d) se puede escribir como

$$k_{eff} = \frac{\Sigma_{12}(r)}{\Sigma_{12}(r) + \nu \Sigma_{f1}(r)} \frac{\nu \Sigma_{f2}(r)}{\Sigma_{a2}(r)} P_{NTh} P_{NF} \quad (7.40)$$

Graves (1979) escribe una expresión alternativa

$$k_{eff} = \frac{\nu \Sigma_{f1}(r)}{\Sigma_{a2}(r) + \Sigma_{12}(r)} P_{NF} + \frac{\Sigma_{12}(r)}{\Sigma_{12}(r) + \Sigma_{a1}(r)} \frac{\nu \Sigma_{f2}(r)}{\Sigma_{a2}(r)} P_{NTh} P_{NF} \quad (7.41)$$

Esa expresión hace

$$k_1 = \frac{\nu \Sigma_{f1}(r)}{\Sigma_{a2}(r) + \Sigma_{12}(r)} \quad (7.42)$$

$$k_2 = \frac{\nu \Sigma_{f2}(r)}{\Sigma_{a2}(r)} \quad (7.43)$$

y reconoce la probabilidad de escape a la resonancia como

$$p_R = \frac{\Sigma_{12}(r)}{\Sigma_{12}(r) + \Sigma_{a1}(r)} \quad (7.44)$$

La constante de multiplicación infinita (ecuación 7.33) en forma simplificada resulta

$$k_\infty = k_1 + p_R k_2 \quad (7.45)$$

Y la constante de multiplicación efectiva como

$$k_{eff} = k_1 P_{NF} + p_R k_2 P_{NTh} P_{NF} \quad (7.46)$$

Ecuación general de multigrupos

Para 3 grupos de energía se utiliza la ecuación de difusión de multigrupos

$$\begin{aligned} \Sigma_{Rk}(r)\Phi_k(r) - \nabla \cdot D_k(\mathbf{r})\nabla\Phi_k(r) = \\ = \nu\chi_k \sum_{k'=1}^n \Sigma_{fk'}(r) \Phi_{k'}(\mathbf{r}) + \sum_{k' \neq k} \Sigma_{k'k} \Phi_{k'}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (7.47)$$

Esta ecuación se puede desarrollar como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -D_1(\mathbf{r})\nabla^2 & \Sigma_{R1} \\ -\Sigma_{12} & -D_2(\mathbf{r})\nabla^2 + \Sigma_{R2} \\ -\Sigma_{13} & -\Sigma_{23} & -D_3(\mathbf{r})\nabla^2 + \Sigma_{R3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1(r) \\ \Phi_2(r) \\ \Phi_3(r) \end{bmatrix} = \\ = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \nu_1\chi_1\Sigma_{f1} & \nu_2\chi_1\Sigma_{f2} & \nu_3\chi_1\Sigma_{f3} \\ \nu_1\chi_2\Sigma_{f1} & \nu_2\chi_2\Sigma_{f2} & \nu_3\chi_2\Sigma_{f3} \\ \nu_1\chi_3\Sigma_{f1} & \nu_2\chi_3\Sigma_{f2} & \nu_3\chi_3\Sigma_{f3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1(r) \\ \Phi_2(r) \\ \Phi_3(r) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.48)$$

Capítulo 8. Ecuación crítica de un reactor nuclear

Cerca de la criticidad de un reactor nuclear $B_m^2 \cong B_g^2$ (§ 4.3), y de acuerdo con la definición de *buckling material* $B_m^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D}$ (ecuación 4.18), la diferencia entre el número de neutrones de fisión y el número de neutrones absorbidos es muy pequeña; por tanto, el *buckling* es muy pequeño.

Como se ha visto en la *Teoría de Frenado* (§ 6.6), si el *buckling* es muy pequeño, la probabilidad de no-escape de los neutrones termalizados puede expandirse en series de tal forma que

$$P_{NR} = e^{-B^2\tau} = 1 - B^2\tau \simeq \frac{1}{1 + B^2\tau} \quad (6.87)$$

De ahí que la constante de criticidad, para dos-grupos, se haya expresado por

$$k_{eff} = \frac{k_\infty}{(1 + L^2B^2)(1 + B^2\tau)} \quad (6.88)$$

O, al adoptar la ecuación (6.87), en su forma general se expresa como

$$k_{eff} = \frac{k_\infty e^{-B^2\tau}}{(1 + L^2B^2)} \quad (6.88a)$$

Si un reactor tiende a la criticidad $k_{eff} \approx 1$, por lo tanto es

$$\frac{k_\infty e^{-B^2\tau}}{(1 + L^2B^2)} \approx 1 \quad (8.1)$$

o bien

$$\frac{k_\infty}{(1 + L^2B^2)(1 + B^2\tau)} \approx 1 \quad (8.1a)$$

Esta expresión se conoce como **ecuación crítica de un reactor nuclear**.

El producto del denominador puede simplificarse al desarrollar el producto, dado que si B^2 es muy pequeño, el término que contiene B^4 puede despreciarse. Por tanto, la ecuación crítica puede expresarse en la forma

$$\frac{k_\infty}{1 + B^2(L^2 + \tau)} \approx 1 \quad (8.2)$$

De acuerdo con la *Teoría de Fermi*, la edad de Fermi es $\tau = \frac{\bar{r}^2}{6}$, donde $\bar{r}^2$ es la distancia cuadrada media que viajan los neutrones desde su emisión hasta su termalización. Por tanto, la ecuación crítica se puede expresar también por

$$\frac{k_\infty}{1 + B^2 \left(L^2 + \frac{\bar{r}^2}{6} \right)} \approx 1 \quad (8.2)$$

A la suma $L^2 + \tau$ se le conoce como *área de migración*

$$M^2 = L^2 + \tau = L^2 + \frac{\bar{r}^2}{6} \quad (8.3)$$

$$\frac{k_{\infty}}{1 + B_m^2 M^2} \approx 1 \quad (8.3a)$$

donde el término

$$P_N = \frac{1}{1 + B_m^2 M^2} \quad (8.4)$$

designa la probabilidad de no escape de neutrones tanto rápidos como térmicos.

En el caso de un reactor finito, para que este sea crítico la constante de multiplicación infinita debe ser mayor a 1, dado que la probabilidad de no escape de los neutrones rápidos es siempre menor a 1, de tal forma que la constante de multiplicación efectiva debe ser

$$k_{eff} = k_{\infty} P_N = 1 \quad (8.5)$$

Por lo tanto, se expresa

$$k_{\infty} = \frac{1}{P_N} = (B_m^2 M^2 + 1) \quad (8.6)$$

de donde

$$B_m^2 = \frac{k_{\infty} - 1}{M^2} \quad (8.7)$$

Esta expresión puede ser considerada de manera general como la **definición del buckling material** para un medio con factor de multiplicación efectiva cercano a la unidad. Aunque aquí ha sido derivada de la *Teoría de Frenado*, es una ecuación general independiente de la forma de deducción.

La probabilidad de no escape de neutrones rápidos, de manera semejante a la ecuación (6.87), puede expresarse como

$$P_{NF} = \frac{1}{1 + B^2 \tau} = e^{-B^2 \tau} \quad (8.8)$$

Luego, la ecuación (8.5) puede generalizarse como

$$k_{eff} = k_{\infty} P_{NF} = k_{\infty} e^{-B^2 \tau} \quad (8.9)$$

Para n grupos, la ecuación crítica puede expresarse como

$$\frac{k_{\infty}}{(1 + L_1^2 B^2)(1 + L_2^2 B^2) \dots (1 + L_n^2 B^2)} = 1 \quad (8.10)$$

o bien

$$k_{\infty} = (1 + L_1^2 B^2)(1 + L_2^2 B^2) \dots (1 + L_n^2 B^2) \quad (8.10a)$$

donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_i^2 = \tau \quad (8.11)$$

Al aplicar logaritmos en la ecuación (8.10a) esta se expresa

$$\begin{aligned} \ln k_{\infty} &= \ln (1 + L_1^2 B^2)(1 + L_2^2 B^2) \dots (1 + L_n^2 B^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \ln (1 + L_i^2 B^2) + \ln (1 + L_n^2 B^2) \end{aligned} \quad (8.12)$$

Y dado que, si el *buckling* es muy pequeño, se utiliza el principio adoptado para la deducción de la ecuación (6.87)

$$e^{-B^2 L_i^2} = 1 - B^2 L_i^2 \quad (8.13)$$

o bien

$$B^2 L_i^2 = \ln [1 - B^2 L_i^2] \quad (8.13a)$$

Al utilizar la ecuación (8.13a), la (8.12) se puede reescribir como

$$\ln k_{\infty} = B^2 \sum_{i=1}^{n-1} L_i^2 + \ln (1 + L_n^2 B^2) \quad (8.12a)$$

Y cuando se utiliza la ecuación (8.11),

la (8.12a) se reduce a

$$\ln k_{\infty} = B^2 \tau + \ln (1 + L_n^2 B^2) \quad (8.12b)$$

Y aplicando exponenciales

$$\frac{k_{\infty} e^{-B^2 \tau}}{(1 + L_n^2 B^2)} = 1 \quad (8.14)$$

que es esencialmente similar a la ec. (8.1), para cada uno de los n grupos. Teóricamente implica que conociendo τ , k_{∞} y cualquier L_n^2 se puede calcular B^2 .

La ecuación (8.14) puede generalizarse para cualquier valor de k_{eff} . Esto es

$$k_{eff} = \frac{k_{\infty} e^{-B^2 \tau}}{(1 + L_n^2 B^2)} \quad (8.15)$$

Cálculo del *buckling* material para un reactor subcrítico

Para calcular el *buckling* material de un reactor cilíndrico subcrítico se tiene que partir de la solución de la ecuación de difusión en coordenadas cilíndricas (§ 4.5). Para el componente axial conviene utilizar una solución exponencial, para lo cual, en lugar de la ecuación (4.50), se utilizará la siguiente ecuación:

$$Z''(z) - \gamma^2 Z(z) = 0 \quad (4.50a)$$

De esta manera

$$Z(z) = Z_0 e^{-\gamma z} \quad (4.55a)$$

El *buckling* material resulta

$$B_m^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \quad (4.51a)$$

y el flujo es

$$\Phi(\rho, z) = \phi_0 J_0 \left(\frac{2.405\rho}{R'} \right) e^{-\gamma z} \quad (4.61a)$$

Al aplicar logaritmos a la ecuación (4.61a) se expresa

$$\ln[\Phi(\rho, z)] = \ln \left[\phi_0 J_0 \left(\frac{2.405\rho}{R'} \right) \right] - \gamma z$$

En la gráfica de esta ecuación cualquier valor de r es una línea recta con pendiente γ . De la ecuación (4.61a) es evidente que a una altura $z = \frac{1}{\gamma}$, el flujo se reduce en un factor e , a esa distancia se le conoce como longitud de relajación l .

Y el *buckling material*, en términos de la longitud de relajación, resulta

$$B_m^2 = \left(\frac{2.405}{R'} \right)^2 - \frac{1}{l^2} \quad (8.16)$$

Cálculo de la relación de densidades nucleares entre combustible y moderador para un reactor crítico

En el caso de *Teoría de Difusión* de un grupo se puede asumir que en la fórmula de los cuatro factores $k_\infty = f\eta\epsilon p$ [ec. (1.29)] el producto es $\epsilon p = 1$, por lo tanto

$$k_\infty = \eta f = \eta \frac{\Sigma_{aU}}{\Sigma_{aU} + \Sigma_{aM}} \quad (8.17)$$

que se puede reescribir como

$$k_\infty = \eta \frac{z}{z + 1} \quad (8.18a)$$

donde $z = \frac{\Sigma_{aU}}{\Sigma_{aM}} = \frac{\sigma_{aU} N_U}{\sigma_{aM} N}$

La longitud de moderación de una mezcla, de acuerdo con la definición, es la relación

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} = \frac{D}{\Sigma_{aU} + \Sigma_{aM}} \quad (8.18)$$

Como la relación entre las densidades nucleares del combustible y el moderado es muy pequeña, las propiedades de difusión o moderación de una mezcla homogénea son esencialmente las del moderador, por lo que la ecuación (8.6) se puede escribir como

$$L^2 = \frac{D_M}{\Sigma_{aU} + \Sigma_{aM}} = \frac{\frac{D_M}{\Sigma_{aM}}}{z + 1} = L_M^2 \frac{1}{z + 1} \quad (8.19)$$

Y se sustituyen las ecuaciones (8.18a) y (8.19) en la ecuación crítica (8.1)

$$\frac{k_\infty e^{-B^2\tau}}{(1 + L^2 B^2)} = \frac{\eta z e^{-B^2\tau}}{z + 1 + L_M^2 B^2} = 1 \quad (8.20)$$

de donde

$$z = \frac{1 + L_M^2 B^2}{\eta e^{-B^2 \tau} - 1} \quad (8.21)$$

Se está hablando de un reactor cuasicrítico $B^2 = B_m^2 = B_g^2$

Pero, dado que $z = \frac{\Sigma a_U}{\Sigma a_M}$, para que un reactor sea crítico requiere que $z > 0$. Para ello

$$\eta e^{-B_g^2 \tau} > 1 \quad (8.22)$$

Lo que implica que para cada tipo de combustible el *buckling* geométrico debe ser tal que

$$B_g^2 < \frac{\ln \eta}{\tau} \quad (8.23)$$

En la tabla 8.1 se presentan las características nucleares de los moderadores más comunes. Y en la tabla 8.2 los valores límites o los límites máximos del *buckling* crítico para reactores térmicos homogéneos de mezclas de uranio U^{235} (cuyo $\eta = 2.07$), con los moderadores comunes. Si el *buckling* geométrico es igual al *buckling* límite, el denominador de la ecuación (8.21) se hace cero y $z = \infty$.

Tabla 8.1. Características nucleares de los moderadores comunes

	$\sigma_{H_2O} (b)$	$\Sigma_{H_2O} (cm^{-1})$	$D (cm)$	$\tau (cm^2)$
H_2O	0.66539	0.017	0.142	33
D_2O	1.196×10^{-3}	0.00008	0.80	120
Be	8.27×10^{-3}	0.0013	0.76	98
C	3.87×10^{-3}	0.0036	0.0903	350

Fuente: elaboración propia.

Tabla 8.2. Valores límites máximos del *buckling* para reactores de uranio según el moderador

	$\tau (cm^2)$	B_g^2
H_2O	33	0.022047
D_2O	120	0.006063
Be	98	0.007424
C	350	0.0020787

Fuente: elaboración propia.

Volumen mínimo de un reactor crítico (caso reactor cilíndrico)

El volumen más pequeño que corresponde un reactor cilíndrico con un *buckling* específico puede determinarse a partir de la ecuación (4.62), que define el *buckling* geométrico

$$B_g^2 = \left(\frac{2.405}{R'}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H'}\right)^2 \quad (4.62)$$

De la cual, se despeja

$$R^2 = \frac{(2.405)^2 H^2}{B_g^2 H^2 - \pi^2} \quad (8.24)$$

Dado que el volumen del cilindro es $V = \pi R^2 H$, se expresa

$$V = \frac{\pi(2.405)^2 H^3}{B_g^2 H^2 - \pi^2} \quad (8.25)$$

Al derivar e igualar a cero

$$B_g^2 H^2 = 3\pi^2 \quad (8.26)$$

o bien

$$H = \frac{\sqrt{3} \pi}{B_g} = \frac{5.4414}{B_g} \quad (8.27)$$

se sustituye en la ecuación (8.24)

$$R = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{2.405}{B_g}\right)} = \frac{2.9455}{B_g} \quad (8.28)$$

También se reemplaza en la ecuación (8.25)

$$V_{min} = \frac{148.26}{B_g^2} \quad (8.29)$$

Un procedimiento similar puede deducirse fácilmente para el caso de un **reactor esférico**. En tal caso puede verificarse que

$$V_{min} = \frac{130}{B_g^2} \quad (8.30)$$

Determinación del tamaño y masa nuclear para un reactor con una composición z

La ecuación (8.15) se puede reescribir como

$$e^{-B^2 \tau} = \frac{1}{\eta z} (z + 1 + L_M^2 B^2) \quad (8.15a)$$

Al hacer

$$x = B^2 \tau; \quad A = \frac{1+z}{\eta z} \quad y \quad C = \frac{L_M^2}{\eta z \tau} \quad (8.31)$$

Por lo que la ecuación (8.15a) se puede reescribir como

$$e^{-x} = A + Cx \quad (8.15b)$$

Esta ecuación puede resolverse por iteraciones. Puesto que x no es grande, e^{-x} puede tomarse como $1 - x$ y como A y C de la ecuación (8.8b) son conocidas, un valor preliminar de x es

$$x = \frac{A - 1}{C + 1} \quad (8.32)$$

Después ese valor se vuelve a sustituir en la ecuación (8.15b), y así sucesivamente hasta llegar a una mejor aproximación.

Factor de multiplicación

Si en un reactor subcrítico, cuya composición es tal que tiene una constante de multiplicación k_{eff} , se introduce una fuente externa que emite un número S de neutrones rápidos, al final de una primera generación habrá $k_{eff} S$ neutrones térmicos, al final de la segunda generación habrá $k_{eff}^2 S$ neutrones, y así sucesivamente. Por tanto, la multiplicación de neutrones será la relación

$$M = \frac{k_{eff} S + k_{eff}^2 S + k_{eff}^3 S + \dots}{S} = \frac{1}{1 - k_{eff}} \quad (8.33)$$

Esta expresión es útil no solo para reactores subcríticos, sino porque permite medir la constante de multiplicación correspondiente a diferentes posiciones de las barras de control de un reactor al ser reiniciado después de un *shut down*. Para ello simplemente se mide la multiplicación del flujo a medida que se extraen las barras. La posición crítica de las barras se puede extrapolar cuando $\frac{1}{M} = 0$.

Capítulo 9. Ecuación de difusión en una celda unitaria cilíndrica

Un reactor consiste en una red de celadas unitarias compuestas cada una por el elemento combustible cilíndrico en el centro, rodeado por una región moderadora de la velocidad de los neutrones. Las redes pueden ser de dos tipos, hexagonales o cuadradas.

El cálculo de la red se realiza partiendo del cálculo de la celda y se generaliza para toda la red.

En estado estacionario, la ecuación de difusión de una velocidad está dada por

$$\Sigma_a \phi(\rho, z) - D \nabla^2 \phi(\rho, z) = S \quad (4.2a)$$

Para una geometría cilíndrica el laplaciano es

$$\nabla^2 \Phi(\rho, z) = \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \Phi(\rho, z) \quad (9.1)$$

Ecuación de difusión para el moderador

En un reactor térmico, la fuente de neutrones $S = q_M$ se ubica en el moderador, mientras que en el combustible no hay fuente de neutrones. Si M y F designan el moderador y el combustible, las ecuaciones de difusión para cada región son respectivamente

$$\left[-D_M \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \Sigma_{aM} \right] \phi_M(\rho, z) = q_M \quad (4.2a)$$

$$\left[-D_F \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \Sigma_{aF} \right] \phi_F(\rho, z) = 0 \quad (4.2b)$$

Ignorando el procedimiento de separación de variables $\Phi_M(\rho, z) = R_M(\rho)Z(z)$, para el moderador:

La componente radial

$$-\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) R_M(\rho) + \kappa_M^2 R_M(\rho) = \frac{q_M}{D_M} \quad (9.2)$$

Se ha usado el inverso del área de difusión, haciendo $\kappa_M^2 = \frac{\Sigma_{aM}}{D_M} = \frac{1}{L_M^2}$

La ecuación homogénea es

$$-\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) R_M(\rho) + \kappa_M^2 R_M(\rho) = 0 \quad (9.3)$$

que es una ecuación de Bessel ordinaria de orden cero, cuya solución es

$$R_H(\rho) = A I_0(\kappa_M \rho) + C K_0(\kappa_M \rho) \quad (9.4)$$

Donde I_0 y K_0 son las funciones ordinarias de Bessel de primera y segunda clase, mientras que A y C son constantes de integración arbitrarias.

La solución general es la suma de la solución homogénea más la integral particular

$$R_M(\rho) = R_H(\rho) + R_P \quad (9.5)$$

Esta integral es en caso de que no haya variación de $R_M(\rho)$ o las derivadas sean ceros. En tal caso

$$R_P = \frac{q_M}{\kappa_M^2 D_M} \quad (9.6)$$

La componente axial

Puede admitir una solución de la forma

$$Z(z) = Z_0 \cos \beta z \quad (4.59)$$

La frontera extrapolada de la base y la tapa del cilindro el flujo debe ser cero $Z(\pm H') = 0$; lo que implica que $0 = \cos(\pm \beta H')$. Y como se sabe hay muchos valores de $\pm \beta H'$ que cumplen esa condición, el primer valor es $\frac{\pi}{2}$. Por tanto,

$$\beta = \frac{\pi}{2H'} \quad (4.63)$$

Después se sustituyen en la ecuación (4.59)

$$Z(z) = Z_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) \quad (4.64)$$

Por lo tanto, al sustituir en $\Phi_M(\rho, z) = R_M(\rho)Z_M(z)$ la solución general es

$$\Phi_M(\rho, z) = R_M(\rho)Z_M(z) = \left[A I_0(\kappa_M \rho) + C K_0(\kappa_M \rho) + \frac{q_M}{\kappa_M^2 D_M} \right] \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) \quad (9.7)$$

Las condiciones a la frontera para el moderador son

$$i) \quad \Phi_M(\rho, \pm H') = 0$$

Entre una celda y otra ($\rho = R_{U+M}$) la corriente debe ser cero

$$ii) \quad \tilde{J}_M(R_{U+M}, z) = 0 \quad o \quad -D_M \left| \frac{\partial \phi_M(\rho, z)}{\partial z} \right|_{\rho=R_{U+M}} = 0$$

La condición $i)$ queda automáticamente satisfecha puesto que a $z = H'$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Para la condición $ii)$

$$-D_M \frac{\partial \phi_M(\rho, R_{U+M})}{\partial z} = -D_M \kappa_M [A I_1(\kappa_M R_{U+M}) - C K_1(\kappa_M R_{U+M})] \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) = 0 \quad (9.8)$$

de donde

$$C = A \frac{I_1(\kappa_M R_{U+M})}{K_1(\kappa_M R_{U+M})} \quad (9.9)$$

Se sustituye en la ecuación (7)

$$\Phi_M(\rho, z) = A \left[I_0(\kappa_M \rho) + \frac{I_1(\kappa_M R_{U+M})}{K_1(\kappa_M R_{U+M})} K_0(\kappa_M \rho) \right] \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) + \frac{q_M}{\kappa_M^2 D_M} \quad (9.10)$$

q_M puede considerarse constante, pero es más real considerar que puede representarse por una función que sea cero en el fondo y en el domo de la celda

$$q_M(\rho, z) = q_M \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) \quad (9.11)$$

En cuyo caso

$$\Phi_M(\rho, z) = \left\{ A \left[I_0(\kappa_M \rho) + \frac{I_1(\kappa_M R_{U+M})}{K_1(\kappa_M R_{U+M})} K_0(\kappa_M \rho) \right] + \frac{q_M}{\kappa_M^2 D_M} \right\} \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) \quad (9.12)$$

Ecuación de difusión para el combustible

$$\Phi_F(\rho, z) = [A_1 I_0(\kappa_F \rho) + A_2 K_0(\kappa_F \rho)] \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) \quad (9.13)$$

Se ha usado el inverso del área de difusión, al hacer $\kappa_F^2 = \frac{\Sigma_{aF}}{D_F} = \frac{1}{L_F^2}$

Pero en el centro del combustible, cuando $\rho \rightarrow 0$ la función $K_0 \rightarrow \infty$, por ello $A_2 = 0$. Por tanto, el flujo se reduce a

$$\Phi_F(\rho, z) = A_1 I_0(\kappa_F \rho) \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) \quad (9.14)$$

i) La continuidad en el flujo en la frontera del combustible $\rho = R_U$ implica que

$$\Phi_F(R_U, z) = \Phi_M(R_U, z)$$

Esto es

$$\begin{aligned} & \left\{ A \left[I_0(\kappa_M R_U) + \frac{I_1(\kappa_M R_{U+M})}{K_1(\kappa_M R_{U+M})} K_0(\kappa_M R_U) \right] + \frac{q_M}{\kappa_M^2 D_M} \right\} \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) \\ &= [A_1 I_0(\kappa_F R_U)] \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) \quad (9.15) \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} & A \left[I_0(\kappa_M R_U) + \frac{I_1(\kappa_M R_{U+M})}{K_1(\kappa_M R_{U+M})} K_0(\kappa_M R_U) \right] + \frac{q_M}{\kappa_M^2 D_M} = A_1 [I_0(\kappa_F R_U)] \\ &= 0 \quad (9.16) \end{aligned}$$

ii) La continuidad de la corriente implica que

$$\begin{aligned} & -D_M \frac{\partial \Phi_M(\rho, z)}{\partial z} \Big|_{\rho=R_U} = -D_F \frac{\partial \Phi_F(\rho, z)}{\partial z} \Big|_{\rho=R_U} \\ & A D_M \kappa_M \left[I_1(\kappa_M R_U) + \frac{I_1(\kappa_M R_{U+M})}{K_1(\kappa_M R_{U+M})} K_1(\kappa_M R_U) \right] = A_1 D_F \kappa_F [I_1(\kappa_F R_U)] \quad (9.17) \end{aligned}$$

Se despeja A_1 de la ecuación (9.17)

$$A_1 = A \frac{D_M \kappa_M}{D_F \kappa_F} \left[\frac{I_1(\kappa_M R_U)}{I_1(\kappa_F R_U)} + \frac{I_1(\kappa_M R_{U+M})}{I_1(\kappa_F R_U)} \frac{K_1(\kappa_M R_U)}{K_1(\kappa_M R_{U+M})} \right] \quad (9.17')$$

Luego se sustituye en la ecuación (9.14)

$$\Phi_F(\rho, z) = A I_0(\kappa_F \rho) \frac{D_M \kappa_M}{D_F \kappa_F} \left[\frac{I_1(\kappa_M R_U)}{I_1(\kappa_F R_U)} + \frac{I_1(\kappa_M R_{U+M})}{I_1(\kappa_F R_U)} \frac{K_1(\kappa_M R_U)}{K_1(\kappa_M R_{U+M})} \right] \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) \quad (9.18)$$

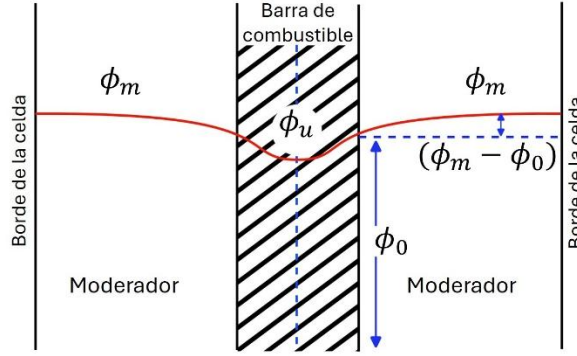
Factor de utilización térmica para una celda heterogénea

El factor de utilización térmica f se puede definir de varias formas, la más común considera que es la relación entre el número de neutrones absorbidos en el combustible respecto al número de neutrones totales, es decir, los absorbidos en el combustible más los absorbidos en otros materiales.

Tomando en cuenta que el combustible y el moderador en una celda heterogénea ocupan diferente volumen, y utilizando la definición de razón de reacción

$$f = \frac{\Sigma_{aU} \phi_U V_U}{\Sigma_{aU} \phi_U V_U + \Sigma_{aM} \phi_M V_M} \quad (9.19)$$

Figura 9.1. Flujo de neutrones en una celda unitaria cilíndrica



Fuente: elaboración propia.

Para efectos prácticos, y de acuerdo con la figura 11, es común encontrar cualquiera de las siguientes formas

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{\Sigma_{aU} \bar{\phi}_U V_U + \Sigma_{aM} \bar{\phi}_M V_M}{\Sigma_{aU} \bar{\phi}_U V_U} = 1 + \frac{\Sigma_{aM} \bar{\phi}_M V_M}{\Sigma_{aU} \bar{\phi}_U V_U} = 1 + \frac{[\Phi_0 + (\bar{\phi}_M - \Phi_0)] \Sigma_{aM} V_M}{\Sigma_{aU} \bar{\phi}_U V_U} \\ &= 1 + \frac{\Sigma_{aM} V_M}{\Sigma_{aU} V_U} \left[\frac{\Phi_0}{\bar{\phi}_U} + \frac{\bar{\phi}_M - \Phi_0}{\bar{\phi}_U} \right] \end{aligned} \quad (9.20)$$

donde Φ_0 , $\bar{\phi}_U$ y $\bar{\phi}_M$ pueden ser determinados a partir de las ecuaciones (9.14) y (9.18).

$$\Phi_F(\rho, z) = A_1 I_0(\kappa_F \rho) \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) \quad (9.14)$$

$$\Phi_M(\rho, z) = \left\{ A \left[I_0(\kappa_M \rho) + \frac{I_1(\kappa_M R_{U+M})}{K_1(\kappa_M R_{U+M})} K_0(\kappa_M \rho) \right] + \frac{q_M}{\kappa_M^2 D_M} \right\} \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) \quad (9.18)$$

o bien

$$\Phi_M(\rho, z) = \left\{ C [I_0(\kappa_M \rho) K_1(\kappa_M R_{U+M}) + I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_0(\kappa_M \rho)] + \frac{q_M}{\kappa_M^2 D_M} \right\} \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) \quad (9.21)$$

donde $K_1(\kappa_M R_{U+M})$ del denominador de la ecuación (9.18) ha sido absorbido en C .

Las constantes A_1 y C pueden determinarse mediante las condiciones a la frontera (i) continuidad de flujo y (ii) continuidad de la corriente.

iii) La continuidad en el flujo en la frontera del combustible $\rho = R_U$ implica que $\Phi_F(R_U, z) = \Phi_M(R_U, z)$. Esto es

$$\begin{aligned} C [I_0(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M}) + I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_0(\kappa_M R_U)] + \frac{q_M}{\kappa_M^2 D_M} \\ = [A_1 I_0(\kappa_F R_U)] \end{aligned} \quad (9.22)$$

Se despeja C de la ecuación (9.22)

$$C = \frac{A_1 I_0(\kappa_F R_U) - \frac{q_M}{\kappa_M^2 D_M}}{[I_0(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M}) + I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_0(\kappa_M R_U)]} \quad (9.23)$$

iv) La continuidad de la corriente implica que en $\rho = R_U$

$$D_F \frac{\partial \phi_F(R_U, z)}{\partial \rho} = D_M \frac{\partial \phi_M(R_U, z)}{\partial \rho}$$

Se deriva la ecuación (9.14) respecto a ρ

$$\frac{\partial \phi_F(\rho, z)}{\partial \rho} = A_1 \kappa_F I_1(\kappa_F \rho) \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) \quad (9.24)$$

También se deriva la ecuación (9.19) respecto a ρ

$$\frac{\partial \phi_M(\rho, z)}{\partial \rho} = \{C \kappa_M [I_1(\kappa_M \rho) K_1(\kappa_M R_{U+M}) - I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_1(\kappa_M \rho)]\} \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right) \quad (9.25)$$

Se evalúa en $\rho = R_U$ y sustituye en (ii)

$$\begin{aligned} D_F A_1 \kappa_F I_1(\kappa_F R_U) \\ = D_M C \kappa_M [I_1(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M}) \\ + I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_1(\kappa_M R_U)] \end{aligned} \quad (9.26)$$

de donde

$$C = \frac{D_F A_1 \kappa_F I_1(\kappa_F R_U)}{D_M \kappa_M [I_1(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M}) - I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_1(\kappa_M R_U)]} \quad (9.27)$$

Se sustituye la ecuación (9.27) en la (9.22)

$$\begin{aligned} \frac{q_M}{\kappa_M^2 D_M} = A_1 \left\{ I_0(\kappa_F R_U) \right. \\ \left. - \frac{D_F \kappa_F I_1(\kappa_F R_U) [I_0(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M}) + I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_0(\kappa_M R_U)]}{D_M \kappa_M [I_1(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M}) - I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_1(\kappa_M R_U)]} \right\} \end{aligned} \quad (9.28)$$

o bien, dado que $\kappa_M^2 = \frac{\Sigma_{aM}}{D_M}$ se expresa

$$\frac{q_M}{\kappa_M^2 D_M} = \frac{q_M}{\Sigma_{aM}}$$

Por lo que la ecuación (9.28) queda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_1} \\ &= \frac{\Sigma_{aM}}{q_M} \left\{ I_0(\kappa_F R_U) \right. \\ & \quad \left. - \frac{D_F \kappa_F I_1(\kappa_F R_U) [I_0(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M}) + I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_0(\kappa_M R_U)]}{D_M \kappa_M [I_1(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M}) - I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_1(\kappa_M R_U)]} \right\} \quad (9.28a) \end{aligned}$$

El factor de utilización térmica se puede definir, en forma alterna a la ecuación (9.19), como la fracción del número de neutrones moderados que son absorbidos en el combustible

$$f = \frac{\Sigma_{aU} \bar{\phi}_U V_U}{q_M V_M} \quad (9.29)$$

donde q_M es la densidad de moderación, o número de neutrones térmicos producidos por unidad de volumen.

Al considerar la barra de combustible, el número de neutrones absorbidos por unidad de longitud por unidad de tiempo es

$$\begin{aligned} \Sigma_{aU} \bar{\phi}_U V_U &= \int_0^{R_U} \Sigma_{aU} \Phi_F(\rho) 2\pi \rho d\rho = 2\pi \Sigma_{aU} A_1 \int_0^{R_U} I_0(\kappa_F \rho) \rho d\rho = \frac{2\pi \Sigma_{aU} A_1}{\kappa_F} [\rho I_1(\kappa_F \rho)]_0^{R_U} \\ &= \frac{2\pi \Sigma_{aU} A_1}{\kappa_F} R_U I_1(\kappa_F R_U) \quad (9.30) \end{aligned}$$

Dado que $V_U = \pi R_U^2$, el flujo promedio en el combustible es

$$\bar{\phi}_U = \frac{2\pi A_1}{\pi R_U^2 \kappa_F} R_U I_1(\kappa_F R_U) = \frac{2 A_1}{\kappa_F R_U} I_1(\kappa_F R_U) \quad (9.31)$$

El volumen del moderador por unidad de longitud es $V_M = \pi(R_{U+M}^2 - R_U^2)$, por lo tanto, el número de neutrones producidos por frenado por unidad de volumen es

$$q_M V_M = \pi q_M (R_{U+M}^2 - R_U^2) \quad (9.32)$$

y se sustituyen las ecuaciones (9.31) y (9.32) en la (9.29)

$$\frac{1}{f} = \frac{\pi q_M \kappa_F (R_{U+M}^2 - R_U^2)}{2\pi \Sigma_{aF} R_U I_1(\kappa_F R_U)} \frac{1}{A_1} \quad (9.33)$$

Esa ecuación tiene la ventaja de que el término $\frac{1}{A_1}$ ya ha sido deducido en la (9.28a), por tanto, ahora se expresa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f} &= \frac{\pi \kappa_M \kappa_F (R_{U+M}^2 - R_U^2)}{2\pi \Sigma_{aF} R_U I_1(\kappa_F R_U)} \frac{1}{A_1} \\
&= \frac{\pi \kappa_F (R_{U+M}^2 - R_U^2)}{2\pi R_U} \frac{\Sigma_{aM}}{\Sigma_{aF}} \left\{ \frac{I_0(\kappa_F R_U)}{I_1(\kappa_F R_U)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{D_F \kappa_F [I_0(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M}) + I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_0(\kappa_M R_U)]}{D_M \kappa_M [I_1(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M}) - I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_1(\kappa_M R_U)]} \right\} \\
\frac{1}{f} &= \frac{V_M \Sigma_{aM}}{V_F \Sigma_{aF}} \left[\frac{\kappa_F R_U}{2} \frac{I_0(\kappa_F R_U)}{I_1(\kappa_F R_U)} \right] \\
&\quad - \frac{\kappa_M (R_{U+M}^2 - R_U^2)}{2 R_U} \frac{[I_0(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M}) + I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_0(\kappa_M R_U)]}{[I_1(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M}) - I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_1(\kappa_M R_U)]} \\
\frac{1}{f} &= \frac{V_M \Sigma_{aM}}{V_F \Sigma_{aF}} \left[\frac{\kappa_F R_U}{2} \frac{I_0(\kappa_F R_U)}{I_1(\kappa_F R_U)} \right] \\
&\quad + \frac{\kappa_M (R_{U+M}^2 - R_U^2)}{2 R_U} \frac{[I_0(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M}) + I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_0(\kappa_M R_U)]}{[I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_1(\kappa_M R_U) - I_1(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M})]}
\end{aligned} \tag{9.34}$$

La ecuación (9.34) puede abreviarse en la forma

$$\frac{1}{f} = 1 + \frac{V_M \Sigma_{aM}}{V_F \Sigma_{aF}} F + (E - 1) \tag{9.35}$$

donde

$$F = \frac{\kappa_F R_U}{2} \frac{I_0(\kappa_F R_U)}{I_1(\kappa_F R_U)} \tag{9.36}$$

y

$$E - 1 = \frac{\kappa_M (R_{U+M}^2 - R_U^2)}{2 R_U} \frac{[I_0(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M}) + I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_0(\kappa_M R_U)]}{[I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_1(\kappa_M R_U) - I_1(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M})]} \tag{9.37}$$

Puede demostrarse que el término F equivale a la relación entre el flujo en la superficie de la barra y el flujo en el interior de esta (figura 11).

$$F = \frac{\bar{\phi}_0}{\bar{\phi}_U}$$

Ejercicio 9.1. Demostración.

De acuerdo con la ecuación (9.14), si $\Phi_F(\rho, z) = A_1 I_0(\kappa_F \rho) \cos\left(\frac{\pi z}{2H'}\right)$ se evalúa en $\rho = R_U$

$$\Phi_0(R_U) = A_1 I_0(\kappa_F R_U) \tag{9.38}$$

Y conforme a la ecuación (9.31) el flujo promedio en la barra de uranio, o en el combustible es

$$\bar{\phi}_U = \frac{2 A_1}{\kappa_F R_U} I_1(\kappa_F R_U) \tag{9.31}$$

y se dividen las ecs. (9.38) y (9.31)

$$F = \frac{\bar{\phi}_0}{\bar{\phi}_U} = \frac{\kappa_F R_U}{2} \frac{I_0(\kappa_F R_U)}{I_1(\kappa_F R_U)} \quad (9.39)$$

De forma semejante, puede demostrarse que

$$\begin{aligned} E - 1 &= \frac{\kappa_M (R_{U+M}^2 - R_U^2)}{2 R_U} \frac{[I_0(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M}) + I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_0(\kappa_M R_U)]}{[I_1(\kappa_M R_{U+M}) K_1(\kappa_M R_U) - I_1(\kappa_M R_U) K_1(\kappa_M R_{U+M})]} \\ &= \frac{\Sigma_{aM} V_M}{\Sigma_{aU} V_U} \left[\frac{\bar{\phi}_M - \Phi_0}{\bar{\phi}_U} \right] \quad (9.40) \end{aligned}$$

Probabilidad de escape a la resonancia

De acuerdo con la *Teoría de Frenado*, la probabilidad de escape a la resonancia para un medio homogéneo está dada por la expresión

$$p(E) = \frac{q(E)}{q(E_0)} = \frac{S_0}{S_0} \exp \left[- \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma_s} \frac{dE}{E} \right] = \exp \left[- \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma_s} \frac{dE}{E} \right] \quad (6.74)$$

Sin embargo, en el caso de un medio heterogéneo o una celda unitaria, hay evidencias experimentales de que la probabilidad de escape a la resonancia no depende exclusivamente de las absorciones en el interior de la barra de combustible; las absorciones que suceden en la superficie de la barra, por retrodispersión de neutrones por el moderador, suelen ser mayores.

En el caso de uranio metálico la integral de resonancia en el volumen de la barra de combustible es

$$\int \sigma_{av} \frac{dE}{E} = 9.25 \text{ b} \quad (9.41)$$

mientras que en la superficie de la barra es

$$\int \sigma_{as} \frac{dE}{E} = 24.7 \text{ b} \quad (9.42)$$

Pero la integral de resonancia en la barra de combustible depende, además, de la geometría de la barra y, en particular, de la relación entre la superficie S y el volumen M , esa relación es la masa en g por unidad de longitud de la barra. Esto es

$$\int \sigma_{a\text{eff}} \frac{dE}{E} = \left(9.27 + 24.7 \frac{S}{M} \right) \text{ b} \quad (9.43)$$

Se puede verificar dimensionalmente que la densidad de moderación o el número de neutrones moderados que llegan a la energía E en el moderador es

$$q(E) = \bar{\phi}_M V_M \xi \Sigma_{sM} E \quad (9.44)$$

La razón de absorción de neutrones en resonancia R_{aR} es igual al cambio en la densidad de moderación con respecto a la energía

$$\frac{dq(E)}{dE} = R_{aR} = \bar{\phi}_U V_U N_U \sigma_{av} + \bar{\phi}_S V_U N_U \sigma_{as} \frac{S}{M} \quad (9.45)$$

Al dividir la razón de moderación entre la densidad de moderación resulta

$$\frac{1}{q(E)} \frac{dq(E)}{dE} = \left[\frac{\bar{\phi}_U V_U N_U \sigma_{av}}{\bar{\phi}_M V_M \xi \Sigma_{sM}} + \frac{\bar{\phi}_S V_U N_U \sigma_{aS}}{\bar{\phi}_M V_M \xi \Sigma_{sM}} \frac{S}{M} \right] \frac{1}{E} \quad (9.46)$$

Y se integra desde la energía de fisión E_0 hasta la energía de resonancia E

$$\int_{E_0}^E \frac{dq(E)}{q(E)} = \frac{V_U N_U}{V_M \xi \Sigma_{sM}} \left\{ \int_{E_0}^E \frac{\bar{\phi}_U(E')}{\bar{\phi}_M(E')} \sigma_{av} \frac{dE'}{E'} + \frac{S}{M} \int_{E_0}^E \frac{\bar{\phi}_S(E')}{\bar{\phi}_M(E')} \sigma_{av} \frac{dE'}{E'} \right\} \quad (9.47)$$

lo que resulta

$$\frac{q(E)}{q(E_0)} = \exp \left\{ - \frac{V_U N_U}{V_M \xi \Sigma_{sM}} \left\{ \int_E^{E_0} \frac{\bar{\phi}_U(E')}{\bar{\phi}_M(E')} \sigma_{av} \frac{dE'}{E'} + \frac{S}{M} \int_E^{E_0} \frac{\bar{\phi}_S(E')}{\bar{\phi}_M(E')} \sigma_{av} \frac{dE'}{E'} \right\} \right\} \quad (9.48)$$

donde E' es cualquier energía de dispersión y el signo menos se debe a la inversión de los límites de integración.

Justamente la ecuación (9.48) equivale a la probabilidad de escape a la resonancia

$$p(E) = \frac{q(E)}{q(E_0)} \quad (9.49)$$

En el caso de celdas de uranio optimizadas geométricamente se considera que, en la región de resonancia, el flujo en la superficie de la barra es igual al flujo en el interior, y que la relación entre flujos es independiente de la energía.

$$\frac{\bar{\phi}_U}{\bar{\phi}_M} = \frac{\bar{\phi}_S}{\bar{\phi}_M} \quad (9.50)$$

La ecuación (9.48) se reduce a

$$p(E) = \exp \left\{ - \frac{V_U N_U}{V_M \xi \Sigma_{sM}} \frac{\bar{\phi}_U}{\bar{\phi}_M} \int_E^{E_0} \left(\sigma_{av} + \frac{S}{M} \sigma_{av} \right) \frac{dE'}{E'} \right\} \quad (9.51)$$

o se conjugan ambos tipos de absorciones, tal como en la ecuación (9.43)

$$p(E) = \exp \left\{ - \frac{V_U N_U}{V_M \xi \Sigma_{sM}} \frac{\bar{\phi}_U}{\bar{\phi}_M} \int_E^{E_0} \sigma_{a\,eff} \frac{dE'}{E'} \right\} \quad (9.51a)$$

Puede definirse un factor de utilización en resonancia f_r de manera semejante al factor de utilización térmica, ec. (9.34). En tal caso, el factor de utilización en resonancia f_r puede expresarse como

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_r} = 1 + & \frac{V_M \Sigma_{arM}}{V_U \Sigma_{arU}} \frac{\kappa_{rU}}{2} \frac{R_U}{I_1(\kappa_{rU} R_U)} \frac{I_0(\kappa_{rU} R_U)}{I_1(\kappa_{rU} R_U)} \\ & + \frac{\kappa_{rM}(R_M^2 - R_U^2)}{2R_U} \left[\frac{I_0(\kappa_{rM} R_U) K_1(\kappa_{rM} R_M) - K_0(\kappa_{rM} R_U) I_1(\kappa_{rM} R_M)}{I_1(\kappa_{rM} R_U) K_1(\kappa_{rM} R_M) - K_1(\kappa_{rM} R_U) I_1(\kappa_{rM} R_M)} \right] \end{aligned} \quad (9.52)$$

donde, $\omega_{rU} = \kappa_{rU}$, $\omega_{rM} = \kappa_{rM}$, Σ_{arM} y $\Sigma_{arU} = \frac{N_U}{5.6} \left[9.25 + 24.7 \frac{S}{M} \right] \times 10^{-24}$ son las constantes nucleares en resonancia; S y M son la superficie y masa de cada barra por unidad de longitud y

$$\frac{S}{M} = \frac{2\pi R_U H}{\pi R_U^2 H d} = \frac{2}{R_U d}$$

A partir de la definición de utilización térmica de la ecuación (9.19), por transposición, el *factor de desventaja* puede expresarse por

$$\frac{\bar{\Phi}_M}{\bar{\Phi}_U} = \frac{V_M \Sigma_{aM}}{V_U \Sigma_{aU}} \left(\frac{1}{f_r} - 1 \right) = \frac{V_M \Sigma_{aM}}{V_U \Sigma_{aU}} \left(\frac{1 - f_r}{f_r} \right) \quad (9.53)$$

y se sustituye en la ecuación (9.51a)

$$\begin{aligned} p(E) &= \exp \left\{ -\frac{V_U N_U}{V_M \xi \Sigma_{sM}} \frac{\bar{\Phi}_U}{\bar{\Phi}_M} \int_E^{E_0} \sigma_{a\,eff} \frac{dE'}{E'} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{V_U N_U}{V_M \xi \Sigma_{sM}} \frac{V_M \Sigma_{aM}}{V_U \Sigma_{aU}} \left(\frac{1 - f_r}{f_r} \right) \int_E^{E_0} \sigma_{a\,eff} \frac{dE'}{E'} \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{N_U}{\xi \Sigma_{sM}} \frac{\Sigma_{aM}}{\Sigma_{aU}} \left(\frac{1 - f_r}{f_r} \right) \int_E^{E_0} \sigma_{a\,eff} \frac{dE'}{E'} \right\} \end{aligned} \quad (9.54)$$

De acuerdo con la *Teoría de Frenado*

$$\frac{\Sigma_{aM}}{\xi \Sigma_{sM}} = \frac{1}{\ln E_1/E_2} \quad (9.55)$$

y

$$\frac{\Sigma_{aU}}{N_U} = \frac{\int_E^{E_0} \sigma_{a\,eff} \frac{dE'}{E'}}{\ln E_1/E_2} \quad (9.56)$$

Por tanto,

$$\frac{N_U}{\xi \Sigma_{sM}} \frac{\Sigma_{aM}}{\Sigma_{aU}} \int_E^{E_0} \sigma_{a\,eff} \frac{dE'}{E'} = 1 \quad (9.57)$$

y

$$p = \exp \left\{ -\frac{f_r}{1 - f_r} \right\} \quad (9.58)$$

Factor de fisión rápida

El factor de fisión rápida, teóricamente, se calcula a partir de la expresión

$$\epsilon = 1 + \frac{\left[(\nu - 1) \frac{\sigma_f}{\sigma} \right] P}{1 - P' \left(\frac{\nu \sigma_f + \sigma_a}{\sigma} \right)} \quad (9.59)$$

donde P es la probabilidad de que un neutrón de fisión producido en la posición r_1 interaccione a una distancia menor a r_2 .

$$P = \frac{\Sigma \int_{r_2} \int_{r_1} \frac{n(r_1) e^{-\Sigma |r_1 - r_2|}}{|r_1 - r_2|^2} dr_1 dr_2}{\int_{r_1} n(r_1) dr_1}$$

$n(r_1)$ es la distribución de neutrones en el combustible, dr_1 y dr_2 son elementos diferenciales de volumen, y P' es la probabilidad de interacción cuando $n(r_1) = cte$.

Se ha encontrado experimentalmente que, para uranio natural metálico, el máximo valor es $\epsilon = 1.2$, mientras que para un reactor heterogéneo moderado con agua es $\epsilon = 1.031$ y moderado con grafito $\epsilon = 1.029$

Referencias

- Beckurts, K. y Wirtz, K. (1964). *Neutron Physics*, Springer Verlan.
- Cohen, E. R. (1970). A Numerical Calculation of the Milne Problem Extrapolation Length. *Nuclear Science and Engineering*, 42(2), 231-232.
- Duderstandt, J. J. (1976). *Nuclear Reactor Analysis*. John Wiley and Sons.
- Graves, H. W. (1979). *Nuclear Fuel Management*. Jhon Wiley and Sons.
- Glasstone, S. y Edlund, M. C. (1952). *The Elements de Nuclear Reactor Theory*. D. Van Nostrand, Co. Inc.
- Hullernuc. (19 de mayo de 2010). *Etapas de la fisión binaria en un modelo de gota líquida* [imagen]. Wikipedia Commons. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stdef2.png>
- International Atomic Energy Agency. (2007). *Nuclear fuel cycle simulation system (VISTA)*. IAEA-TECDOC-1535. https://www-pub.iaea.org/MTCD/Publications/PDF/te_1535_web.pdf
- International Atomic Energy Agency. (2024). *Navegador de isótopos* (5.44.86) [Aplicación móvil]. Google Play. <https://play.google.com/store/apps/details?id=iaea.nds.nuclides&pli=1>
- JWB. (14 de febrero de 2008). *Thermal fission yield* [imagen]. Wikipedia Commons. <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=16479803>
- Kopeikin, V., Mikaelyan, L. y Sinev, V. (2004). Reactor como fuente de antineutrinos: Energía de fisión térmica. *Physics of Atomic Nuclei*, 67(10), 1892-1899. arXiv:hep-ph/0410100. doi:10.1134/1.1811196
- Zweifel, P. F. (1973). *Reactor Physics*. McGraw Hill Kogasha, Ltd.

Problemas

P 1. Ejercicios complementarios

Energía promedio de una distribución de neutrones

Ejercicio 1. Calcule la energía promedio para los neutrones de fisión, si su distribución está dada por la ecuación $n(E) = a e^{-\frac{E}{k_B T}}$, donde: k_B es la constante de Boltzman y T es la temperatura de fisión.

Solución. La energía promedio, como cualquier promedio estadístico, puede calcularse mediante la ecuación (1.19)

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E \cdot \eta(E) dE}{\int_0^{\infty} \eta(E) dE}$$

En ambas integrales hay que sustituir la función de distribución. Para el denominador

$$\int_0^{\infty} \eta(E) dE = a \int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE$$

Que se resuelve usando los cambios de variable: $u = -\frac{E}{k_B T}$; $du = -\frac{dE}{k_B T}$; $dE = -k_B T du$.

Y los límites de integración son $u_i = 0$ y $u_s = -\infty$

Se sustituye

$$\int_0^{\infty} \eta(E) dE = -a k_B T \int_0^{-\infty} e^u du = -a k_B T [e^u]_0^{-\infty} = -a k_B T (e^{-\infty} - e^0) = a k_B T$$

Para la integral del numerador se utilizan los mismos cambios de variable, al sustituir

$$\int_0^{\infty} \eta(E) E dE = a (k_B T)^2 \int_0^{-\infty} u e^u du$$

que se resuelve por partes

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \eta(E) E dE &= a (k_B T)^2 \int_0^{-\infty} u e^u du = a (k_B T)^2 [u e^u - u e^u]_0^{-\infty} \\ &= a (k_B T)^2 \{(0 - 0) - (0 - 1)\} = a (k_B T)^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E \cdot \eta(E) dE}{\int_0^{\infty} \eta(E) dE} = \frac{a (k_B T)^2}{a k_B T} = k_B T$$

Ejercicio 2. De acuerdo con Winberg and Winger el espectro de neutrones de fisión está dado por la ecuación $n(E) \propto \sqrt{E} e^{-0.775E}$, en tal calculo, el cálculo de la integral queda

$$\int_0^{\infty} \eta(E) dE = a \int_0^{\infty} \sqrt{E} e^{-0.775E} dE$$

Y los cambios de variable: $u = 0.775E$; $dE = \frac{du}{0.775}$; $\sqrt{E} = \left(\frac{u}{0.775}\right)^{1/2}$. Los límites de integración son $u_i = 0$ y $u_s = \infty$ y se sustituyen

$$\int_0^{\infty} \eta(E) dE = \frac{a}{(0.775)^{1/2}} \int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du = \frac{a}{(0.775)^{1/2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{(0.775)^{1/2}} \sqrt{\pi}$$

Mientras que la integral

$$\int_0^{\infty} \eta(E) E dE = \frac{a}{(0.775)^{3/2}} \int_0^{\infty} u^{3/2} e^{-u} du = \frac{a}{(0.775)^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{a}{(0.775)^{3/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Sustituyendo

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E \cdot \eta(E) dE}{\int_0^{\infty} \eta(E) dE} = \frac{\frac{a}{(0.775)^{3/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\frac{a}{(0.775)^{1/2}} \sqrt{\pi}} = \frac{1}{2(0.775)} = 0.6452 \text{ MeV}$$

Lo cual concuerda con la literatura.

Dependencia de la sección transversal microscópica de la temperatura

Ejercicio 3. Considerando que las secciones transversales microscópicas son funciones $\frac{1}{v}$, es decir, $\sigma \propto \frac{1}{v}$, demuestre que para una temperatura T, diferente a la temperatura térmica T_{Th} , las secciones microscópicas están dadas por la expresión

$$\sigma_T = \sigma_{Th} \sqrt{\frac{T_{Th}}{T}} \quad (1.23)$$

Solución:

Se parte de la función de distribución de Maxwell

$$n(E) = \frac{2\pi}{(\pi KT)^{3/2}} \cdot e^{-E/kT} \sqrt{E} \quad (1.21)$$

La probabilidad de que los neutrones de una distribución tengan una energía E en una diferencial de energía dE esta dada por

$$P(E) dE = \frac{2\pi}{(\pi KT)^{3/2}} \cdot e^{-E/kT} \sqrt{E} dE$$

En términos de la velocidad, dado que $E = \frac{1}{2}mv^2$, la diferencial $dE = mv dv$ y la probabilidad de encontrar un neutrón con la velocidad v y una diferencial dv están dadas por

$$P(v) dv = \frac{2\pi}{(\pi KT)^{3/2}} \cdot e^{-mv^2/2kT} \left(\frac{1}{2}mv^2\right)^{1/2} mv dv$$

Se utiliza el cambio de variable $w = \frac{mv^2}{2kT}$, $\frac{mv^2}{2} = kT w$, $dw = \frac{m v dv}{kT}$ y $mv dv = kT dw$

$$P(v)dv = \frac{2\pi}{\pi kT (\pi kT)^{1/2}} \cdot e^{-w} (kT)^{1/2} dw = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-w} \sqrt{w} dw$$

Si, de acuerdo con la teoría, las secciones transversales son funciones $\frac{1}{v}$, esto es $\sigma \propto \frac{1}{v}$, lo que implica que $\sigma v = c$ y para dos velocidades

$$\sigma(v)v = \sigma_0 v_0 \quad y \quad \sigma(v) = \frac{\sigma_0 v_0}{v}$$

Ahora bien, la sección transversal promedio estará dada por

$$\bar{\sigma} = \frac{\int_0^\infty \sigma P(v)dv}{\int_0^\infty P(v)dv} = \frac{\sigma_0 v_0 \int_0^\infty P(v) \frac{dv}{v}}{\int_0^\infty P(v)dv}$$

Y se sustituye

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{\sigma_0 v_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-w} \sqrt{w} \frac{dw}{\sqrt{\frac{2kT}{m}} \sqrt{w}}}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-w} \sqrt{w} dw} = \frac{\sigma_0 v_0 \int_0^\infty e^{-w} dw}{\sqrt{\frac{2kT}{m}} \int_0^\infty e^{-w} \sqrt{w} dw} = \sigma_0 v_0 \sqrt{\frac{m}{2kT}} \frac{[-e^{-w}]_0^\infty}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \sigma_0 v_0 \sqrt{\frac{m}{2kT}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

La sección microscópica promedio para la temperatura térmica T_h es

$$\bar{\sigma}_{Th} = \frac{\sigma_0 v_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m}{2k T_{Th}}}$$

Y para una temperatura T cualquiera es

$$\bar{\sigma}_T = \frac{\sigma_0 v_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m}{2kT}}$$

Luego se dividen ambas

$$\frac{\bar{\sigma}_{Th}}{\bar{\sigma}_T} = \frac{\frac{\sigma_0 v_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m}{2kT_{Th}}}}{\frac{\sigma_0 v_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m}{2kT}}} = \sqrt{\frac{T}{T_{Th}}}$$

De donde

$$\bar{\sigma}_T = \bar{\sigma}_{Th} \sqrt{\frac{T_{Th}}{T}}$$

Excursión de criticidad en Oklo

Ejercicio 4. Actualmente el enriquecimiento del uranio natural es $\epsilon_{nat} = 0.00711$. En Oklo, provincia de Gabón, la presencia de fragmentos de fisión en un yacimiento de uranio puso en evidencia que en ese lugar hubo una excursión natural de criticidad.

- Asuma que en aquel momento el enriquecimiento del uranio era $\epsilon = 3\%$, y calcule el tiempo que ha transcurrido desde entonces.
- Haga el cálculo inverso, suponiendo que esa excursión ocurrió cuando se formó la hidrósfera, o sea hace al rededor de 1800 millones de años, use la ley de decaimiento para calcular cual debía ser el enriquecimiento en ese momento.
- ¿Como podría usar este razonamiento para calcular la edad de la Tierra?

Solución:

De acuerdo con la definición [ecuación (1.31)] el enriquecimiento actual del uranio natural puede escribirse

$$\epsilon = \frac{w_{U^5}}{w_U} = \frac{w^5}{w^5 + w^8} \quad (1)$$

Y el enriquecimiento en tiempo de la excursión es

$$\epsilon_0 = \frac{w_0^5}{w_0^5 + w_0^8} \quad (2)$$

donde los superíndices 5 y 8 indican el último dígito de la masa isotópica, de tal forma que 5 corresponde al U^{235} y 8 al U^{238} .

De acuerdo con la ley de decaimiento radiactivo, en el momento de la excursión las densidades atómicas del U^{235} y del U^{238} eran, respectivamente,

$$N_0^5 = N^5 e^{\lambda^5 t} \quad y \quad N_0^8 = N^8 e^{\lambda^8 t} \quad (3)$$

y dado que

$$w_0^5 = \frac{N_0^5 A^5}{N_A} \quad y \quad w_0^8 = \frac{N_0^8 A^8}{N_A} \quad (4)$$

Se sustituye la ecuación (4) en la ecuación (2)

$$\epsilon_0 = \frac{\frac{N_0^5 A^5}{N_A}}{\frac{N_0^5 A^5}{N_A} + \frac{N_0^8 A^8}{N_A}} \quad (5)$$

donde se divide entre $\frac{N_0^5 A^5}{N_A}$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{1 + \frac{\frac{N_0^8 A^8}{N_A}}{\frac{N_0^5 A^5}{N_A}}} = \frac{1}{1 + \frac{N_0^8 A^8}{N_0^5 A^5}} \quad (5a)$$

y se sustituye la ecuación (3)

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{1 + \frac{N_0^8 A^8}{N_0^5 A^5}} = \frac{1}{1 + \frac{A^8 N^8 e^{\lambda^8 t}}{A^5 N^5 e^{\lambda^5 t}}} \quad (6)$$

De forma similar, se sustituye $w^5 = \frac{N^5 A^5}{N_A}$ en ε (ecuación (1))

$$\varepsilon = \frac{\frac{N^5 A^5}{N_A}}{\frac{N^5 A^5}{N_A} + \frac{N^8 A^8}{N_A}} = \frac{1}{1 + \frac{N^8 A^8}{N^5 A^5}} \quad (7)$$

de donde

$$\varepsilon \left(1 + \frac{N^8 A^8}{N^5 A^5} \right) = 1 \quad (8)$$

y

$$\frac{N^8 A^8}{N^5 A^5} = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \quad (9)$$

Después, se sustituye la ecuación (9) en la (6)

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{1 + \left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right) \frac{e^{\lambda^8 t}}{e^{\lambda^5 t}}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right) e^{(\lambda^8 - \lambda^5)t}} \quad (10)$$

y se despeja t

$$\varepsilon_0 \left(1 + \left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right) e^{(\lambda^8 - \lambda^5)t} \right) = 1 \quad (11)$$

$$e^{(\lambda^8 - \lambda^5)t} = \frac{\frac{1}{\varepsilon_0} - 1}{\left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right)} = \frac{\varepsilon (1 - \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 (1 - \varepsilon)} \quad (12)$$

$$t = \frac{1}{(\lambda^8 - \lambda^5)} \ln \frac{\varepsilon (1 - \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 (1 - \varepsilon)} \quad (13)$$

donde ε_0 y t quedan uno en función de la otro. Es decir, para conocer uno se tiene que asumir el otro.

Si las vidas medias de ambos isotopos son $T_{1/2}^5 = 713 \text{ Ma}$ y $T_{1/2}^8 = 4510 \text{ Ma}$, las constantes de decaimiento son

$$\lambda^5 = \frac{\ln 2}{713 \text{ Ma}} = 9.72156 \times 10^{-4} \text{ Ma}^{-1} \quad \text{y} \quad \lambda^8 = \frac{\ln 2}{4510 \text{ Ma}} = 1.53691 \times 10^{-4} \text{ Ma}^{-1}$$

- a) Si se asume que para inducir criticidad se requiere un enriquecimiento del orden 3 %, esto es $\varepsilon_0 = 0.03$; sustituyendo

$$t = \frac{1}{(1.53691 \times 10^{-4} - 9.72156 \times 10^{-4}) \text{ Ma}^{-1}} \ln \frac{0.00711 (1 - 0.03)}{0.03 (1 - 0.00711)} = 1787 \text{ Ma}$$

- b) También se asume que la excusión pudo ocurrir hace 1800 millones de años, es decir, cuando se formó la hidrósfera

Se utiliza la ecuación (10)

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{1 + \left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}\right) e^{(\lambda^8 - \lambda^5)t}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1 - 0.0711}{0.0711}\right) e^{(1.53691 \times 10^{-4} - 9.72156 \times 10^{-4})1800}}$$

$$= 0.03225 \Rightarrow 3.225 \%$$

Conclusión: ambos incisos son coherentes con la hipótesis.

- c) Repita el cálculo suponiendo que en el momento de la excusión el enriquecimiento era $\varepsilon_0 = 0.05$.

La respuesta probable es 2437.1 Ma.

Ejercicio de repaso conceptual: relación absorciones por fisión

Ejercicio 5. De acuerdo con la ecuación (1.8) las reacciones de captura y fisión son eventos mutuamente excluyentes $\sigma_a = \sigma_c + \sigma_f$ y solo la fracción $\frac{\sigma_f}{\sigma_a}$ puede inducir fisión, mientras que la relación $\alpha = \frac{\sigma_c}{\sigma_f}$ representa la relación entre capturas y fisiones.

1. Demuestre que $(1 + \alpha)$ corresponde con el número de neutrones absorbidos

Procedimiento a:

De acuerdo con la ecuación (1.27), el número de neutrones producidos por fisión por neutrón absorbido en un cierto isótopo fisil es

$$\eta = v \frac{\sigma_f}{\sigma_a} \quad (1.27)$$

Dado que $\sigma_a = \sigma_c + \sigma_f$, la ecuación se puede desarrollar como

$$\eta = v \frac{\sigma_f}{\sigma_c + \sigma_f}$$

Y se divide entre σ_f

$$\eta = v \frac{\frac{\sigma_f}{\sigma_f}}{\frac{\sigma_c}{\sigma_f} + \frac{\sigma_f}{\sigma_f}} = v \frac{1}{\alpha + 1}$$

De donde se despeja

$$\alpha + 1 = \frac{v \left(\frac{n's}{fisión} \right)}{\eta \left(\frac{n's}{absorsión} \right)}$$

Y dimensionalmente se concluye que equivale al número de absorciones por fisión.

Procedimiento b:

De acuerdo con la definición de α

$$1 + \alpha = 1 + \frac{\sigma_c}{\sigma_f}$$

Se desarrolla y usa la ecuación (1.8)

$$1 + \alpha = \frac{\sigma_f}{\sigma_f} + \frac{\sigma_c}{\sigma_f} = \frac{\sigma_f + \sigma_c}{\sigma_f} = \frac{\sigma_a}{\sigma_f}$$

Que es la relación entre número de absorciones por fisión.

2. Demostrar que una absorción equivale a

$$1_{abs} = \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right) \frac{capturas}{absorción} + \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right) \frac{fisiones}{absorción}$$

Para eso hay que demostrar que cada término corresponde con las dimensiones

$$\left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right) \frac{capturas}{absorción} = ?$$

Se desarrollan

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{\frac{\sigma_c}{\sigma_f}}{1 + \frac{\sigma_c}{\sigma_f}} = \frac{\frac{\sigma_c}{\sigma_f}}{\frac{\sigma_f + \sigma_c}{\sigma_f}} = \frac{\sigma_c}{\sigma_f + \sigma_c} \left(\frac{capturas}{absorciones} \right)$$

Por otra parte

$$\frac{1}{1 + \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_c}{\sigma_f}} = \frac{1}{\frac{\sigma_f + \sigma_c}{\sigma_f}} = \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_c} \left(\frac{fisiones}{absorciones} \right)$$

Por tanto, al sumarlos

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_f + \sigma_c} \left(\frac{capturas}{absorciones} \right) + \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_c} \left(\frac{fisiones}{absorciones} \right) = \frac{\sigma_f + \sigma_c}{\sigma_f + \sigma_c} = 1$$

Diferencial de ángulo solido en coordenadas esféricas

Ejercicio 5. Demuestre que un elemento diferencial de volumen d^3u alrededor $\vec{u}$ está dado por $d^3u = u^2 du d\hat{\Omega}$.

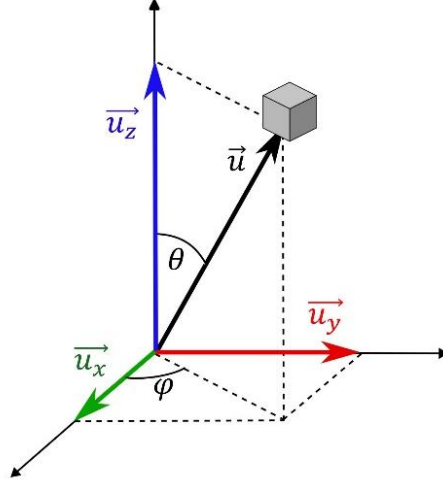
Solución:

Se trata de un cambio de coordenadas rectangulares o cartesianas a coordenadas esféricas. Una integral de la forma $\int F(u) d^3u$ se puede expresar en coordenadas cartesianas como

$$\int F(u) d^3u = \int F(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z$$

Donde, de acuerdo con la figura P1.1, $u_x = u \cos \varphi$, $u_y = u \sin \varphi$ y $u_z = u \cos \theta$ siendo u , θ y φ son las coordenadas esféricas: u es la magnitud del vector posición, θ es el ángulo cenital y φ es el ángulo azimutal.

Figura P1.1. Sistema de coordenadas cartesianas y esféricas



Fuente: elaboración propia.

Para cambiar de coordenadas rectangulares (u_x, u_y, u_z) a coordenadas esféricas u, θ, φ se tiene que usar el teorema

$$\int F(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z = \int F(u, \theta, \varphi) \frac{\partial(u_x, u_y, u_z)}{\partial(u, \theta, \varphi)} du d\theta d\varphi$$

donde

$$\frac{\partial(u_x, u_y, u_z)}{\partial(u, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial u} & \frac{\partial u_x}{\partial \theta} & \frac{\partial u_x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u_y}{\partial u} & \frac{\partial u_y}{\partial \theta} & \frac{\partial u_y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u_z}{\partial u} & \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

es el jacobiano de la conversión de coordenadas rectangulares a esféricas.

Se efectúan las derivadas, sustituyen en el jacobiano y resuelven el determinante

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_x, u_y, u_z)}{\partial(u, \theta, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -u \sin \theta \cos \varphi & -u \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & u \sin \theta \sin \varphi & u \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta & u \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= u^2 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi + u^2 \sin \theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + u^2 \sin^3 \theta \sin^2 \varphi + u^2 \sin \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi = \\ &= u^2 \sin \theta \cos^2 \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + u^2 \sin \theta \sin^2 \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \\ &= u^2 \sin \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = u^2 \sin \theta \end{aligned}$$

Se sustituyen en el teorema

$$d^3u = du_x du_y du_z = \frac{\partial(u_x, u_y, u_z)}{\partial(u, \theta, \varphi)} du d\theta d\varphi = u^2 du \operatorname{sen} \theta d\theta d\varphi$$

Donde, asociando los componentes relacionados con la magnitud, y separándolos de los componentes relacionados con la dirección resulta

$$d^3u = u^2 du d\widehat{\Omega}$$

Siendo

$$d\widehat{\Omega} = \operatorname{sen} \theta d\theta d\varphi$$

Integral de ángulo sólido

Ejercicio 6. Demuestre que $\int d\widehat{\Omega} = 4\pi$

Solución:

Al utilizar la definición de $d\widehat{\Omega}$, resultado del ejercicio 1

$$\begin{aligned} \int d\widehat{\Omega} &= \iint \operatorname{sen} \theta d\theta d\varphi = \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = [\cos \theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = \\ &= [\cos \pi - \cos 0][2\pi - 0] = 4\pi \end{aligned}$$

P 2. Ordenes de magnitud de un reactor nuclear PWR DE 1000 MWe

Para calcular los requerimientos de combustible de un reactor de potencia, lo más fácil es establecer la potencia correspondiente al reactor que se pretende construir y enseguida calcular la razón de fisión o número de fisiones por unidad de tiempo que se requiere para sostener dicha potencia. Deben tomarse en cuenta las características del combustible y el volumen del reactor.

Razón de fisión

Asumiendo que la energía de fisión es del orden de 200 MeV de energía, en joule esta energía equivale a

$$E_{fisión} = 200 \text{ MeV} \left(\frac{10^6 \text{ eV}}{1 \text{ MeV}} \right) \left(\frac{1.602 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right) = 3.204 \times 10^{-11} \text{ J/fisión} \quad (2.1)$$

Esta energía resulta de la conversión de una fracción de la masa del isótopo fisil en energía cinética de los fragmentos de la fisión.

En el interior de las pastillas del combustible y de las barras de combustible la energía cinética de los fragmentos se transforma en calor, por choques con los átomos vecinos.

Para enfriar las barras de combustible se requiere un refrigerante –un fluido que por convección elimina el calor de la superficie de las barras de combustible y traslada la energía hacia la turbina– para convertir la energía mecánica en energía eléctrica.

La eficiencia térmica de un reactor nuclear es $\eta = 33 \%$. Esto implica que solo un tercio de la energía térmica producida en un reactor nuclear puede ser convertido a energía eléctrica. Por lo tanto, para que un reactor tenga una potencia eléctrica de 1000 MWe o $1 \times 10^9 \frac{\text{J}}{\text{s}}$ es necesario que se produzca en el reactor una potencia térmica de 3000 MWth o $3 \times 10^9 \frac{\text{J}}{\text{s}}$. Esto es

$$1000 \text{ MWe} = \frac{1}{3} P$$

o bien

$$P = 3000 \text{ MW} = 3 \times 10^9 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

donde $P_{Th} = \text{potencia térmica}$.

La razón total de reacciones de fisiones en un reactor R_T^f , de acuerdo con la ecuación (1.15), se define como el número de fisiones producidas por unidad de tiempo. Esta puede calcularse como la relación entre la potencia térmica y la energía de fisión

$$R_T^f = \frac{P}{E_{fisión}} = \frac{3 \times 10^9 \frac{\text{J}}{\text{s}}}{3.204 \times 10^{-11} \frac{\text{J}}{\text{fisión}}} = 0.9363 \times 10^{20} \frac{\text{fisiones}}{\text{s}}$$

Quemado de combustible

Es la cantidad de material fisil que se consume durante la operación de un reactor nuclear. Cada fisión implica un átomo de U^{235} consumido o fisionado, por lo tanto, la razón total de reacciones de fisión equivale a la razón de átomos consumidos

$$R_T^f = \text{Número de átomos de } U^{235} \text{ consumidos}$$

Puede verificarse mediante análisis dimensional, que el número de átomos contenido en cualquier muestra de peso w , se puede calcular mediante la expresión

$$N_{(\text{átomos})} = \frac{w N_A}{A} \quad (1.9a)$$

donde $A = \text{peso atómico}$ y $N_A = \text{Número de Avogadro} = 6.022 \times 10^{23} \frac{\text{átomos}}{\text{átomo-g}}$.

Por tanto, el peso del uranio consumido o **quemado de combustible B** (del inglés *burning*) se puede calcular al conocer el número de fisiones o átomos fisionados, y calcular el peso correspondiente al número de átomos en de material fisil. De expresión anterior

$$B \left(\frac{g}{s} \right) = w = \frac{N \cdot A}{N_A} \left(\frac{\frac{\text{átomos}}{s} \cdot \frac{g}{\text{mol}}}{\frac{\text{átomos}}{\text{mol}}} \right) \quad (B1)$$

Dado que la razón de fisiones es igual a la razón de átomos consumidos $N = R_T^f$, se sustituye

$$B = \frac{\left(0.9363 \times 10^{20} \frac{\text{átomos}}{s} \right) \left(235 \frac{g}{\text{mol}} \right)}{6.022 \times 10^{23} \frac{\text{átomos}}{\text{mol}}}$$
$$B = 0.0365 \frac{g}{s}$$

Esta cantidad en términos de masa parece insignificante, y es justamente lo que refleja el rendimiento de un reactor nuclear. Implica que un reactor de 1000 MWe al 100 % de potencia consume tan solo 0.0365 g/s. O bien

$$0.0365 \frac{g}{s} \left(\frac{3600s}{h} \right) \left(\frac{24h}{1 \text{ día}} \right) \left(\frac{365 \text{ días}}{1 \text{ año}} \right) =$$
$$B = 1.15 \text{ T de } U^{235} / \text{año}$$

Consumo doméstico de electricidad

La energía generada por una central eléctrica con un reactor de una potencia eléctrica de 1000MWe es

$$1000MWe = 10^9 \frac{J}{s} \left(\frac{3600s}{1h} \right) \left(\frac{24h}{1 \text{ día}} \right) \left(\frac{30 \text{ días}}{1 \text{ mes}} \right) = 2.592 \times 10^{15} \frac{J}{\text{mes}}$$

Si se asume un consumo doméstico mensual aproximado de $250 \frac{KWh}{mes}$, la energía equivalente consumida es

$$250 \frac{KWh}{mes} = 250 \times 10^3 \frac{J}{s} \frac{h}{mes} \left(\frac{3600s}{h} \right) = 9 \times 10^8 \frac{J}{mes}$$

Al dividir la energía generada por una central nuclear entre el consumo doméstico, fácilmente se puede concluir que una central puede proveer de electricidad a 2.88 millones de casas-habitación

$$\frac{2.592 \times 10^{15} \frac{J}{mes}}{9 \times 10^8 \frac{J}{mes \cdot casa}} = 2.88 \times 10^6 casas$$

Evidentemente el destino de la producción eléctrica no es solamente casas habitación. Faltaría considerar el alumbrado, transporte, servicios, industria, etc., pero este cálculo permite hacer énfasis sobre el potencial de la energía nuclear.

Masa de uranio en un reactor de potencia

El combustible en un reactor se encuentra en forma cerámica, para minimizar la dilatación térmica y esfuerzos mecánicos. La molécula que cumple esas características es UO_2 . El volumen del combustible equivale a la mitad del volumen del reactor.

Para un reactor de potencia típico de 1000 MWe con dimensiones: altura $H = 3m$ y radio $R = 1.46m$, el volumen del reactor es

$$V_R = \pi(1.46m)^2(3) = 20.09 m^3$$

El volumen del combustible es del orden de la mitad del volumen del reactor, por tanto

$$V_F = \frac{1}{2} V_R = 10 m^3 de UO_2$$

La densidad del dióxido uranio es aproximadamente

$$\rho_{UO_2} = 10 \frac{g}{cm^3}$$

La masa total del dióxido de uranio en el reactor es

$$m_{UO_2} = \rho_F \cdot V_F = \left(10 \frac{g}{cm^3} \right) (10m^3) \left(\frac{10^6 cm^3}{1 m^3} \right) = 10^8 g = 100 T de UO_2$$

La figura 12 muestra la composición de un ensamble de combustible, como se observa, cada ensamble está constituido por un número de barras igual a 289 (17x17 barras), que a su vez contiene del orden de 200 pastillas de UO_2 .

Si cada barra de combustible tiene 0.9 cm de diámetro y la longitud de cada barra es del orden de 270 cm, entonces el volumen de una barra es

$$V_{barra} = \frac{\pi d^2}{4} h = \frac{\pi}{4} (0.9cm)^2 (270cm) = 171.77cm^3$$

Por lo tanto, el número de barras será

$$N_{barras}^{\circ} = \frac{V_F}{V_{barra}} = \frac{10m^3}{171.77 cm^3} \left(\frac{10^6 cm^3}{1m^3} \right) = 58\,218 \text{ barras}$$

y el número de ensambles

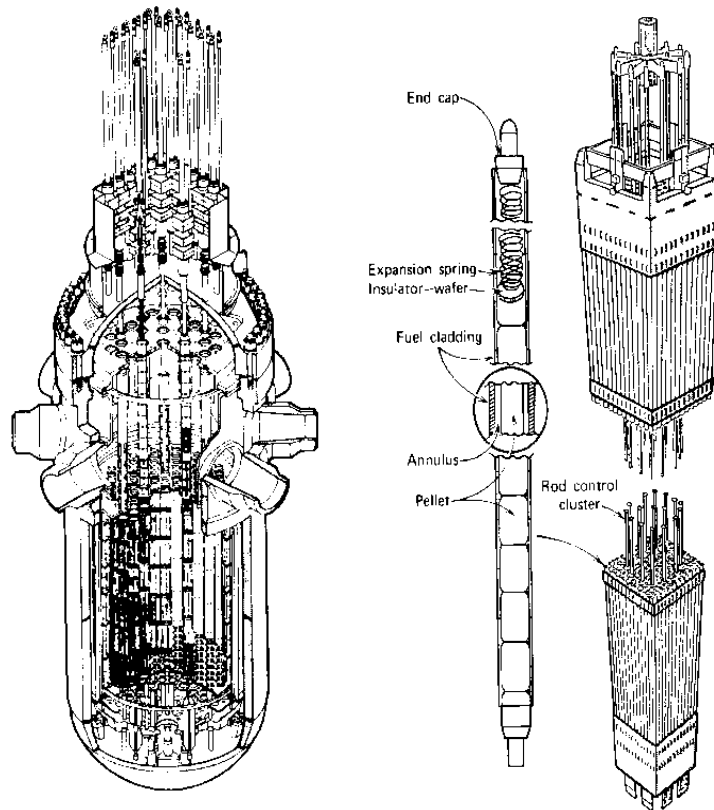
$$N_{ensambles}^{\circ} = \frac{58218 \text{ barras}}{289 \frac{\text{barras}}{\text{ensamble}}} \cong 202 \text{ ensambles}$$

Si se considera que cada pastilla de uranio es un cilindro de 1 centímetro de altura, el número de pastillas de combustible es

$$N_{o \text{ pastillas}} = (58\,218 \text{ barras}) \left(106 \frac{\text{pastillas}}{\text{barra}} \right) \cong 6\,188\,528 \text{ pastillas}$$

Si la masa de uranio en un reactor nuclear de 1000 MWe es $w_{UO_2} = 100 \text{ T}$

Figura P 2.1. Reactor nuclear PWR y composición de una barra de combustible y un ensamble de combustible



Fuente: Duderstandt (1976, p. 127).

En un reactor que contiene 100 t de UO_2 con un enriquecimiento $\varepsilon = 4\%$, la masa de dióxido de uranio que contiene U^{25} es

$$w_{U^{25}O_2} = \varepsilon w_{UO_2} = 0.04 * 100 \text{ t} = 4 \text{ t}$$

La fracción de U^{235} en el dióxido de uranio ($U^{25}O_2$) es

$$x^{25} = \frac{w_{U^{25}}}{w_{U^{25}O_2}} = \frac{\frac{N^{25}A^{25}}{N_A}}{\frac{N^{U^{25}O_2}A^{U^{25}O_2}}{N_A}} = \frac{A^{25}}{A^{U^{25}O_2}} = \frac{235}{267} = 0.88$$

La masa de U^{235} en el reactor es

$$w_{U^{25}} = x^{25} w_{U^{25}O_2} = 0.88 * 4 \text{ t} = 3.52 \text{ t}$$

Si el quemado por año es $B = 1.15 \text{ T de } U^{235} / \text{año}$ esto da cuenta que no todo el U^{235} se consume. Sin embargo, hay que recargar los reactores con combustible nuevo porque en los ensambles gastados los fragmentos de fisión absorben muchos neutrones y reducen la razón de reacciones de fisión.

Potencia volumétrica

La potencia volumétrica del combustible se calcula de la siguiente manera:

$$P_V = \frac{P_{Th}}{V_F} = \frac{3000 \text{ MW}}{10 \text{ m}^3 \left(\frac{1 \text{ cm}}{10^{-2} \text{ m}} \right)^3} = 300 \frac{\text{W}}{\text{cm}^3}$$

Esto quiere decir que cada pastilla de combustible, de aproximadamente 1 cm^3 , produce una potencia de 300 W.

Potencia específica

Se define como la relación entre la potencia térmica y la masa de combustible. En el caso de un reactor hipotético del 1000 MWe o 3000 MWt, dado que la masa de combustible es del orden de 100 t de uranio, la relación que se obtiene es de 30 kW/kg.

En la tabla P 2.1 se presentan las características macroscópicas de los reactores de potencia comerciales. Se observa que la potencia específica típica de un reactor PWR es 37 kW/kg, esto es de un orden de magnitud similar al calculado anteriormente.

Tabla P 2.1. *Características físicas de los reactores de potencia comerciales*

Tipo de reactor	Potencia específica (kW/kg)	Flujo $\left(\frac{n}{cm^2s}\right)$	ε
PWR	37.5	2.99×10^{14}	4
BWR	25.9	1.997×10^{14}	4
PHWR	18.8	1.85×10^{14}	0.71
RBMK	15.75	1.48×10^{14}	1.8
AGR	10.9	8.75×10^{14}	2.6
GCR	3.32	2.66×10^{14}	0.71
WWER	45.8	3.747×10^{14}	5.36

Fuente: International Atomic Energy Agency (2007).

Como se vio en § 2.2, la razón de fisión equivale al número de átomos de U^{235} consumidos o fisionados por unidad de volumen por unidad de tiempo. Se puede entonces determinar el flujo de neutrones de un reactor de 1000 MWe utilizando la ecuación (1.15). Para ello, primero es necesario conocer la sección transversal macroscópica de fisión del reactor Σ_f .

Sección transversal macroscópica de fisión

La sección transversal macroscópica de fisión Σ_f representa la probabilidad por unidad de longitud en la que los neutrones induzcan fisiones. De acuerdo con la ecuación (1.17)

$$\Sigma_f (cm^{-1}) = N \left(\frac{\text{átomos } U^{235}}{cm^3} \right) \sigma_f \left(\frac{cm^2}{\text{átomos } U^{235}} \right)$$

El problema fundamental para conocer la Σ_f es que las secciones transversales microscópicas dependen de la energía de los neutrones y de la temperatura del reactor.

Las secciones transversales microscópicas de los neutrones térmicos se pueden consultar en múltiples fuentes, entre otros en IAEA Nuclear data. Para extrapolar a otra temperatura, por ejemplo, la temperatura de operación de un reactor nuclear ($300^\circ C = 573K$), se debe utilizar la ecuación (2.4) [consultar demostración en § P1.4]

$$\sigma_T = \sigma_{Th} \sqrt{\frac{T_{Th}}{T}}$$

La sección transversal microscópica de fisión para el U^{235} es $\sigma_{f(Th)} = 500b$. Por tanto, a la temperatura de operación de un reactor nuclear ($300^\circ C = 573 K$)

$$\sigma_{fT} = \sigma_{fTh} \sqrt{\frac{T_{Th}}{T}} = 500b \sqrt{\frac{293K}{573K}} = 393.3 b$$

Con los datos anteriores

$$N_{U^{235}} = \frac{w_{U^{235}}}{V_F} \frac{N_A}{A^{235}} = \frac{3.52 \text{ t} \left(\frac{10^6 \text{ g}}{\text{t}} \right)}{20 \text{ m}^3 \left(\frac{10^6 \text{ cm}^3}{\text{m}^3} \right)} \frac{6.023 \times 10^{23} \left(\frac{\text{átomos de } U^{235}}{\text{at} - \text{g}} \right)}{235 \left(\frac{\text{g}}{\text{at} - \text{g}} \right)}$$

$$= 4.5108 \frac{\text{átomos de } U^{235}}{\text{cm}^3}$$

$$\Sigma_f = N_{U^{235}} \sigma_f^{25} = 4.5108 \times 10^{20} \left(\frac{\text{átomos de } U^{235}}{\text{cm}^3} \right) * 393.3 \times 10^{-24} (\text{cm}^2) = 0.1774 (\text{cm}^{-1})$$

Flujo de neutrones promedio

Dado que la razón de reacciones total de fisiones en el reactor es

$$R_f = 0.9363 \times 10^{20} \left(\frac{\text{fisiones}}{\text{s}} \right)$$

el número de fisiones por unidad de volumen es

$$R_f = \frac{R_T^f}{V_R} \left(\frac{\text{fisiones}}{\text{cm}^3 \text{ s}} \right)$$

Y de la definición de razón de reacción

$$R_i \left(\frac{\text{reac}}{\text{cm}^3 \text{ s}} \right) = \phi \left(\frac{\text{neutrones}}{\text{cm}^2 \text{ s}} \right) \Sigma_i (\text{cm}^{-1}) \quad \text{ec (1.14)}$$

Por tanto, considerando que cada fisión produce ν nuevos neutrones, la densidad de neutrones o número total de neutrones generados por unidad de volumen y unidad de tiempo es

$$n \left(\frac{n' \text{ s}}{\text{cm}^3 \text{ s}} \right) = \nu \left(\frac{n' \text{ s}}{\text{fis}} \right) R_f \left(\frac{\text{fis}}{\text{cm}^3 \text{ s}} \right)$$

Luego, el flujo puede calcularse mediante

$$\phi_f \left(\frac{n}{\text{cm}^2 \text{ s}} \right) = \frac{n \left(\frac{n' \text{ s}}{\text{cm}^3 \cdot \text{s}} \right)}{\Sigma_f (\text{cm}^{-1})} = \frac{\nu \left(\frac{n' \text{ s}}{\text{fis}} \right) R_f \left(\frac{\text{fis}}{\text{s}} \right)}{N_{U^{235}} \sigma_f^{25} (\text{cm}^{-1}) V_R (\text{cm}^3)}$$

$$\phi_f \left(\frac{n}{\text{cm}^2 \text{ s}} \right) = \frac{n \left(\frac{n' \text{ s}}{\text{cm}^3 \cdot \text{s}} \right)}{\Sigma_f (\text{cm}^{-1}) V_R (\text{cm}^3)} =$$

$$= \frac{\left(2.41 \frac{\text{neutrones}}{\text{fisión}} \right) \left(0.9363 \times 10^{20} \frac{\text{fisiones}}{\text{s}} \right)}{4.5108 \times 10^{20} \left(\frac{\text{átomos de } U^{235}}{\text{cm}^3} \right) * 393.3 \times 10^{-24} (\text{cm}^2) * 20 \times 10^6 \text{ cm}^3}$$

$$= 6.35 \times 10^{13} \frac{\text{neutrones}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}$$

Pero hay que tomar en cuenta que este es tan solo el flujo que produce las reacciones de fisión. Puede demostrarse que las fisiones representan menos de la mitad del número de absorciones totales

en el reactor. Luego, si se considera que las fisiones representan tan solo la mitad de las reacciones de absorción, el flujo promedio en el reactor sería

$$\phi = 1.27 \times 10^{14} \left(\frac{n}{cm^2 s} \right)$$

Para efectos de comparación, en la tabla 2.1 se presenta el orden de magnitud del flujo total de los reactores comerciales. Evidentemente el flujo total es mayor que el flujo que induce las fisiones, puesto que una cantidad importante de neutrones son capturados por materiales estructurales que no fueron considerados en este ejercicio.

Densidad molecular del dióxido de uranio

La densidad molecular del UO_2 se puede calcular por análisis dimensional mediante la expresión

$$N_{UO_2} = \frac{\rho_{UO_2} \cdot N_A}{A_{UO_2}} \quad (2.5)$$

donde ρ_{UO_2} es la densidad, N_A es el número de Avogadro y A_{UO_2} es el peso molecular. Así pues para el UO_2 puro

$$N_{UO_2} = \frac{\rho_{UO_2} \cdot N_A}{A_{UO_2}} = \frac{\left(10 \frac{g}{cm^3} \right) \left(6.022 \times 10^{23} \frac{moléculas}{mol \cdot g} \right)}{270 \frac{g}{mol \cdot g}}$$

$$N_{UO_2} = 2.23 \times 10^{22} \frac{moléculas de UO_2}{cm^3}$$

Como se mencionó anteriormente, en un reactor nuclear el volumen del combustible es aproximadamente la mitad del volumen del reactor e igual al volumen del moderador

$$V_F = \frac{1}{2} V_R = V_{H_2O}$$

$$\therefore N_{UO_2} = N_{U_{reactor}} = \frac{1}{2} N_{UO_2 \text{ puro}}$$

$$N_{UO_2} = 1.115 \times 10^{22}$$

Luego

$$N_{U^{235}} = (1.115 \times 10^{22})(\epsilon) = (1.115 \times 10^{22})(0.042) = 5.683 \times 10^{20} \frac{átomos de U^{235}}{cm^3}$$

$$N_{U^{238}} = (1.115 \times 10^{22})(1 - \epsilon) = (1.115 \times 10^{22})(0.958) = 1.095 \times 10^{22} \frac{átomos de U^{238}}{cm^3}$$

$$N_{H_2O} = \left(\frac{1}{2} \right) \frac{\rho_{H_2O} \cdot N_A}{A_{H_2O}} = \left(\frac{1}{2} \right) \frac{\left(1 \frac{g}{cm^3} \right) \left(6.022 \times 10^{23} \frac{moléculas}{mol \cdot g} \right)}{18 \frac{g}{mol \cdot g}} = 1.673 \times 10^{22} \frac{moléculas}{cm^3}$$

Gasto másico y volumétrico del refrigerante

El calor generado en las barras de combustible debe ser continuamente eliminado a través de un fluido de trabajo. Para los reactores nucleares PWR y BWR el fluido de trabajo es agua ordinaria. El mecanismo de transferencia de energía de las barras al refrigerante es por convección, por lo cual se utiliza la ley de Fourier

$$Q = m c_p \Delta T \quad (B.2)$$

Suponiendo que ΔT –o diferencia entre la temperatura de las barras y la temperatura del refrigerante en la salida del reactor– no puede exceder los 100° C el gasto másico de refrigerante es

$$m = \frac{Q}{c_p \Delta T}$$

$$Q = P_{Th} = 3\,000\,MW_{Th} = 3 \times 10^9 \frac{J}{s}$$

$$c_p = 5.184 \frac{J}{g\,^{\circ}C}$$

$$m = \frac{3 \times 10^9 \frac{J}{s}}{\left(5.184 \frac{J}{g\,^{\circ}C}\right) (100^{\circ}C)} = \left(7.177 \times 10^6 \frac{g}{s}\right) \left(\frac{1\,T}{1 \times 10^6\,g}\right) = 7.177 \frac{T}{s}$$

Y el gasto volumétrico es

$$G = \frac{m}{\rho} = \frac{7.177 \times 10^6 \frac{g}{s}}{1 \frac{g}{cm^3}} = 7.177 \frac{m^3}{s}$$

Esto da cuenta de la cantidad de refrigerante que hay que utilizar para el funcionamiento de una planta nuclear.

P 3. Ordenes de magnitud de un reactor nuclear de $Th^{232} - U^{233}$ de 1200 MWe

Análisis de los parámetros nucleares de un reactor reproductor $Th^{232} - U^{233}$

Considere un reactor de alta temperatura que utiliza U^{233} como material fisil y Th^{232} como material fértil. Este reactor es moderado con grafito y refrigerado con helio, su potencia eléctrica es de 1200 MW y su rendimiento puede ser considerado en 40 %. El reactor trabaja 280 días por año. El combustible es una mezcla de dióxido de uranio 233 (UO_2) y dióxido de torio 232 (ThO_2). La mitad del combustible se recarga cada 18 meses. En cada recarga se introduce en el reactor 0.8 t de UO_2 y 16 t de ThO_2 . Se asume que este combustible aporta la mitad de la energía total producida en el núcleo del reactor durante el periodo que permanece en el reactor. Cuando se recarga el combustible se constata que se produce 0.3 t de U^{233} a partir del Th y quedan 0.2 t de U^{233} .

$$\text{Datos: } \sigma_f U^{233} = 525 \text{ b}, \sigma_c = 50 \text{ b}, \nu = 2.5, E_f = 200 \frac{\text{MeV}}{\text{fisión}}, \sigma_f Th^{232} = 5.2 \times 10^{-5} \text{ b}$$

a) ¿Se puede hablar de enriquecimiento en un reactor de $Th^{232} - U^{233}$?

Si se alimentan 0.8 t de UO_2 y 16 t de ThO_2 , la proporción de material fisil en el combustible es equivalente al enriquecimiento. Por tanto, puede considerarse que el enriquecimiento es

$$\epsilon = \frac{0.8 \text{ t}}{16 \text{ t}} = 0.05 \Rightarrow 5\%$$

b) Calcule en MW-d la energía producida por un gramo de U^{233} consumido en el reactor.

La energía liberada por 1 g de U^{233} puede ser calculada al multiplicar el número de átomos en un gramo por la energía de fisión de cada átomo

$$E(1 \text{ g}) = N \left(\frac{\text{atomos}}{\text{g}} \right) E_f$$

Donde N puede obtenerse a partir de la formula $N = \frac{w(g) N_A \left(\frac{\text{atomos}}{\text{at g}} \right)}{A \left(\frac{\text{g}}{\text{at g}} \right)}$, se sustituye

$$N = \frac{1(g) 6.023 \times 10^{23} \left(\frac{\text{atomos}}{\text{at g}} \right)}{233 \left(\frac{\text{g}}{\text{at g}} \right)} = 2.5849 \times 10^{21} \text{ atomos}$$

Luego

$$\begin{aligned} E(1 \text{ g}) &= N(\text{atomos}) E_f = (2.5849 \times 10^{21} \text{ fisiones}) \left(200 \frac{\text{MeV}}{\text{fisión}} \right) \left(1.602 \times 10^{-13} \frac{\text{J}}{\text{MeV}} \right) \\ &= 8.2822 \times 10^{10} \frac{\text{J}}{\text{g}} \left(\frac{\text{s}}{\text{s}} \right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) \left(\frac{1 \text{ MW}}{10^6 \text{ W}} \right) = 23.00 \frac{\text{MW h}}{\text{g}} \left(\frac{1 \text{ d}}{24 \text{ h}} \right) \\ &= 0.9586 \frac{\text{MW d}}{\text{g}} \end{aligned}$$

c) ¿Qué cantidad de energía se produce en 3 años?

$$\begin{aligned} E(t) &= P_{Th} t = \frac{P_{elec.}}{\rho} t = \left(\frac{1200 \text{ MW}}{0.40} \right) (3 \text{ a}) \left(\frac{280 \text{ d}}{1 \text{ a}} \right) = 2.52 \times 10^6 \text{ MW d} \\ &= 2.52 \times 10^6 \text{ MW d} \left(\frac{24 \text{ h}}{1 \text{ d}} \right) \left(\frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \right) \left(\frac{10^6 \text{ W}}{1 \text{ MW}} \right) \left(\frac{1 \text{ J/s}}{1 \text{ W}} \right) = \end{aligned}$$

$$= 2.1773 \times 10^{17} \text{ J}$$

d) ¿Cuál es el quemado B de U^{233} para producir esa energía?

$$B(3 \text{ a}) = \frac{E(3 \text{ a})}{E(1 \text{ g})} = \frac{2.52 \times 10^6 \text{ MWd}}{0.9586 \frac{\text{MWd}}{\text{g}}} = 2.6288 \text{ t}$$

$$B(1 \text{ a}) = 876.26 \frac{\text{kg}}{\text{a}}$$

Respuesta (procedimiento alternativo utilizando el concepto de razón de reacciones de fisión).

De la definición de potencia térmica $[P = RR_f E_f]$, donde RR_f es la razón de reacciones de fisión, E_f es la energía de fisión, $P = \frac{P_{elec.}}{\rho}$, y $\rho = 0.4$ es el rendimiento o factor de conversión de energía térmica a eléctrica

$$RR_f = \frac{P}{E_f} = \frac{P_{elec.}}{\rho E_f} = \frac{1200 \text{ MW} \left(\frac{10^6 \text{ W}}{1 \text{ MW}} \right) \left(\frac{\text{J/s}}{1 \text{ W}} \right)}{(0.40) (200 \text{ MeV/fisión}) (1.602 \times 10^{-13} \text{ J/MeV})} = 9.3633 \times 10^{19} \frac{\text{fisiones}}{\text{s}}$$

esto es equivalente al número N de átomos fisionados

De la definición de densidad nuclear $N = \frac{w(g) N_A \left(\frac{\text{atomos}}{\text{at-g}} \right)}{A \left(\frac{\text{g}}{\text{at-g}} \right)}$, el peso de U^{233} o quemado de combustible B es

$$w(g) = B = \frac{N A}{N_A} = \frac{9.3633 \times 10^{19} \frac{\text{atomos}}{\text{s}} 233 \left(\frac{\text{g}}{\text{at g}} \right)}{\left(6.023 \times 10^{23} \frac{\text{atomos}}{\text{at g}} \right)} = 0.036222 \frac{\text{g}}{\text{s}} =$$

$$B = 0.036222 \frac{\text{g}}{\text{s}} \left(\frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \right) \left(\frac{24 \text{ h}}{1 \text{ d}} \right) \left(\frac{280 \text{ d}}{1 \text{ a}} \right) \left(\frac{1 \text{ t}}{10^6 \text{ g}} \right) = 876.28 \frac{\text{kg}}{\text{a}}$$

que es igual al obtenido en d).

e) ¿Cuál es el coeficiente de conversión del reactor?

El coeficiente de conversión es la fracción entre la cantidad de U^{233} producido o criado entre la cantidad de U^{233} consumido.

De los datos del problema, se sabe que se introduce en el reactor 0.8 t de UO_2 y 16 t de ThO_2 . El peso neto de U^{233} alimentado es el peso alimentado multiplicado por la fracción que representa el uranio respecto a la molécula de UO_2 . Esto es

$$w(U^{233}) = 0.8 \text{ t} \frac{233 \frac{\text{g}}{\text{at g}}}{265 \frac{\text{g}}{\text{mol g}}} = 0.7034 \text{ t}$$

Si después de la recarga quedan 0.2 t de U^{233} quiere decir que se consumieron 0.5034 t de U^{233} .

Por otro lado, si se alimentaron 16 t de ThO_2 , la cantidad de Th^{232} alimentada fue

$$w(Th^{232}) = 16 t \frac{232 \frac{g}{at \cdot g}}{264 \frac{g}{mol \cdot g}} = 14.06 t$$

f) ¿Se puede considerar al reactor de cría?

Como se produjeron 0.3 t de U^{233} , el coeficiente de conversión es

$$f = \frac{0.3 t \text{ producidas de } U^{233}}{0.5034 t \text{ consumidas de } U^{233}} = 0.5959$$

Lo que implica que el reactor no es de cría, porque no produce un átomo nuevo de U^{233} por cada átomo consumido, aunque sí es un reactor reproductor de combustible.

g) Calcule la tasa de conversión en MW d/t de combustible de este reactor.

Conviene utilizar el resultado del rendimiento energético del inciso c) porque ya está en las unidades pedidas. Solo hay que dividir esta cantidad entre la cantidad de U^{233} consumida entre recarga y recarga

$$\text{tasa de conversión} = \frac{2.52 \times 10^6 \text{ MWd}}{0.5034 t \text{ de } U^{233}} = 5 \times 10^6 \frac{\text{MW d}}{t \text{ de } U^{233}}$$

h) Calcule el flujo promedio de neutrones

$$\phi \left(\frac{n}{cm^2 s} \right) = \frac{\nu R_f \left(\frac{n' s}{cm^3 \cdot s} \right)}{\Sigma_f (cm^{-1})}$$

$$\Sigma_f (cm^{-1}) = N_{U^{235}} \sigma_f^{233} + N_{Th^{232}} \sigma_f^{232} (cm^{-1})$$

El problema es que no se conoce la densidad nuclear del U^{233}

$$= \frac{\nu R_f \left(\frac{n' s}{cm^3 \cdot s} \right)}{N_{U^{235}} \sigma_f^{25} (cm^{-1})}$$

Si se considera que el combustible está confinado dentro de una barra cuya densidad es $10 \frac{g}{cm^3}$. La densidad molecular se obtiene mediante la expresión

$$N_j = \frac{x_j \rho \left(\frac{g}{cm^3} \right) N_A \left(\frac{\text{atomos}}{at - g} \right)}{A \left(\frac{g}{at - g} \right)}$$

Al ser x_j la fracción del isótopo en el combustible y $x_{UO_2} = \epsilon = 0.05$ y $x_{ThO_2} = 0.95$, se sustituye

$$N_{UO_2} = \frac{(0.05) 10 \left(\frac{g}{cm^3} \right) 6.023 \times 10^{23} \left(\frac{\text{moleculas}}{mol \cdot g} \right)}{265 \left(\frac{g}{mol \cdot g} \right)} = 1.1364 \times 10^{21} \frac{\text{moleculas}}{cm^3} = N_{U^{233}}$$

$$N_{ThO_2} = \frac{(0.95)10 \left(\frac{g}{cm^3}\right) 6.023 \times 10^{23} \left(\frac{moleculas}{mol\ g}\right)}{264 \left(\frac{g}{mol\ g}\right)} = 2.1674 \times 10^{22} \frac{moleculas}{cm^3} = N_{Th^{232}}$$

La densidad nuclear es igual a la densidad molecular, puesto que cada molécula solo contiene un átomo U^{233} .

Luego, la sección macroscópica de fisión es

$$\begin{aligned}\Sigma_f (cm^{-1}) &= N_{U^{235}} \sigma_f^{233} + N_{Th^{232}} \sigma_f^{232} (cm^{-1}) = \\ &= (1.1364 \times 10^{21})(525 \times 10^{-24}) + (2.1674 \times 10^{22})(5.2 \times 10^{-29}) = 0.59661\ cm^{-1}\end{aligned}$$

Nota: puede verificarse que las fisiones en el Th^{232} son insignificantes.

Se sustituye en la expresión de flujo

$$\phi \left(\frac{n}{cm^2 s}\right) = \frac{(2.5) \left(9.3633 \times 10^{19} \frac{n's}{cm^3 \cdot s}\right)}{(0.59661\ cm^{-1})} = 3.9234 \times 10^{20} \frac{n}{cm^2 s}$$

Este valor es superior al orden de magnitud del flujo en los reactores comerciales típicas, ¿esto es correcto?

P 4. Cálculo de reactores nucleares simples haciendo uso de Teoría de Difusión

Reactor esférico desnudo compuesto con Pu^{239} puro

Para un reactor esférico desnudo compuesto con Pu^{239} , calcular: a) el *buckling* material, b) el radio del reactor, c) la masa crítica, d) la probabilidad de escape de los neutrones, e) el número de neutrones generado por fisión, f) el factor de utilización térmica, g) la constante de multiplicación infinita, h) la constante de multiplicación efectiva e i) la potencia térmica.

Los datos nucleares considerando un grupo de energía son

	$\sigma_c = \sigma_\gamma$ (b)	σ_{tr} (b)	σ_f (b)	ν	ρ ($\frac{g}{cm^3}$)
Pu^{49}	0.26	6.8	1.85	2.98	15.4

Nota: $\sigma_a = \sigma_c + \sigma_f$

Solución

$$B_m^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

donde

$$\nu \Sigma_f = \nu^{49} N^{49} \sigma_f^{49}$$

$$\Sigma_a = N^{49} \sigma_a^{49}$$

$$N^{49} = \frac{\rho_{49} N_A}{A_{49}} = \frac{15.4 \left(\frac{g}{cm^3} \right) 6.023 \times 10^{23} \left(\frac{moleculas}{mol} \right)}{239 \frac{g}{mol}} = 3.8809 \times 10^{22} \frac{moleculas}{cm^3}$$

Sustituyendo

$$\nu \Sigma_f = \nu^{49} N^{49} \sigma_f^{49} = 2.98 * 3.8809 \times 10^{22} cm^{-3} * 1.85 \times 10^{-24} = 0.213954 cm^{-1}$$

$$\Sigma_a = N^{49} \sigma_a^{49} = 3.8809 \times 10^{22} cm^{-3} * (0.26 + 1.85) \times 10^{-24} = 0.081887 cm^{-1}$$

$$\Sigma_{tr} = N^{49} \sigma_{tr}^{49} = 3.8809 \times 10^{22} cm^{-3} * 6.8 \times 10^{-24} cm^2 = 0.26394 cm^{-1}$$

$$D = \frac{1}{3 \Sigma_{tr}} = \frac{1}{3(0.26394 cm^{-1})} = 1.2631 cm$$

Luego

$$B_m^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D} = \frac{0.213954 cm^{-1} - 0.081887 cm^{-1}}{1.2631 cm} = 0.104557 cm^{-2}$$

b) Calculo del radio

$$\text{En criticidad } B_g^2 = B_m^2$$

$$\therefore B_g = B_m = 0.323354 cm^{-1}$$

Y para geometría esférica $B_g = \frac{\pi}{R'}$ donde R' es el radio extrapolado
Luego

$$R' = \frac{\pi}{B_g} = \frac{\pi}{0.323354 \text{ cm}^{-1}} = 9.71564 \text{ cm}$$

Y como $R' = R + z_0$ donde z_0 es la longitud extrapolada

$$z_0 = \frac{0,71}{\Sigma_{tr}} = \frac{0,71}{2.3259 \text{ cm}^{-1}} = 2.690 \text{ cm}$$

$$\therefore R = R' - z_0 = 9.7156 \text{ cm} - 2.6903 \text{ cm} = 7.0256 \text{ cm}$$

Nota: obsérvese que la longitud extrapolada es muy pequeña. Eso se debe al efecto gran poder de difusión que tiene el agua.

c) Cálculo de la masa crítica

El volumen del reactor es

$$V_R = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (7.0256 \text{ cm})^3 = 1452.6 \text{ cm}^3$$

La densidad del Pu^{239} $\rho_{Pu^{239}} = 15.4 \frac{g}{\text{cm}^3}$

$$M_{Pu^{239}} = \rho_{Pu^{239}} V_R = \left(15.4 \frac{g}{\text{cm}^3} \right) (1452.6 \text{ cm}^3) = 22\,370.08 \text{ g} = 22.37 \text{ kg}$$

d) Cálculo de la probabilidad de no escape de neutrones térmico

Solución: para eso se usa la ec. (4.90) $P_{NTh} = \frac{1}{(B_g^2 L^2 + 1)}$ donde $L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$. Sustituyendo

$$P_{NTh} = \frac{1}{(B_g^2 L^2 + 1)} = \frac{1}{\left(B_g^2 \frac{D}{\Sigma_a} + 1 \right)} = \frac{1}{\left[(0.104557 \text{ cm}^{-2}) \left[\frac{1.2631 \text{ cm}}{0.081887 \text{ cm}^{-1}} \right] + 1 \right]} = 0.3827337$$

e) Calcular el número de nuevos neutrones de fisión producidos por cada neutrón que fue absorbido en el combustible.

Solución: para eso se utiliza la ecuación (1.27) $\eta = v \frac{\sigma_f}{\sigma_a}$. Sustituyendo

$$\eta = v \frac{\sigma_f}{\sigma_a} = \frac{v^{49} \sigma_f^{49}}{\sigma_a^{49}} = \frac{2.98 * 1.85 \times 10^{-24} \text{ cm}^2}{2.11 \times 10^{-24} \text{ cm}^2} = 2.6128$$

f) Calcular el factor de utilización térmica.

Solución: para eso se usa la ecuación (1.26) $f = \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a}$ donde $\Sigma_a^F = N^{49} \sigma_a^{49}$ y $\Sigma_a = \Sigma_a^F$ puesto que no hay moderador

$$\Sigma_a^F = N^{49} \sigma_a^{49} = 0.081887 \text{ cm}^{-1}$$

$$f = \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a} = \frac{0.081887 \text{ cm}^{-1}}{0.081887 \text{ cm}^{-1}} = 1$$

$$k_\infty = f \eta = \eta = 2.6128$$

g) Alternativamente, el producto k_{∞} puede calcularse mediante la ecuación (4.75). Esto es

$$k_{\infty} = f\eta = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a} = \frac{0.213954 \text{ cm}^{-1}}{0.081887 \text{ cm}^{-1}} = 2.6128$$

h) Y la constante de multiplicación efectiva puede calcularse mediante la ecuación (4.77). Esto es

$$k_{eff} = k_{\infty}P_{NF}P_{NTh}$$

El problema es calcular P_{NF} . Para ello puede recurrirse a la Teoría de Fermi. Para un reactor crítico

$$B_m^2 = \frac{\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a} - 1}{L^2 + \tau} \quad (6.92a)$$

donde

$$M^2 = L^2 + \tau = \frac{\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a} - 1}{B_m^2} = \frac{2.6128 - 1}{0.104557 \text{ cm}^{-2}} = 15.42 \text{ cm}^2$$

$$\tau = L^2 - M^2$$

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} = \frac{1.2631 \text{ cm}}{0.081887 \text{ cm}^{-1}} = 15.42 \text{ cm}^2$$

$$\tau = L^2 - M^2 = (15.42 - 15.42) \text{ cm}^2 = 0 \text{ cm}^2$$

$$P_{NF} = \frac{1}{1 + B^2\tau} = \frac{1}{1 + 0.149555 \text{ cm}^{-2} * 50.486 \text{ cm}^2} = 1$$

Luego

$$k_{eff} = k_{\infty}P_{NF}P_{NTh} = (2.6128)(1)(0.3827337) = 1.0000066$$

Lo cual demuestra que en efecto el sistema es crítico.

i) La potencia térmica puede calcularse mediante la ecuación (4.93)

$$P = 3.20 \times 10^{-11} \Sigma_f \int \phi(r) d^3r \text{ (W)}$$

donde, la integral del flujo puede calcularse mediante la ecuación (4.85)

$$\int \phi(r) d^3\mathbf{r} = 4\pi\phi_0 \frac{R'}{B_c}$$

Utilizando los datos del problema

$$\int \phi(r) d^3\mathbf{r} = 4\pi\phi_0 \frac{R'}{B_c} = 4\pi \frac{9.71564 \text{ cm}}{0.323354 \text{ cm}^{-1}} \phi_0 = 377.57 \phi_0 \left(\frac{n \text{ cm}}{s} \right) \quad y$$

$$P = \left(3.20 \times 10^{-11} \frac{J}{fis} \right) (0.081887 \text{ cm}^{-1}) \left(377.57 \phi_0 \frac{n \text{ cm}}{s} \right) = 9.8939 \times 10^{-10} \phi_0 W$$

Obviamente la potencia dependerá del flujo inicial ϕ_0 , lo que implica que se necesita un flujo de $10^{10} \frac{n}{\text{cm}^2 \text{ s}}$ para obtener apenas una potencia del orden de 10 W.

Parámetros nucleares de un reactor esférico desnudo

Para un reactor esférico desnudo compuesto con U^{235} (U^{25}) y H_2O en una proporción $N_{H_2O}/N_{U^{25}} = 1000$, calcular

- el *buckling* material
- el radio del reactor
- la masa crítica
- la probabilidad de escape de los neutrones
- el número de neutrones generado por fisión
- el factor de utilización térmica
- la constante de multiplicación infinita
- la constante de multiplicación efectiva
- la potencia térmica

Los datos nucleares considerando un grupo de energía son los siguientes:

	σ_a (b)	σ_{tr} (b)	σ_f (b)	ν
H_2O	0.58	69.5		
U^{25}	603	10	500	2.47

Solución:

- Cálculo del *buckling* material.

$$B_m^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

donde

$$\nu \Sigma_f = \nu^{25} N^{25} \sigma_f^{25}$$

$$\Sigma_a = N^{25} \sigma_a^{25} + N^{H_2O} \sigma_a^{H_2O}$$

Se puede asumir, como una simplificación, que la densidad numérica del agua en la mezcla $U^{235} - H_2O$ es del mismo orden que la densidad numérica del agua pura, dada la proporción del agua comparado al uranio. Por tanto,

$$N^{H_2O} = \frac{\rho_{H_2O} N_A}{M_{H_2O}} = \frac{1 \left(\frac{g}{cm^3} \right) 6.023 \times 10^{23} \left(\frac{moleculas}{mol} \right)}{18 \frac{g}{mol}} = 3.3461 \times 10^{22} \frac{moleculas}{cm^3}$$

Y

$$N^{25} = \frac{N^{H_2O}}{1000} = 3.3461 \times 10^{19} \frac{atomos\ de\ U^{25}}{cm^3}$$

Se sustituye

$$\nu \Sigma_f = \nu^{25} N^{25} \sigma_f^{25} = 2.47 * 3.3461 \times 10^{19} cm^{-3} * 500 \times 10^{-24} cm^2 = 0.0413243 cm^{-1}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_a &= N^{25}\sigma_a^{25} + N^{H_2O}\sigma_a^{H_2O} \\ &= 3.3461 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3} * 603 \times 10^{-24} + 3.3461 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} * 0.58 \times 10^{-24} \\ &= 0.039843 \text{ cm}^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{tr} &= N^{25}\sigma_{tr}^{25} + N^{H_2O}\sigma_{tr}^{H_2O} \\ &= 3.3461 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3} * 10 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 + 3.3461 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} * 69.5 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 \\ &= 2.3259 \text{ cm}^{-1}\end{aligned}$$

$$D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}} = \frac{1}{3(2.3259 \text{ cm}^{-1})} = 0.143315 \text{ cm}$$

Luego

$$B_m^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D} = \frac{0.0413243 \text{ cm}^{-1} - 0.039843 \text{ cm}^{-1}}{0.143315 \text{ cm}} = 0.010336 \text{ cm}^{-2}$$

b) Cálculo del radio.

$$\begin{aligned}\text{En criticidad} \quad B_g^2 &= B_m^2 \\ \therefore B_g &= B_m = 0.101666 \text{ cm}^{-1}\end{aligned}$$

Para geometría esférica se expresa $B_g = \frac{\pi}{R'}$, donde R' es el radio extrapolado
Luego

$$R' = \frac{\pi}{B_g} = \frac{\pi}{0.101666 \text{ cm}^{-1}} = 30.90 \text{ cm}$$

Como $R' = R + z_0$ donde z_0 es la longitud extrapolada

$$z_0 = \frac{0.71}{\Sigma_{tr}} = \frac{0.71}{2.3259 \text{ cm}^{-1}} = 0.3052 \text{ cm}$$

$$\therefore R = R' - z_0 = 30.90 \text{ cm} - 0.3052 \text{ cm} = 30.6 \text{ cm}$$

Nota: observe que la longitud extrapolada es muy pequeña. Eso se debe al efecto de gran poder de difusión que tiene el agua.

c) Cálculo de la masa crítica.

El volumen del reactor es

$$V_R = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (30.6 \text{ cm})^3 = 120\,000 \text{ cm}^3$$

La densidad del U^{235} en el reactor es

$$\rho_{U^{235}} = \frac{N^{U^{235}} A_{U^{235}}}{N_A} = \frac{3.3461 \times 10^{19} \left(\frac{\text{atomos}}{\text{cm}^3}\right) * 235 \left(\frac{g}{\text{at. g}}\right)}{6.023 \times 10^{23} \left(\frac{\text{atomos}}{\text{at. g}}\right)} = 0.013055 \frac{g}{\text{cm}^3}$$

$$M_{U^{235}} = \rho_{U^{235}} V_R = \left(0.013055 \frac{g}{\text{cm}^3}\right) (120\,000 \text{ cm}^3) = 1566 \text{ g}$$

d) Cálculo de la probabilidad de no escape de neutrones térmicos.

Solución:

Para este cálculo se usa la ecuación (4.90) $P_{NTh} = \frac{1}{(B_g^2 L^2 + 1)}$ donde $L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$. Se sustituye

$$P_{NTh} = \frac{1}{(B_g^2 L^2 + 1)} = \frac{1}{\left(B_g^2 \frac{D}{\Sigma_a} + 1\right)} = \frac{1}{\left[(0.010336 \text{ cm}^{-2}) \left[\frac{0.143315 \text{ cm}}{0.039843 \text{ cm}^{-1}}\right] + 1\right]} = 0.96415$$

- e) Calcular el número de nuevos neutrones de fisión producidos por cada neutrón que fue absorbido en el combustible.

Solución:

Para calcular el número de nuevos neutrones de fisión se utiliza la ecuación (1.27) $\eta = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_a}$. Se sustituye

$$\eta = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_a} = \frac{\nu^{25} \sigma_f^{25}}{\sigma_a} = \frac{2.47 * 500 \times 10^{-24} \text{ cm}^2}{603 \times 10^{-24} \text{ cm}^2} = 2.04809$$

- f) Calcular el factor de utilización térmica.

Solución:

Para resolver este cálculo se usa la ecuación (1.26) $f = \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a}$ donde $\Sigma_a^F = N^{25} \sigma_a^{25}$ y $\Sigma_a = \Sigma_a^F + \Sigma_a^M$

Se sustituye

$$\Sigma_a^F = N^{25} \sigma_a^{25} = 3.3461 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3} * 603 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 = 0.20177 \text{ cm}^{-1}$$

$$f = \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a} = \frac{0.201769 \text{ cm}^{-1}}{0.039843 \text{ cm}^{-1}} = 0.050641$$

- g) Alternativamente, el producto k_∞ puede calcularse mediante la ecuación (4.75). Esto es

$$k_\infty = f\eta = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a} = \frac{0.0413243 \text{ cm}^{-1}}{0.039843 \text{ cm}^{-1}} = 1.037177$$

- h) La constante de multiplicación efectiva puede calcularse mediante la ecuación (4.77). Esto es

$$k_{eff} = k_\infty P_{NTh} = (1.037177)(0.96415) = 0.9999942$$

Lo cual demuestra que en efecto el sistema es crítico.

- i) La potencia térmica puede calcularse mediante la ecuación (4.93)

$$P = 3.20 \times 10^{-11} \Sigma_f \int \phi(r) d^3r \text{ (W)}$$

donde la integral del flujo se puede calcular con la ecuación (4.85)

$$\int \phi(r) d^3r = 4\pi \phi_0 \frac{R'}{B_c}$$

Se utilizan los datos del problema

$$\Sigma_f = N^{25} \sigma_f^{25} = 3.3461 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3} * 500 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 = 0.01673 \text{ cm}^{-1}$$

$$\int \phi(r) d^3r = 4\pi \phi_0 \frac{R'}{B_c} = 4\pi \frac{30.90 \text{ cm}}{0.101666 \text{ cm}^{-1}} \phi_0 = 3819.6 \phi_0 \left(\frac{n \text{ cm}}{s} \right) \quad y$$

$$P = \left(3.20 \times 10^{-11} \frac{J}{fis} \right) (0.01673 \text{ cm}^{-1}) \left(3819.6 \phi_0 \frac{n \text{ cm}}{s} \right) = 2.04486 \times 10^{-9} \phi_0 W$$

Lo que implica que la potencia queda en función del flujo inicial ϕ_0 , que se puede inducir mediante una fuente de neutrones. Para un flujo inicial del orden de $\phi_0 = 10^9 \frac{n}{\text{cm}^2 s}$, la potencia sería apenas del orden de 2 W, que físicamente resulta imperceptible.

Discusión: si se tiene un cilindro con una mezcla de U^{235} y agua con una relación de $N_{H_2O}/N_{U^{25}} = 1000$, es decir, una mezcla cuya constante de criticidad es $k_{eff} = 1$, ¿de qué depende que se produzca la cadena de reacciones de fisión?

Parámetros nucleares de un reactor cilíndrico

Calcular

- el *buckling* material
- el tamaño del reactor
- la masa crítica
- la potencia de un reactor cilíndrico desnudo cuyo radio R es igual a la mitad de la altura H , y está compuesto por U^{235} (U^{25}) y H_2O en una proporción $N_{H_2O}/N_{U^{25}} = 1000$.

Solución:

- El cálculo del *buckling* material es el mismo que para el reactor esférico del ejercicio anterior. En cuyo caso se omite repetir el cálculo, simplemente se toma el valor ya calculado

$$B_m^2 = 0.010336 \text{ cm}^{-2}$$

Y dado que en criticidad $B_g^2 = B_m^2$

$$\therefore B_g = B_m = 0.101666 \text{ cm}^{-1}$$

- Para el cálculo del tamaño de un reactor cilíndrico se puede utilizar la ecuación (4.66)

$$B_g^2 = \left(\frac{2.405}{R'} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2H'} \right)^2$$

Para un cilindro en el cual se ha minimizado su superficie se utiliza

$$R = H \quad \text{o} \quad R' = H'$$

$$\therefore R' = H' = \sqrt{\frac{2.405^2 + \frac{\pi^2}{4}}{B_g^2}} = \sqrt{\frac{2.405^2 + \frac{\pi^2}{4}}{0.010336 \text{ cm}^{-2}}} = 28.25 \text{ cm}$$

Y como $R' = R + z_0$ donde z_0 es la longitud extrapolada

$$z_0 = \frac{0,71}{\Sigma_{tr}} = \frac{0,71}{2.3259 \text{ cm}^{-1}} = 0.3052 \text{ cm}$$

$$\therefore R = R' - z_0 = 28.25 \text{ cm} - 0.3052 \text{ cm} = 27.94 \text{ cm}$$

c) Cálculo de la masa crítica.

El volumen del reactor cilíndrico es

$$V_R = 2HA = 2\pi R^2 H = 2\pi (27.94 \text{ cm})^3 = 137 \ 114 \text{ cm}^3$$

La densidad del U^{235} en el reactor es la misma que la de un reactor esférico

$$\therefore \rho_{U^{235}} = \frac{N^{U^{235}} A_{U^{235}}}{N_A} = 0.013055 \frac{g}{\text{cm}^3}$$

Y la masa crítica es

$$M_{U^{235}} = \rho_{U^{235}} V_R = \left(0.013055 \frac{g}{\text{cm}^3}\right) (137 \ 114 \text{ cm}^3) = 1 \ 790 \text{ g}$$

Nota: observe que, con respecto a un reactor esférico con la misma composición, tanto el volumen como la masa crítica de un reactor cilíndrico son mayores significativamente (15.3 %). Esto se debe a que un cilindro tiene más superficie que una esfera y por tanto es más propicia la fuga de neutrones. Sin embargo, en ambos casos, es evidente que no se necesita una gran cantidad de U^{235} para tener un reactor crítico.

d) En el caso de una geometría cilíndrica la potencia liberada se puede calcular mediante la ecuación (4.95)

$$\begin{aligned} P &= 3.20 \times 10^{-11} \Sigma_f \phi_0 \int_0^{R'} \rho \phi_0 J_0 \left(\frac{2.405 \rho}{R'} \right) d\rho \int_{-H'}^{H'} \cos \left(\frac{\pi z}{2H'} \right) dz \int_0^{2\pi} d\varphi (W) = \\ &= \left(3.20 \times 10^{-11} \frac{J}{\text{fis}} \right) (0.01673 \text{ cm}^{-1}) \phi_0 \frac{R'}{2.405} \left[J_1 \left(\frac{2.405 \rho}{R'} \right) \right]_0^{R'} \frac{2H'}{\pi} \left[\text{sen} \left(\frac{\pi z}{2H'} \right) \right]_{-H'}^{H'} (2\pi) = \\ &= \left(3.20 \times 10^{-11} \frac{J}{\text{fis}} \right) (0.01673 \text{ cm}^{-1}) \phi_0 \frac{R'}{2.405} \{ J_1(2.405) - J_1(0) \} \frac{2H'}{\pi} \left\{ \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \text{sen} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} (2\pi) = \\ &= \frac{8}{2.405} \left(3.20 \times 10^{-11} \frac{J}{\text{fis}} \right) (0.01673 \text{ cm}^{-1}) \{ J_1(2.405) - J_1(0) \} R' H' \phi_0 = \\ &= \frac{8}{2.405} \left(3.20 \times 10^{-11} \frac{J}{\text{fis}} \right) (0.01673 \text{ cm}^{-1}) \{ J_1(2.405) - J_1(0) \} (28.25)^2 \phi_0 = \\ &= 1.4219 \times 10^{-9} [J_1(2.405) - J_1(0)] \phi_0 (W) \end{aligned}$$

Donde es necesario disponer de las tablas de las funciones de Bessel. Aun así, es evidente que la potencia queda en función del flujo inicial ϕ_0 . Para un flujo inicial del orden de $\phi_0 = 10^9 \frac{n}{\text{cm}^2 \text{ s}}$, la potencia sería apenas del orden de 2 W, que físicamente resulta imperceptible.

Efecto del reflector para un reactor nuclear placa

Considere un reactor placa compuesto con U^{235} y H_2O en una proporción $N_{H_2O}/N_{U^{235}} = 1000$, para calcular:

- el *buckling* material
- la dimensión del reactor
- la masa crítica por unidad de superficie
- la dimensión del reactor con reflector, considere como reflector una placa de agua de espesor b
- el ahorro en la dimensión
- la masa crítica del reactor con reflector
- el porcentaje de ahorro de U^{235} .

Datos nucleares:

	$\sigma_a(b)$	$\sigma_{tr}(b)$	$\sigma_f(b)$	ν
H_2O	0.58	69.5		
U^{235}	603	10	500	2.47

Solución:

- Cálculo del *buckling* material.

$$B_m^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

donde

$$\nu \Sigma_f = \nu^{235} N^{235} \sigma_f^{235}$$

$$\Sigma_a = N^{235} \sigma_a^{235} + N^{H_2O} \sigma_a^{H_2O}$$

Dada la proporción del agua comparado al uranio, se puede asumir que la densidad numérica del agua en la mezcla $U^{235} - H_2O$ es del mismo orden que la densidad numérica del agua pura, por tanto

$$N^{H_2O} = \frac{\rho_{H_2O} N_A}{M_{H_2O}} = \frac{1 \left(\frac{g}{cm^3} \right) 6.023 \times 10^{23} \left(\frac{moleculas}{mol} \right)}{18 \frac{g}{mol}} = 3.3461 \times 10^{22} \frac{moleculas}{cm^3}$$

Y

$$N^{235} = \frac{N^{H_2O}}{1000} = 3.3461 \times 10^{19} \frac{atomos\ de\ U^{235}}{cm^3}$$

Se sustituye

$$\nu \Sigma_f = \nu^{235} N^{235} \sigma_f^{235} = 2.47 * 3.3461 \times 10^{19} cm^{-3} * 500 \times 10^{-24} cm^2 = 0.0413243 cm^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_a &= N^{235} \sigma_a^{235} + N^{H_2O} \sigma_a^{H_2O} \\ &= 3.3461 \times 10^{19} cm^{-3} * 603 \times 10^{-24} + 3.3461 \times 10^{22} cm^{-3} * 0.58 \times 10^{-24} \\ &= 0.039843 cm^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{tr} &= N^{25} \sigma_{tr}^{25} + N^{H_2O} \sigma_{tr}^{H_2O} \\ &= 3.3461 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3} * 10 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 + 3.3461 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} * 69.5 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 \\ &= 2.3259 \text{ cm}^{-1}\end{aligned}$$

$$D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}} = \frac{1}{3(2.3259 \text{ cm}^{-1})} = 0.143315 \text{ cm}$$

Luego,

$$B_m^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D} = \frac{0.0413243 \text{ cm}^{-1} - 0.039843 \text{ cm}^{-1}}{0.143315 \text{ cm}} = 0.010336 \text{ cm}^{-2}$$

b) Cálculo del ancho medio del radio.

La criticidad se calcula con $B_g^2 = B_m^2$

$$\therefore B_g = B_m = 0.101666 \text{ cm}^{-1}$$

Para geometría esférica se utiliza $B_g = \frac{\pi}{2a'}$, donde a' es la mitad del ancho extrapolado del reactor. Luego

$$a' = \frac{\pi}{2 B_g} = \frac{\pi}{0.101666 \text{ cm}^{-1}} = 15.45 \text{ cm}$$

Y como $a' = a + z_0$, donde z_0 es la longitud extrapolada

$$z_0 = \frac{0.71}{\Sigma_{tr}} = \frac{0.71}{2.3259 \text{ cm}^{-1}} = 0.3052 \text{ cm}$$

La dimensión del reactor sin reflectores se calcula

$$\therefore a = a' - z_0 = 15.45 \text{ cm} - 0.3052 \text{ cm} = 15.145 \text{ cm}$$

c) Masa crítica por unidad de superficie.

El volumen del reactor por unidad de superficie es

$$V_R = a S = 15.145 \text{ cm} * 1 \text{ cm}^2 = 15.145 \text{ cm}^3$$

La densidad del U^{235} en el reactor es

$$\rho_{U^{235}} = \frac{N_{U^{235}}}{N_A} = \frac{3.3461 \times 10^{19} \left(\frac{\text{atomos}}{\text{cm}^3} \right) * 235 \left(\frac{g}{\text{at.g}} \right)}{6.023 \times 10^{23} \left(\frac{\text{atomos}}{\text{at.g}} \right)} = 0.013055 \frac{g}{\text{cm}^3}$$

y la masa crítica por unidad de superficie es

$$M_{U^{235}} = \rho_{U^{235}} V_R = \left(0.013055 \frac{g}{\text{cm}^3} \right) (15.145 \text{ cm}^3) = 0.1977 \text{ g}$$

d) La dimensión del reactor con reflector está dada por la ecuación (7)

$$a = \frac{1}{B_c} \arctan \frac{D_2}{D_1 L_2 B_c}$$

Para determinarla, hay que calcular el coeficiente de difusión y la longitud de difusión del agua. Esto es

$$\Sigma_{tr}^{H_2O} = N^{H_2O} \sigma_{tr}^{H_2O} = 3.3461 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} * 69.5 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 = 2.32554 \text{ cm}^{-1}$$

$$D_2 = D_{H_2O} = \frac{1}{3\Sigma_{tr}^{H_2O}} = \frac{1}{3(2.32554 \text{ cm}^{-1})} = 0.143336 \text{ cm}$$

$$L_2^2 = L_{H_2O}^2 = \frac{D_{H_2O}}{\Sigma_a^{H_2O}} = \frac{D_{H_2O}}{N^{H_2O} \sigma_a^{H_2O}} = \frac{0.143336 \text{ cm}}{3.3461 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} * 0.58 \times 10^{-24} \text{ cm}^2} = 7.3856 \text{ cm}^2$$

$$L_{H_2O} = 2.7176 \text{ cm}$$

Luego,

$$a = \frac{1}{B_c} \arctan \frac{D_2}{D_1 L_2 B_c} =$$

$$= \frac{1}{0.101666 \text{ cm}^{-1}} \arctan \left(\frac{0.143336 \text{ cm}}{0.143315 * 2.7176 \text{ cm} * 0.101666 \text{ cm}^{-1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{0.101666 \text{ cm}^{-1}} \arctan(3.6201) = \frac{1.30128}{0.101666 \text{ cm}^{-1}} = 12.799 \text{ cm}$$

e) El ahorro en la dimensión es

$$\delta = 15.145 \text{ cm} - 12.799 \text{ cm} = 2.3454 \text{ cm}$$

f) El volumen del reactor con reflector por unidad de superficie es

$$V_R = a S = 12.799 \text{ cm} * 1 \text{ cm}^2 = 12.799 \text{ cm}^3$$

la masa crítica del reactor con reflector por unidad de superficie es

$$M_{U^{235}} = \rho_{U^{235}} V_R = \left(0.013055 \frac{g}{\text{cm}^3} \right) (12.799 \text{ cm}^3) = 0.167091 \text{ g}$$

g) Porcentaje de ahorro de combustible

$$Ahorro = \frac{0.1977 \text{ g} - 0.167091 \text{ g}}{0.1977 \text{ g}} = 0.155 \Rightarrow 15.5 \%$$

Reactividad típica de reactor PWR

Se puede considerar que un reactor PWR se asimila como un reactor placa horizontal, es infinito en x y y , con la sola dimensión finita z y una altura $2a = 440 \text{ cm}$.

El reactor tiene las siguientes constantes:

$$\nu \Sigma_f = 0.013 \text{ cm}^{-1}$$

$$D = 1.3 \text{ cm}$$

$$B_0^2 = 10^{-4} \text{ cm}^{-2}$$

Calcular el excedente de reactividad del reactor

Si ν designa el número de neutrones por fisión para el reactor y ν_c para el reactor en criticidad, de acuerdo con la ecuación (4.73) la constante de multiplicación es

$$k = \frac{\nu}{\nu_c} = \frac{\nu}{\frac{B_g^2 D + \Sigma_a}{\Sigma_f}} = \frac{\nu \Sigma_f}{B_g^2 D + \Sigma_a} \quad (4.73)$$

El *buckling* crítico es el *buckling* geométrico. Para un reactor placa se expresa

$$B_g^2 = \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \quad (4.30a)$$

Se sustituye en la ecuación (4.73)

$$k = \frac{\nu\Sigma_f}{\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 D + \Sigma_a} \quad (3)$$

La constante de multiplicación, en función tanto del *buckling* geométrico como del *buckling* material, se puede obtener utilizando en la ecuación (3)

$$B_0^2 = B_m^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D} \quad (4.70)$$

de donde

$$\begin{aligned} D B_m^2 &= \nu\Sigma_f - \Sigma_a \\ \Sigma_a &= \nu\Sigma_f - D B_m^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Se sustituye en la ecuación (3)

$$k = \frac{\nu\Sigma_f}{\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 D + \nu\Sigma_f - D B_m^2} = \frac{\nu\Sigma_f}{D \left(\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 - B_m^2\right) + \nu\Sigma_f} \quad (6)$$

Para los cálculos numéricos se sustituye

$$k = \frac{0.013 \text{ cm}^{-1}}{1.3 \text{ cm} \left(\left(\frac{\pi}{440 \text{ cm}}\right)^2 - 10^{-4} \text{ cm}^{-2}\right) + 0.013 \text{ cm}^{-1}} = 1.004926$$

De acuerdo con la ecuación (5.22) la reactividad es

$$\rho = \frac{k - 1}{k} = \frac{1.004926 - 1}{1.004926} = 4.90 \times 10^{-3}$$

Y la reactividad en dólares, puede calcularse mediante la ecuación (5.35)

$$\$ = \frac{\rho}{\beta}$$

Donde $\beta = 0.0065$ es la abundancia de los neutrones retardados

Por tanto,

$$\$ = \frac{\rho}{\beta} = \frac{4.90 \times 10^{-3}}{0.0065} = 0.75\$ = 75\text{¢}$$

El periodo del reactor correspondiente a un exceso de reactividad considerable es

$$T_+ = \frac{1 - \$}{\lambda \$} = \frac{1 - 0.75}{(0.0771 \text{ s})(0.75)} = 4.32 \text{ s}$$

que implica un tiempo muy reducido para el control del reactor.

Control del exceso de reactividad

Para llevar el reactor a criticidad se introducen barras de control desde arriba. Se asume que las barras separan al reactor en dos zonas homogéneas, la parte de arriba que contiene las barras tendrá un *buckling* B_1^2 , y la de abajo, sin barras, tendrá un *buckling* B_0^2 . Suponiendo que en ambas regiones $\nu\Sigma_f$ y D permanecen iguales, calcule B_1^2 si las barras se insertan hasta la mitad ($Z = a$).

Solución probable.

$$B_0^2 = B_m^2 = 10^{-4} \text{ cm}^{-2} \text{ es el } \textit{buckling} \text{ real}$$

$$B_g^2 = \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 = 5.097936 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-2} = B_c^2 \text{ es el } \textit{buckling} \text{ critico}$$

Hay una diferencia importante entre ambos

$$\Delta B^2 = B_m^2 - B_c^2 = 4.9020638 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-2}$$

Para bajar a crítico es necesaria una capacidad de absorción, correspondiente al exceso de reactividad. Esta puede ser calculada utilizando la ecuación (5). La capacidad de absorción de las barras debe ser equivalente a

$$\begin{aligned} \Sigma_{aB} &= \nu\Sigma_f - D \Delta B^2 = 0.013 \text{ cm}^{-1} - (1.3 \text{ cm})(4.9020638 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-2}) \\ &= 0.01293627 \text{ cm}^{-1} \end{aligned}$$

Numéricamente, la sección macroscópica correspondiente al *buckling* material es

$$\Sigma_a = \nu\Sigma_f - DB_0^2 = 0.013 \text{ cm}^{-1} - (1.3 \text{ cm})(1 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-2}) = 0.01287 \text{ cm}^{-1}$$

Es evidente que la sección transversal macroscópica de la región con barras es superior a la del material nuclear. Esa reactividad se absorbe con las barras insertadas hasta la mitad del reactor. Es decir, la mitad del paso de las barras deben tener la capacidad de absorber el exceso de reactividad. En esta región la sección macroscópica de absorción es $\Sigma_{a1} = \Sigma_a - \Sigma_{aB}$, por tanto el *buckling* material en criticidad será

$$\begin{aligned} B_1^2 &= \frac{\nu\Sigma_f - (\Sigma_a - \Sigma_{aB})}{D} = \frac{0.013 \text{ cm}^{-1} - (0.01287 - 0.01293627) \text{ cm}^{-1}}{(1.3 \text{ cm})} \\ &= 0.01051 \text{ cm}^{-2} \end{aligned}$$

- 1) Si se escogen barras grises, calcule B_2^2 , para el cual las barras se introducen hasta la mitad de la zona baja del reactor $Z = \frac{a}{2}$.

El exceso de reactividad se absorbe con las barras grises insertadas tres cuartas partes de profundidad del reactor, $\Sigma_{a2} = \Sigma_a - \Sigma_{aBg}$. A simple vista el valor es $B_2^2 = B_1^2$, solo que las barras grises sofocarán $\frac{3}{4}$ partes de la región activa del reactor, y la potencia del reactor debe ser menor. Lo que implica que el *buckling* material con barras grises sea igual al de barras negras

$$\begin{aligned} B_2^2 &= \frac{\nu\Sigma_f - (\Sigma_a - \Sigma_{aBg})}{D} = \frac{0.013 \text{ cm}^{-1} - (0.01287 - 0.01293627) \text{ cm}^{-1}}{(1.3 \text{ cm})} \\ &= 0.01051 \text{ cm}^{-2} \end{aligned}$$

2) ¿A qué altura las barras producirán un *buckling* nulo?

Si Σ_{a3} es la sección macroscópica de absorción, para que el *buckling* sea cero o para sofocar la reacción en cadena, se utiliza

$$B_3^2 = 0 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_{a3}}{D} = \frac{\nu\Sigma_f - (\Sigma_a - \Sigma_{aB})}{D}$$

Esto implica que

$$\nu\Sigma_f - (\Sigma_a - \Sigma_{aB}) = 0$$

$$\nu\Sigma_f - \Sigma_a = \Sigma_{aB}$$

La manera en que esto puede asegurarse implica que las barras se inserten hasta el fondo, es decir, que $Z = 0$

Procedimiento usando la Teoría de Difusión

En un reactor crítico, las barras hacen un efecto de absorción de neutrones tal que no permite que el flujo de neutrones aumente. En tal caso, cuando en la frontera inferior de las barras es $Z = a$, el flujo y la corriente son iguales.

Al asimilar al reactor como una placa horizontal, de acuerdo con la ecuación (4.24), las ecuaciones de difusión respectivas para ambas regiones son 1 con barras y 0 sin barras, es decir,

$$\frac{d^2\phi(z)}{dz^2} + B_1^2\phi(z) = 0$$

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + B_0^2\phi(z) = 0$$

Cuya solución general es

$$\phi(x) = \phi_0 \cos(Bz) + \phi_1 \sin(Bz) \quad (4.25)$$

Al considerar que la dimensión del reactor va de $0 < Z < a$, se puede prescindir de la segunda solución y nos quedamos exclusivamente con

$$\phi_1(x) = A_1 \sin(B_1 Z)$$

$$\phi_0(x) = A_0 \sin(B_0 Z)$$

Ahora bien, en la frontera entre las regiones con y sin barras debe haber continuidad tanto del flujo como de la corriente. Por lo tanto, la continuidad del flujo implica que

$$A_1 \sin(B_1 Z) = A_0 \sin(B_0 Z)$$

La continuidad de la corriente es

$$A_1 B_1 \cos(B_1 Z) = A_0 B_0 \cos(B_0 Z)$$

La división de ambas ecuaciones se expresa

$$\frac{\tan(B_1 Z)}{B_1} = \frac{\tan(B_0 Z)}{B_0}$$

2a) Las barras negras, de acuerdo con los datos en $Z = a = 220$ cm, son

$$\frac{\tan(B_0 a)}{B_0} = \frac{\tan((10^{-2} \text{ cm}^{-1}) (220 \text{ cm}))}{(10^{-2} \text{ cm}^{-1})} = 3.8416 \text{ cm}$$

Como $B_1^2 = 0.01051 \text{ cm}^{-2}$, por tanto, $B_1 = 0.102518$. Y si $Z = a = 220$ cm p

$\tan(B_1 Z) = 0.415318$. Así que $\frac{\tan(B_1 Z)}{B_1} = 4.05118$ difiere un poco del valor de $\frac{\tan(B_0 a)}{B_0} = 3.8416$ cm, pero se asemeja.

Tal vez haya que reconsiderar la suposición de que $\nu\Sigma_f$ y D permanecen iguales.

3a) Para las barras grises, la frontera se ubica en $Z = \frac{a}{2} = 110$ cm. Luego,

$$\frac{\tan\left(B_0 \frac{a}{2}\right)}{B_0} = \frac{\tan((10^{-2} \text{ cm}^{-1}) (110 \text{ cm}))}{(10^{-2} \text{ cm}^{-1})} = 1.9201 \text{ cm}$$

Como $B_2^2 = 0.01051 \text{ cm}^{-2}$ Por tanto $B_2 = 0.102518$ y si $Z = \frac{a}{2} = 110$ cm. Por lo tanto

$$\frac{\tan(B_2 Z)}{B_2} = \frac{0.1994}{0.102518} = 1.9450$$

que difiere muy poco del valor del valor $\frac{\tan\left(B_0 \frac{a}{2}\right)}{B_0} = 1.9201$ cm, pero se asemeja.

4a) En el caso de la altura de las barras, para producir un *buckling* nulo es obvio que $Z = 0$, por lo que se expresa

$$\frac{\tan(0)}{B_0} = \frac{\tan(0)}{B_1} = 0$$

Conclusión: parece entonces que los resultados anteriores son consistentes y que la diferencia se debe a que se consideró que $\nu\Sigma_f$ y D permanecen iguales, lo que a simple vista no es coherente.

Constante de multiplicación

Para el reactor hipotético PWR de 1000 MWe del problema P 2, utilizando datos del grupo de la siguiente tabla, calcular las constantes de multiplicación y el exceso de reactividad.

	$\sigma_a(b)$	$\sigma_{tr}(b)$	$\sigma_f(b)$	ν
H_2O	0.58	69.5		
U^{25}	603	10	500	2.47
U^{28}	2.75	8.3		

$$k_{eff} = k_{\infty} P_{NTh}$$

$$k_{\infty} = f\eta = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a}$$

$$\nu\Sigma_f = \nu^{25} N^{25} \sigma_f^{25}$$

$$\Sigma_a = N^{25}\sigma_a^{25} + N^{28}\sigma_a^{28} + N^{H_2O}\sigma_a^{H_2O}$$

$$P_{NTh} = \frac{1}{(B_g^2 L^2 + 1)} = \frac{1}{(B_g^2 \frac{D}{\Sigma_a} + 1)}$$

$$B_g^2 = \left(\frac{2.405}{R'}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H'}\right)^2$$

$$R' = R + z_0$$

$$H' = H + z_0$$

$$z_0 = \frac{0.711}{\Sigma_{tr}}$$

$$B_m^2 = \frac{v\Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

$$D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}$$

$$k = \frac{v}{v_c} = \frac{v}{\frac{B_g^2 D + \Sigma_a}{\Sigma_f}} = \frac{v\Sigma_f}{B_g^2 D + \Sigma_a}$$

$$\rho = \frac{k - 1}{k}$$

Solución:

Para el dióxido de uranio puro la densidad molecular es

$$N_{UO_2} = \frac{\rho_{UO_2} \cdot N_A}{A_{UO_2}} = \frac{\left(10 \frac{g}{cm^3}\right) \left(6.022 \times 10^{23} \frac{\text{moléculas}}{\text{mol} \cdot g}\right)}{269.92 \frac{g}{\text{mol} \cdot g}} = 2.2314 \times 10^{22} \frac{\text{moléculas de } UO_2}{cm^3}$$

donde

$$A_{UO_2} = (0.04)(235.05) + (0.96)(238.04) + 32 = 269.92$$

Sin embargo, como se apuntó anteriormente en un reactor nuclear, el volumen del combustible es aproximadamente la mitad del volumen del reactor e igual al volumen del moderador:

$$V_F = \frac{1}{2} V_R = V_{H_2O}$$

Por tanto

$$\therefore N_{UO_2} = N_{U_{reactor}} = \frac{1}{2} N_{UO_2 \text{ puro}}$$

$$N_{UO_2} = 1.1157 \times 10^{22}$$

$$N_{U^{235}} = (1.115 \times 10^{22})(\epsilon) = (1.1157 \times 10^{22})(0.04) = 4.4628 \times 10^{20} \frac{\text{átomos de } U^{235}}{cm^3}$$

$$N_{U^{238}} = (1.115 \times 10^{22})(1 - \epsilon) = (1.115 \times 10^{22})(0.96) = 1.07107 \times 10^{22} \frac{\text{átomos de } U^{238}}{cm^3}$$

$$N_{H_2O} = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\rho_{H_2O} \cdot N_A}{A_{H_2O}} = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\left(1 \frac{g}{cm^3}\right) \left(6.022 \times 10^{23} \frac{\text{moléculas}}{\text{mol} \cdot g}\right)}{18 \frac{g}{\text{mol} \cdot g}} = 1.673 \times 10^{22} \frac{\text{moléculas}}{cm^3}$$

$$\begin{aligned}
v\Sigma_f &= v^{25} N^{25} \sigma_f^{25} = 2.47 * 4.4628 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3} * 500 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 = 0.551156 \text{ cm}^{-1} \\
\Sigma_a &= N^{25} \sigma_a^{25} + N^{28} \sigma_a^{28} + N^{H_2O} \sigma_a^{H_2O} \\
&= 4.4628 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3} * 603 \times 10^{-24} + 1.07107 \times 10^{22} * 2.75 \times 10^{-24} \\
&\quad + 3.3461 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} * 0.58 \times 10^{-24} = 0.317968 \text{ cm}^{-1} \\
\Sigma_{tr} &= N^{25} \sigma_{tr}^{25} + N^{H_2O} \sigma_{tr}^{H_2O} \\
&= 4.4628 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3} * 10 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 + 1.07107 \times 10^{22} * 8.3 \times 10^{-24} \\
&\quad + 3.3461 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} * 69.5 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 = 2.4189 \text{ cm}^{-1} \\
D &= \frac{1}{3\Sigma_{tr}} = \frac{1}{3(2.4189 \text{ cm}^{-1})} = 0.137804 \text{ cm} \\
k_\infty &= f\eta = \frac{v\Sigma_f}{\Sigma_a} = \frac{0.551156 \text{ cm}^{-1}}{0.317968 \text{ cm}^{-1}} = 1.73337 \\
P_{NTh} &= \frac{1}{(B_g^2 L^2 + 1)} = \frac{1}{(B_g^2 \frac{D}{\Sigma_a} + 1)} \\
B_g^2 &= \left(\frac{2.405}{R'} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{H'} \right)^2 = \left(\frac{2.405}{145 \text{ cm}} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{300 \text{ cm}} \right)^2 = 2.710 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2} + 1.0966 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-2} = \\
&= 2.8197 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2} \\
R' &= R + z_0 \\
H' &= H + z_0 \\
z_0 &= \frac{0.711}{2.4189 \text{ cm}^{-1}} = 0.2939 \text{ cm} \\
B_m^2 &= \frac{v\Sigma_f - \Sigma_a}{D} = \frac{0.551156 \text{ cm}^{-1} - 0.317968 \text{ cm}^{-1}}{0.137804 \text{ cm}} = 1.692171 \text{ cm}^{-2} \\
k &= \frac{v}{v_c} = \frac{v\Sigma_f}{B_g^2 D + \Sigma_a} = \frac{0.551156 \text{ cm}^{-1}}{2.8197 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2} * 0.137804 \text{ cm} + 0.317968 \text{ cm}^{-1}} = 1.73125 \\
\rho &= \frac{k-1}{k} = \frac{1.73125-1}{1.73125} = 0.42238 \\
\$ &= \frac{\rho}{\beta} = \frac{0.42238}{0.0065} \approx 65 \$
\end{aligned}$$

Un exceso de reactividad considerable. El periodo del reactor correspondiente a esta reactividad es

$$T_+ = \frac{1 - \$}{\lambda \$} = \frac{1 - 65}{(0.0771 \text{ s}) (65)} = -12.77$$

Optimización del radio de las pastillas y paso entre barras de combustible, utilizando Teoría de Difusión en dos-grupos

Considere una celda unitaria de malla cuadrada, en la que el combustible está contenido en pastillas cilíndricas y contiene uranio metálico de densidad $\rho_F = 19 \frac{g}{cm^3}$, con un enriquecimiento $\epsilon = 3 \%$. El moderador es agua con una densidad de $\rho_{H_2O} = 0.95 \frac{g}{cm^3}$.

- a) Utilice la *Teoría de Difusión* de dos-grupos para calcular las constantes de multiplicación infinita y efectiva. Para ello use celdas homogeneizadas. En la tabla P 4.1 se presentan las

constantes nucleares en dos grupos, para el U^{235} (U^{25}), U^{238} (U^{28}) y H_2O . Considere un paso fijo del doble del radio de las pastillas; esto es $\frac{P}{2r_0} = 1.32$, que es la distancia de centro a centro entre barras. Utilice las constantes nucleares de dos-grupos de la tabla siguiente.

Tabla P 4.1. *Constantes nucleares de dos-grupos*

	$\nu\sigma_{f1}$	$\nu\sigma_{f2}$	$\sigma_{a1}(b)$	$\sigma_{a2}(b)$	$\sigma_{R1}(b)$
U^{25}	21	750	13	360	
U^{28}	0.33		0.9	1.6	
H_2O			0.0183	0.3802	0.6148

Fuente: Graves (1976).

Solución:

El primer paso es calcular el radio de una celda homogénea equivalente. En el caso de una malla cuadrada el área alrededor de la barra P^2 debe ser equivalente a una sección de radio circular alrededor de cada barra πR^2 , de donde

$$R = \sqrt{\frac{P^2}{\pi}} = \sqrt{\frac{2(1.32 r_0)^2}{\pi}} \quad (a)$$

La densidad atómica del uranio en la celda homogénea puede calcularse mediante

$$(N_U)_H = \frac{(\rho_U)_H N_A}{A_U} \quad (b)$$

No se conoce la densidad del uranio en la celda homogénea, pero por definición $(\rho_U)_H = \frac{m_U}{V_{cell}}$ y como $m_U = \rho_F V_F$ se trata de una celda cilíndrica: $V_F = \pi r_0^2$, $V_{cell} = \pi R^2$. Se sustituye en $(\rho_U)_H = \frac{\pi r_0^2 \rho_F}{\pi R^2}$ y luego en $(N_U)_H$

$$(N_U)_H = \frac{\pi r_0^2 \rho_F N_A}{\pi R^2 A_U} = \frac{\rho_F N_A}{A_U} \left(\frac{r_0}{R}\right)^2$$

Es $A_U = (0.03)(235.05) + (0.97)(238.04) = 237.9503$ para un enriquecimiento de 3 %.

Para el agua, por analogía, fácilmente se puede ver que

$$(N_{H_2O})_H = \frac{\rho_{H_2O} N_A}{A_{H_2O}} \left(\frac{R^2 - r_0^2}{R^2}\right)$$

Lo que implica que no se necesita conocer las masas ni los volúmenes de los componentes de la celda para calcular las densidades atómica y molecular.

Al definir r_0 se puede calcular R y las densidades moleculares. Para $r_0 = 0.5 \text{ cm}$: $(N_U)_H = 2.453715 \times 10^{22}$, $(N^{25})_H = 7.361145 \times 10^{20}$, $(N^{28})_H = 2.380103 \times 10^{22}$ y $(N_{H_2O})_H = 1.556966 \times 10^{22}$. Al utilizar las densidades nucleares anteriores, las constantes nucleares macroscópicas resultan

Tabla P4.2. *Constantes nucleares macroscópicas*

	$\nu\Sigma_{f1}$	$\nu\Sigma_{f2}$	$\Sigma_{a1}(\text{b})$	$\Sigma_{a2}(\text{b})$	$\Sigma_{12}(\text{b})$
U^{25}	0.015458	0.5520859	0.0095694	0.265001	
U^{28}	0.007854		0.020709	0.038081	
H_2O			0.0284925	0.005919	0.0095722
	0.0233127	0.5520859	0.0312753	0.309002	0.0095722

Fuente: elaboración propia.

Para el cálculo de la constante de multiplicación infinita se pueden usar las ecuaciones

$$k_1 = \frac{\nu\Sigma_{f1}}{\Sigma_{a1} + \Sigma_{12}} \quad (7.42)$$

$$k_2 = \frac{\nu\Sigma_{f2}}{\Sigma_{a2}} \quad (7.43)$$

$$P_{NF} = \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{a1} + \Sigma_{12}} \quad (7.44)$$

$$k_{\infty} = k_1 + k_2 P_{NF} \quad (7.45)$$

Puede verificarse que

$$k_1 = 0.570725$$

$$k_2 = 1.786671$$

$$p_R = 0.234340$$

$$k_{\infty} = k_1 + k_2 p_R = 0.989414$$

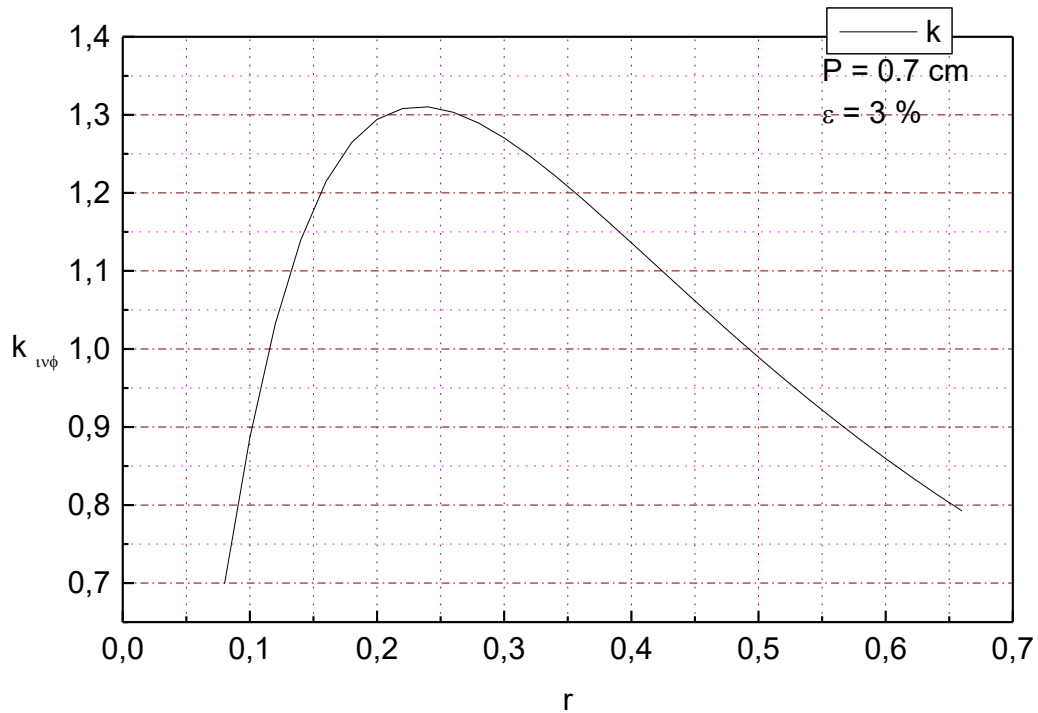
- b) Determine cuál debe ser el radio óptimo de las pastillas r_0 . Para facilitar los cálculos haga un programa en el determine cuál debe ser el radio óptimo de las pastillas r_0 (no se incluye el programa).

Solución:

Se trata de un *loop* en el que se repiten los mismos cálculos del inciso a), cambiando solamente el radio de las pastillas y manteniendo el enriquecimiento (3 %) y el paso de las barras (0.7 cm).

Sorprendentemente el radio optimo es 0.24 cm, que dista mucho de ser del orden de magnitud típico. Puede verificarse en la gráfica que para un radio 0.5 cm $k_{\infty} < 1$, lo cual concuerda con el inciso a)

Figura P4.1. Constante de multiplicación infinita en función del radio de las pastillas



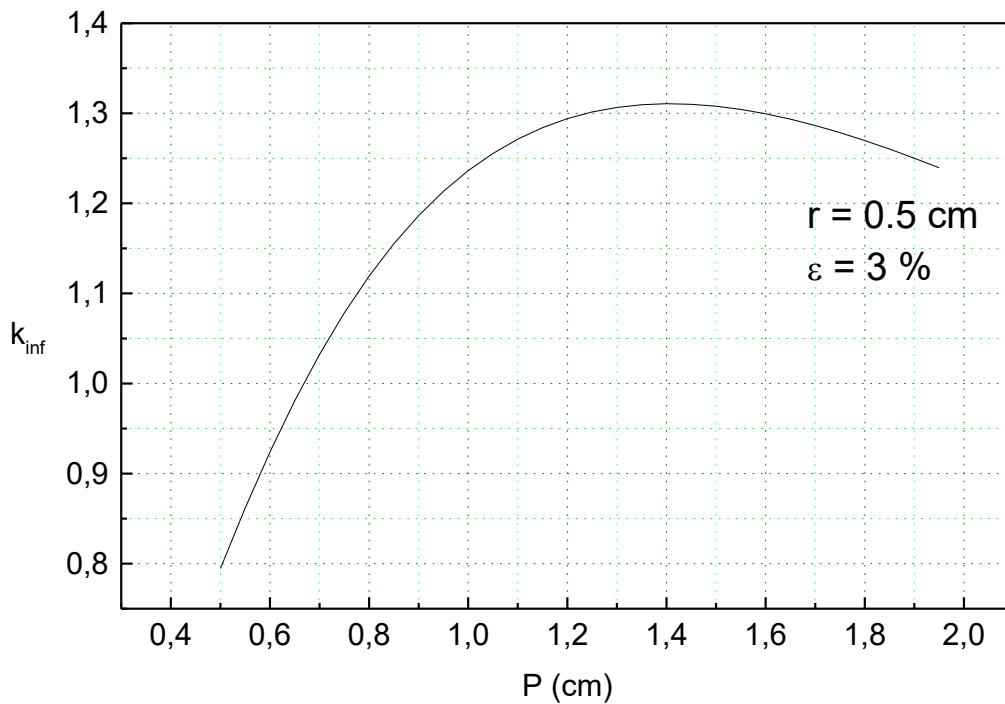
Fuente: elaboración propia.

- c) Determinar cuál debe ser el paso óptimo entre barra y barra, así como el radio correspondiente de la celda homogénea. Para facilitar los cálculos sobre un programa similar, solo varíe P (no se incluye el programa).

Nota: también se trata de un *loop* en el que se repiten los mismos cálculos del inciso a), cambiando solamente el paso entre barras, manteniendo el enriquecimiento (3 %) y el radio de las barras (0,5 cm).

Sorprendentemente el paso óptimo es del orden de $1,4 \text{ cm} \frac{P}{2r_0} = 1,4$, que no dista mucho del paso típico (1,32) (figura 14).

Figura P4.2. Constante de Multiplicación infinita en función del paso entre celdas



Fuente: elaboración propia.

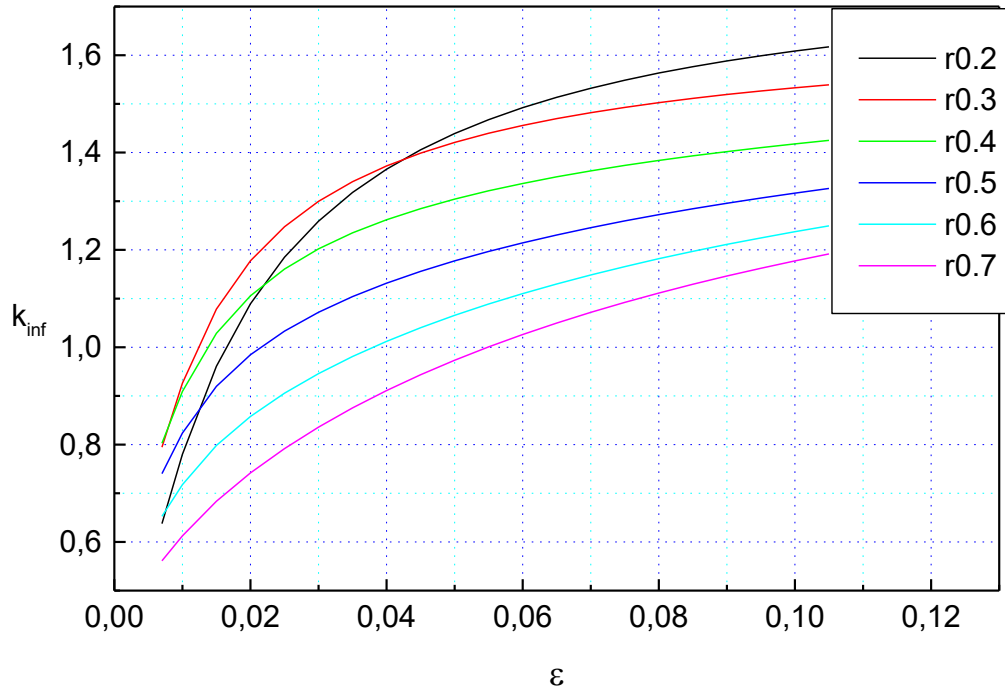
- d) Determine el comportamiento de la constante de multiplicación en función del enriquecimiento para diferentes radios de las pastillas de combustible.

Solución:

Se trata de un doble *loop*: uno en el que se repiten los mismos cálculos del inciso a), cambiando solamente el radio de las pastillas; y otro exterior en el que se va cambiando el enriquecimiento comenzando con uranio natural.

En la gráfica puede verse que la constante de criticidad crece más rápido para barras muy delgadas, pero no mejora mucho a medida que las barras se engruesan a pesar de que el enriquecimiento aumente. Seguramente eso se debe a que a menor volumen de moderador se reduce la longitud de difusión.

Figura P4.3. Constante de multiplicación infinita en función enriquecimiento de U^{235}



Fuente: elaboración propia.

Optimización del tamaño radio del mismo reactor (P 6)

Para ello se hace uso de *Teoría de Difusión* de un-grupo y las constantes de un-grupo.

	$\sigma_a(b)$	$\sigma_{tr}(b)$	$\sigma_f(b)$	ν
H_2O	0.58	69.5		
U^{25}	603	10	500	2.47
U^{28}	11.577	9.1	11E-6	2.47

Nota: las constantes nucleares para el U^{25} y el H_2O han sido tomados del Zweifel (1973), los datos de U^{28} fueron tomados de Isotope Browser, IAEA, Nuclear Data Sección.

De acuerdo con el inciso a) del problema anterior, para una celda unitaria con $r_0 = 0.5$ cm y $R = 0.7$ cm las densidades numéricas son $(N_U)_H = 2.453715 \times 10^{22}$, $(N^{25})_H = 7.361145 \times 10^{20}$, $(N^{28})_H = 2.380103 \times 10^{22}$ y $(N_{H_2O})_H = 1.556966 \times 10^{22}$. Al utilizar las densidades nucleares anteriores, las constantes nucleares macroscópicas resultan

$$\begin{aligned}
 \nu \Sigma_f &= \nu^{25} N^{25} \sigma_f^{25} + \nu^{28} N^{28} \sigma_f^{28} \\
 &= 2.47 * 7.361145 \times 10^{20} \text{cm}^{-3} * 500 \times 10^{-24} \text{cm}^2 + 2.47 * 2.380103 \times 10^{22} \text{cm}^{-3} \\
 &\quad * 11 \times 10^{-30} \text{cm}^2 = 0.9090 \text{cm}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_a^F &= N^{25}\sigma_a^{25} + N^{28}\sigma_a^{28} \\ &= 7.361145 \times 10^{20} \text{cm}^{-3} * 603 \times 10^{-24} + 2.380103 \times 10^{22} \text{cm}^{-3} * 11.577 \times 10^{-24} \\ &= 0.733321\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_a &= N^{25}\sigma_a^{25} + N^{28}\sigma_a^{28} + N^{H_2O}\sigma_a^{H_2O} \\ &= 7.361145 \times 10^{20} \text{cm}^{-3} * 603 \times 10^{-24} + 2.380103 \times 10^{22} \text{cm}^{-3} * 11.577 \times 10^{-24} \\ &\quad + 1.556966 \times 10^{22} \text{cm}^{-3} * 0.58 \times 10^{-24} = 0.782351 \text{cm}^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{tr} &= N^{25}\sigma_{tr}^{25} + N^{28}\sigma_{tr}^{28} + N^{H_2O}\sigma_{tr}^{H_2O} \\ &= 7.361145 \times 10^{20} \text{cm}^{-3} * 10 \times 10^{-24} \text{cm}^2 + 2.380103 \times 10^{22} \text{cm}^{-3} * 9.1 \times 10^{-24} \\ &\quad + 1.556966 \times 10^{22} \text{cm}^{-3} * 69.5 \times 10^{-24} \text{cm}^2 = 1.30604 \text{cm}^{-1}\end{aligned}$$

El factor de utilización térmica es $f = \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a}$

El rendimiento del combustible $\eta = v \frac{\sigma_f}{\sigma_a} = \frac{v^{25}\sigma_f^{25}}{\sigma_a} = \frac{2.47 * 500 \times 10^{-24} \text{cm}^2}{603 \times 10^{-24} \text{cm}^2} = 2.04809$

$$k_\infty = f\eta = \frac{v\Sigma_f}{\Sigma_a} = \frac{0.9090 \text{cm}^{-1}}{0.782351 \text{cm}^{-1}} = 1.16188$$

$$D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}} = \frac{1}{3(1.30604 \text{cm}^{-1})} = 0.2552244 \text{cm}$$

Luego

$$B_m^2 = \frac{v\Sigma_f - \Sigma_a}{D} = \frac{0.0413243 \text{cm}^{-1} - 0.039843 \text{cm}^{-1}}{0.143315 \text{cm}} = 0.496226 \text{cm}^{-2}$$

En criticidad $B_g^2 = B_m^2$

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} = \frac{0.2552244 \text{cm}}{0.782351 \text{cm}^{-1}} = 0.326227 \text{cm}^2$$

$$\therefore B_g = B_m = 0.704433 \text{cm}^{-1}$$

$$P_{NTh} = \frac{1}{B_c^2 L^2 + 1} = \frac{1}{0.496226 \text{cm}^{-2} * 0.326227 \text{cm}^2 + 1} = 0.86067$$

$$k_{eff} = k_\infty * P_{NTh} = 1.16188 * 0.86067 = 0.9999978$$

P 5. Incidente de criticidad

Mezcla cuasicrítica de berilio y U^{235}

Considere una mezcla homogénea de berilio y U^{235} , contenida en un cilindro de 40 cm de diámetro y 40 cm de altura, que se encuentra almacenada en un laboratorio.

Datos de la mezcla:

$$L_{Be} = 23.6 \text{ cm}, \quad D_{Be} = 0.7 \text{ cm}, \quad \Sigma_a^{Be} = 0.0013 \text{ cm}^{-1}, \quad \Sigma_a^{25} = 0.0127 \text{ cm}^{-1}, \\ \eta = 2.07, \quad L_{H_2O} = 2.85 \text{ cm}, \quad D_{H_2O} = 0.16 \text{ cm},$$

Determine las características de la mezcla en el cilindro.

- Calcular la relación $\frac{N_{Be}}{N_{25}}$
- Calcular el volumen de los componentes Be- U^{235}
- Calcular la masa de los componentes
- Calcular la densidad de la mezcla

Solución:

- Calcular la relación $\frac{N_{Be}}{N_{25}}$.

Dado que de los datos del problema se conocen las secciones transversales macroscópicas de absorción de los dos componentes, y como $\Sigma_a^{Be} = N_{Be} \sigma_a^{Be}$ y $\Sigma_a^{25} = N_{25} \sigma_a^{25}$, se dividen ambas expresiones y rearrreglan de la siguiente manera:

$$\frac{N_{Be}}{N_{25}} = \frac{\Sigma_a^{Be}}{\Sigma_a^{25}} \frac{\sigma_a^{25}}{\sigma_a^{Be}} \quad (1)$$

Mediante la International Atomic Energy Agency (2024) conocemos $\sigma_a^{Be} = 0.00827 \text{ b}$ y $\sigma_a^{25} = 681.4 \text{ b}$. Además, de los datos del problema se conocen $\Sigma_a^{Be} = 0.0013 \text{ cm}^{-1}$, $\Sigma_a^{25} = 0.0127 \text{ cm}^{-1}$. Por tanto, se sustituyen

$$\frac{N_{Be}}{N_{25}} = \left(\frac{0.0013 \text{ cm}^{-1}}{0.0127 \text{ cm}^{-1}} \right) \left(\frac{681.4 \text{ b}}{0.00827 \text{ b}} \right) = 8433.8$$

- Calcular el volumen de los componentes Be- U^{235} .

Las densidades de ambos componentes puros son $\rho_{Be} = 1.85 \text{ g/cm}^3$ y $\rho_{25} = 10 \text{ g/cm}^3$.

La definición de densidad se expresa $\rho_{Be} = \frac{w_{Be}}{V_{Be}}$ y $\rho_{25} = \frac{w_{25}}{V_{25}}$

Al dividir ambas expresiones

$$\frac{\rho_{Be}}{\rho_{25}} = \frac{w_{Be}}{V_{Be}} \frac{V_{25}}{w_{25}} = \frac{w_{Be}}{w_{25}} \frac{V_{25}}{V_{Be}} \quad (2)$$

Como $V_T = V_{25} + V_{Be}$ o $V_{25} = V_T - V_{Be}$ o $V_{Be} = V_T - V_{25}$, se sustituye V_{25}

$$\frac{\rho_{Be}}{\rho_{25}} = \frac{w_{Be}}{w_{25}} \left[\frac{V_T - V_{Be}}{V_{Be}} \right] = \frac{w_{Be}}{w_{25}} \left[\frac{V_T}{V_{Be}} - 1 \right] \quad (3)$$

También se sustituye V_{Be}

$$\frac{\rho_{Be}}{\rho_{25}} = \frac{w_{Be}}{w_{25}} \left[\frac{V_{25}}{V_t - V_{25}} \right] = \frac{w_{Be}}{w_{25}} \left[\frac{1}{\frac{V_T}{V_{25}} - 1} \right] \quad (4)$$

El volumen del cilindro es

$$V_T = \pi R^2 H = \pi (20 \text{ cm}^2) (40 \text{ cm}) = 50\,265.48 \text{ cm}^3$$

La relación entre los pesos de ambos componentes $\left[\frac{w_{Be}}{w_5} \right]$ se puede conocer a partir de la definición de densidad nuclear $N_{Be} = \frac{w_{Be} N_A}{A_{Be}}$ y $N_5 = \frac{w_5 N_A}{A_5}$, donde ambas expresiones se dividen

$$\begin{aligned} \frac{N_{Be}}{N_5} &= \frac{w_{Be}}{A_{Be}} \frac{A_{25}}{w_{25}} \quad y \\ \frac{w_5}{w_{Be}} &= \frac{N_{25}}{N_{Be}} \frac{A_{25}}{A_{Be}} \end{aligned} \quad (5)$$

y

$$\frac{w_{Be}}{w_{25}} = \frac{N_{Be}}{N_{25}} \frac{A_{Be}}{A_{25}} \quad (6)$$

donde todo se conoce.

Se sustituye en la ecuación (5)

$$\frac{w_5}{w_{Be}} = \left[\frac{1}{8433.8} \right] \left[\frac{235}{9} \right] = 3.096 \times 10^{-3}$$

De la ecuación (3) se conoce todo, así que se puede despejar V_{Be}

$$V_{Be} = \frac{V_T}{\frac{\rho_{Be}}{\rho_{25}} \frac{w_{25}}{w_{Be}} + 1} \quad (3')$$

Y se sustituye

$$V_{Be} = \frac{V_T}{\frac{\rho_{Be}}{\rho_{25}} \frac{w_{25}}{w_{Be}} + 1} = \frac{50\,265.48 \text{ cm}^3}{\left(\frac{1.85 \text{ g/cm}^3}{10 \text{ g/cm}^3} \right) (3.096 \times 10^{-3}) + 1} = 50\,250.33 \text{ cm}^3 \quad (3')$$

De la ecuación (4) se despeja V_{25}

$$V_{25} = \frac{V_T}{\frac{\rho_{25} w_{Be}}{\rho_{Be} w_{25}} + 1} \quad (4)$$

Y se sustituye

$$V_{25} = \frac{50\,265.48 \text{ cm}^3}{\left(\frac{10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{1.85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \right) (3.096 \times 10^{-3}) + 1} = 15.14 \text{ cm}^3 \quad (4)$$

- c) Calcular la masa de los componentes.

De la definición de densidad $\rho_{Be} = \frac{w_{Be}}{V_{Be}}$ y $\rho_{25} = \frac{w_5}{V_5}$

$$w_{Be} = \rho_{Be} V_{Be} = \left(1.85 \frac{g}{cm^3}\right) (50\,250.33\,cm^3) = 92\,963.11\,g \cong 92.96\,kg$$

y

$$w_{25} = \rho_{25} V_{25} = \left(10 \frac{g}{cm^3}\right) (15.14\,cm^3) = 287.66\,g$$

- d) Calcular la densidad de la mezcla.

$$\rho_{Mezcla} = \frac{w_T}{V_T} = \frac{93\,250.77\,g}{50\,265.48\,cm^3} = 1.8555 \frac{g}{cm^3}$$

Incursión de un laboratorista sobre mezcla de Berilio y U^{235}

El cilindro con la mezcla de berilio y U^{235} se encuentra almacenada en un laboratorio. En condiciones normales la mezcla no es crítica. Desgraciadamente un laboratorista se sienta en el cilindro, ¿qué pasa enseguida?

Calcular antes del incidente:

- El factor de utilización térmica f .
- La constante de multiplicación infinita de la mezcla.
- Demuestre que el área de difusión de la mezcla es equivalente a $L_c^2 = L_{Be}^2(1 - f)$
- Calcule el área de multiplicación de la mezcla.
- Explique por qué se requiere la *Teoría de Difusión* para calcular el factor de multiplicación efectiva, después del incidente.
- Utilice la ecuación general de difusión de un grupo para establecer las ecuaciones de difusión del cilindro y del laboratorista, considerado a este como un reflector de neutrones.
- Calcule el *buckling* material después del incidente.
- Calcule la constante de multiplicación efectiva.

Datos del problema:

$$L_{Be} = 23.6\,cm, \quad D_{Be} = 0.7\,cm, \quad \Sigma_a^{Be} = 0.0013\,cm^{-1}, \quad \Sigma_a^{25} = 0.0127\,cm^{-1}, \\ \eta = 2.07, \quad L_{H_2O} = 2.85\,cm, \quad D_{H_2O} = 0.16\,cm,$$

Solución:

- a) De acuerdo con la ecuación (1.26) el factor de utilización térmica es

$$f = \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a} = \frac{\Sigma_a(U^{235})}{\Sigma_a(U^{235}) + \Sigma_a(Be)} = \frac{0.0127\,cm^{-1}}{0.0127\,cm^{-1} + 0.0013\,cm^{-1}} = 0.907$$

- b) Si se considera que el factor de fisión rápida y la probabilidad de escape a la resonancia es $\epsilon p = 1$, la constante de multiplicación infinita puede reducirse a $k_\infty = f\eta$. Luego, se sustituye

$$k_\infty = f\eta = 0.907 * 2.07 = 1.88$$

c) El área de difusión de la mezcla en el cilindro está dada por

$$L_c^2 = \frac{D_c}{\Sigma_{ac}} = \frac{D_c}{\Sigma_a(U^{235}) + \Sigma_a(Be)}$$

Se multiplica y divide por $\Sigma_a(Be)$

$$L_c^2 = \frac{D_c}{\Sigma_a(Be)} \frac{\Sigma_a(Be)}{\Sigma_a(U^{235}) + \Sigma_a(Be)}$$

Después, se suman y restan $\Sigma_a(U^{235})$ en el segundo término

$$L_c^2 = \frac{D_c}{\Sigma_a(Be)} \frac{\Sigma_a(U^{235}) + \Sigma_a(Be) - \Sigma_a(U^{235})}{\Sigma_a(U^{235}) + \Sigma_a(Be)}$$

Como $D_c = D_{Be}$, se reduce y utiliza la definición de f

$$L_c^2 = \frac{D_{Be}}{\Sigma_a(Be)} \left(1 - \frac{\Sigma_a(U^{235})}{\Sigma_a(U^{235}) + \Sigma_a(Be)} \right) = L_{Be}^2 (1 - f)$$

d) Por tanto, el área de difusión de la mezcla en el cilindro resulta

$$L_c^2 = L_{Be}^2 (1 - f) = (23.6 \text{ cm})^2 (1 - 0.907) = 51.79 \text{ cm}^2$$

e) De acuerdo a la ecuación (4.77a) la constante de multiplicación efectiva está dada por

$$k_{eff} = \frac{k_{\infty}}{(B^2 L^2 + 1)}$$

Y, de acuerdo con la ecuación (4.18), el *buckling* material está dado por

$$B_m^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

Para utilizar el *buckling* material, el problema es que no se conoce $\nu \Sigma_f$, pero conociendo la eficiencia del combustible, ecuación (1.27) $\eta = \frac{\nu \Sigma_f^{25}}{\Sigma_a^{25}}$, puede determinarse fácilmente. Esto es

$$\nu \Sigma_f^{25} = \eta \Sigma_a^{25}$$

luego

$$\begin{aligned} B_m^2 &= \frac{\eta \Sigma_a^{25} - (\Sigma_a^{Be} + \Sigma_a^{25})}{D} = \frac{\Sigma_a^{25} (\eta - 1) - \Sigma_a^{Be}}{D} = \\ &= \frac{0.0127 \text{ cm}^{-1} (2.07 - 1) - 0.0013 \text{ cm}^{-1}}{0.7 \text{ cm}} = 0.017555 \text{ cm}^{-2} \end{aligned}$$

Luego, la constante de multiplicación efectiva resulta

$$k_{eff} = \frac{k_{\infty}}{(B^2 L^2 + 1)} = \frac{1.88}{(0.017555 \text{ cm}^{-2} * 51.79 \text{ cm}^2 + 1)} = 0.9847$$

Lo que demuestra que la mezcla del cilindro no es crítica.

Alternativamente, puede utilizarse el *buckling* geométrico, ecuación (4.66)

$$B_g^2 = \left(\frac{2.405}{R'}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2H'}\right)^2$$

donde $R' = R + z_0$ y $H' = H + z_0$ son las fronteras extrapoladas.

Si la longitud extrapolada está dada por la ecuación (3.18) $\left[z_0 = \frac{2}{3\Sigma_{tr}}\right]$, y utilizando la definición del coeficiente de difusión $D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}(r)}$, z_0 puede ser aproximada como

$$z_0 = 2D \quad (3.20)$$

Luego $R' = R + z_0 = 20 \text{ cm} + 2(0.7 \text{ cm}) = 21.4 \text{ cm}$ y $H' = H + z_0 = 20 \text{ cm} + 2(0.7 \text{ cm}) = 21.4 \text{ cm}$.

Por tanto,

$$B_g^2 = \left(\frac{2.405}{R'}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2H'}\right)^2 = \left(\frac{2.405}{21.4 \text{ cm}}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2(21.4 \text{ cm})}\right)^2 = 0.0180178 \text{ cm}^{-2}$$

Y

$$k_{eff} = \frac{k_{\infty}}{(B^2 L^2 + 1)} = \frac{1.88}{(0.0180178 \text{ cm}^{-2} * 51.79 \text{ cm}^2 + 1)} = 0.9725$$

Pero ¿cuál cálculo es el correcto? y ¿qué *buckling* utilizar, el geométrico o el material? En este caso la constante de multiplicación efectiva prácticamente coincide para ambos *buckling*. Para el cálculo de k_{∞} se utiliza el *buckling* material que da cuenta de las propiedades nucleares del sistema. Para el cálculo de k_{eff} se debe utilizar el *buckling* geométrico puesto que de la geometría depende la probabilidad de escape de los neutrones.

Procedimiento alternativo combinando con la Teoría de Fermi

Utilizando la ecuación (8.6)

$$k_{\infty} = \frac{1}{P_{NTh}} = (B_m^2 L_c^2 + 1) \quad (8.6)$$

como

$$L_c^2 = 51.79 \text{ cm}^2$$

$$k_{\infty} = (B_m^2 L_c^2 + 1) = (0.017555 \text{ cm}^{-2})(51.79 \text{ cm}^2) + 1 = 1.909$$

$$P_{NTh} = \frac{1}{1 + B_m^2 L_c^2} = \frac{1}{1 + 0.017555 \text{ cm}^{-2} * 51.79 \text{ cm}^2} = 0.52378$$

De acuerdo a la Teoría de Fermi, el *buckling* material puede calcularse mediante

$$B_m^2 = \frac{\frac{v\Sigma_f}{\Sigma_a} - 1}{L^2 + \tau} \quad (6.92a)$$

Donde

$$M^2 = L^2 + \tau = \frac{\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a} - 1}{B_m^2}$$

$$M^2 = \frac{\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a} - 1}{B_m^2} = \frac{\frac{\eta\Sigma_a^{25}}{\Sigma_a^{Be} + \Sigma_a^{25}} - 1}{B_m^2} = \frac{\frac{(2.07)(0.0127 \text{ cm}^{-1})}{0.0127 \text{ cm}^{-1} + 0.0013 \text{ cm}^{-1}} - 1}{0.017555 \text{ cm}^{-2}} = 50.0 \text{ cm}^2$$

$$\tau = L_c^2 - M^2$$

$$\tau = L_c^2 - M^2 = (51.79 - 50.0) \text{ cm}^2 = 1.79 \text{ cm}^2$$

$$P_{NF} = \frac{1}{1 + B^2\tau} = \frac{1}{1 + 0.017555 \text{ cm}^{-2} * 1.79 \text{ cm}^2} = 0.9695$$

Luego

$$k_{eff} = k_{\infty} P_{NF} P_{NTh} = (1.909)(0.9695)(0.5237) = 0.9695$$

Lo cual nuevamente demuestra que en el sistema no es crítico, sin embargo, está muy cerca de serlo.

- f) El laboratorista puede inducir un efecto de moderación o de reflexión de neutrones de escape. Para evaluar el eventual efecto del laboratorista sobre la mezcla se necesitan formular y resolver las ecuaciones de difusión para los dos medios, puesto que modifica las propiedades nucleares del sistema.

De acuerdo con la ecuación (4.2), si el **cilindro** se considera como la región 1, para un grupo la ecuación de difusión correspondiente es

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(r, z, t) + \Sigma_{a1} \phi_1(r, z, t) - D_1 \nabla^2 \phi_1(r, z, t) = \nu \Sigma_f \phi_1(r, z, t) \quad (1)$$

o bien

$$\frac{1}{u D_1} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(r, z, t) = \nabla^2 \phi_1(r, z, t) + \left(\frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_{a1}}{D_1} \right) \phi_1(r, z, t)$$

$$\frac{1}{u D_1} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(r, z, t) = \nabla^2 \phi_1(r, z, t) + B_m^2 \phi_1(r, z, t) \quad (1a)$$

Mientras que para el laboratorista, considerado como un **reflector** región 2, la ecuación de difusión es

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \phi_2(r, z, t) + \Sigma_{a2} \phi_2(r, z, t) - D_2 \nabla^2 \phi_2(r, z, t) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{u D_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_2(r, z, t) = \nabla^2 \phi_2(r, z, t) - \frac{\Sigma_{a2}}{D_2} \phi_2(r, z, t)$$

$$\frac{1}{u D_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_2(r, z, t) = \nabla^2 \phi_2(r, z, t) - \frac{1}{L_2^2} \phi_2(r, z, t) \quad (2a)$$

Las ecuaciones (1') y (2') se resuelven mediante separación de variables, al hacer

$$\phi_i(r, z, t) = R(r)Z(z)T(t) \quad (3)$$

De acuerdo con la ecuación (4.41), en coordenadas cilíndricas el Laplaciano es

$$\nabla^2 \phi_i(r, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_i(r, z) \quad (4.41)$$

donde las derivadas están dadas por las ecuaciones (4.44), (4.45) y (4.46) y son

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi_i(r, z, t) &= R(r)Z(z)T'(t), & \frac{\partial}{\partial r} \phi_i(r, z, t) &= R'(r)Z(z)T(t), \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi_i(r, z, t) &= R''(r)Z(z)T(t), & \frac{\partial}{\partial z} \phi_i(r, z, t) &= R(r)Z'(z)T(t), \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_i(r, z, t) &= R(r)Z''(z)T(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Para el **cilindro** (región 1) se sustituye la ecuación (4) en la (1') y se divide entre $\phi_1(r, z, t) = R(r)Z(z)T(t)$, por lo que la ecuación (1') se convierte en

$$\frac{1}{u} \frac{T'(t)}{D_1} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{Z''(r)}{Z(r)} + B_m^2 \quad (1b)$$

donde se hace

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \gamma; \quad \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} = \alpha_1^2; \quad \frac{Z''(r)}{Z(r)} = -\beta_1^2 \quad (5)$$

La ecuación (1b) se puede simplificar como

$$\frac{\gamma}{u D_1} = \alpha_1^2 - \beta_1^2 + B_m^2 \quad (6)$$

Las soluciones generales de las ecuaciones (5) son respectivamente

$$T(t) = T_0 e^{\gamma t} + T_1 e^{-\gamma t} \quad (7)$$

$$R(r) = R_0 J_0(\alpha r) + R_1 Y_0(\alpha r) \quad (8)$$

$$Z(z) = Z_0 \cos \beta_1 z + Z_1 \operatorname{sen} \beta_1 z \quad (9)$$

donde $J_0(\alpha r)$ y $Y_0(\alpha r)$ son las funciones de Bessel de 1ª clase.

En el caso de la dependencia temporal, la ecuación (7) T_1 debe ser cero, puesto que evidentemente el flujo debe de aumentar con el tiempo. Por tanto,

$$T(t) = T_0 e^{\gamma t} \quad (7a)$$

En el caso de la dependencia radial, ecuación (8), R_1 debe ser cero porque si $r \rightarrow 0$, $Y_0(0) \rightarrow -\infty$ (Figura A6). Por tanto, la dependencia radial resulta

$$R(r) = A J_0(\alpha_1 r) \quad (8a')$$

Y como en la frontera radial extrapolada $r = R'$, el flujo debe ser cero en $r = R'$. Esto es $R(R') = 0$

Por tanto,

$$0 = A J_0(\alpha R') \quad (4.56)$$

En la figura A1 (anexo 2) se observa que la primera raíz de J_0 es 2.405. Luego, $\alpha R' = 2.405$. Por lo tanto,

$$\alpha = \frac{2.405}{R'} \quad (4.57)$$

Después se sustituye en la ecuación (4.54)

$$R(\rho) = A J_0 \left(\frac{2.405}{R'} r \right) \quad (8b)$$

En el caso de la dependencia axial, previo al incidente, conviene reconocer una simetría axial, para ello es conveniente la solución

$$Z(z) = Z_0 \cos \beta_1(z) \quad (9a)$$

En la frontera extrapolada, en $z = \pm H'$, $Z(\pm H') = 0$, lo que implica que $0 = \cos(\beta_1 H')$.

Hay muchos valores para los cuales ocurre esto $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \dots$, el primer valor positivo es $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, $\beta_1 H' = \frac{\pi}{2}$ y $\beta_1 = \frac{\pi}{2H'}$, de manera semejante a la ecuación (4.59).

De manera semejante, para el **reflector** (región 2) la ecuación (1a) se convierte en

$$\frac{1}{u} \frac{T'(t)}{D_2 T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{Z''(r)}{Z(r)} - \frac{1}{L_2^2} = 0 \quad (2b)$$

Y la ecuación (2'') se convierte en

$$\frac{\gamma}{u D_2} = \alpha_2^2 + \beta_2^2 - \frac{1}{L_2^2} \quad (11)$$

Las soluciones de las ecuaciones (2'') son respectivamente:

$$\begin{aligned} T(t) &= A e^{\gamma t} + C e^{-\gamma t}; \quad R(r) = D J_0(\alpha r) + E Y_0(\alpha r); \\ Z(z) &= F e^{-\beta_2 z} + G e^{\beta_2 z} \end{aligned} \quad (12)$$

donde $J_0(\alpha r)$ y $Y_0(\alpha r)$ son las funciones de Bessel de 1ª clase.

C debe ser cero, puesto que evidentemente el flujo debe de aumentar con el tiempo. E debe también ser cero porque si $r \rightarrow 0$, $Y_0(0) \rightarrow -\infty$. Y G también debe ser cero, ya que $z \rightarrow \infty$, $Z(\infty) \rightarrow 0$.

Se sustituyen en la ecuación (3)

$$\phi_2(r, z, t) = R(r)Z(z)T(t) = A_1 J_0(\alpha_2 r) e^{-\beta_2 z} e^{\gamma t} \quad (13)$$

i) Condiciones de continuidad del flujo.

Si designamos $z = 0$ a la parte superior del cilindro, en ese punto la continuidad del flujo implica que

$$\phi_1(r, 0, t) = \phi_2(r, 0, t) \quad (14)$$

En realidad, el comportamiento radial es semejante tanto en el cilindro como en el reflector, lo que implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{2.405}{R'}$, por tanto, se sustituye en las ecuaciones (10) y (13)

$$\phi_1(r, z, t) = A J_0 \left(\frac{2.405}{R'} r \right) \cos \beta_1 z e^{\gamma t} \quad (10a)$$

$$\phi_2(r, z, t) = A_1 J_0 \left(\frac{2.405}{R'} r \right) e^{-\beta_2 z} e^{\gamma t} \quad (13a)$$

Se evalúan las ecuaciones (10a) y (13a) en $z = 0$ y aplica la condición de continuidad del flujo, ecuación (14)

$$A J_0 \left(\frac{2.405}{R'} r \right) \cos \beta_1(0) e^{\gamma t} = A_1 J_0 \left(\frac{2.405}{R'} r \right) e^{-\beta_2(0)} e^{\gamma t} \quad (14a)$$

donde, se reduce

$$A = A_1 \quad (15)$$

ii) Condición de continuidad de la corriente

$$-D_1 \frac{\partial \phi_1(\rho, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = -D_2 \frac{\partial \phi_2(\rho, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (16)$$

Se derivan las ecuaciones (10a) y (13a) respecto a z , se sustituyen en la condición de continuidad de la corriente, ecuación (16), y se evalúa en $z = 0$

$$D_1 \beta_1 J_0 \left(\frac{2.405}{R'} r \right) \sin[\beta_1(0)] e^{\gamma t} = D_2 \beta_2 J_0 \left(\frac{2.405}{R'} r \right) e^0 e^{\gamma t} \quad (16a)$$

Al reducir se concluye que

$$\beta_2 = 0$$

Se despeja γ de las ecuaciones (6) y (11), y se igualan

$$u D_1 (\alpha_1^2 - \beta_1^2 + B_m^2) = u D_2 \left(\alpha_2^2 + 0 - \frac{1}{L_2^2} \right) \quad (17)$$

Lo que implica que

$$B_m^2 = \frac{D_2}{D_1} \left(\alpha_2^2 + 0 - \frac{1}{L_2^2} \right) - \alpha_1^2 + \beta_1^2 \quad (18)$$

Se asume que la influencia del laboratorio es solo en la parte superior del cilindro

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{2.405}{R'}$$

Por tanto, la ecuación (21) se reduce a

$$B_m^2 = \frac{D_2}{D_1} \left(\left(\frac{2.405}{R'} \right)^2 - \frac{1}{L_2^2} \right) - \left(\frac{2.405}{R'} \right)^2 + \beta_1^2 \quad (19)$$

y como $\beta_1 = \frac{\pi}{2H'}$

$$B_m^2 = \frac{D_2}{D_1} \left(\left(\frac{2.405}{R'} \right)^2 - \frac{1}{L_2^2} \right) - \left(\frac{2.405}{R'} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2H'} \right)^2 \quad (20)$$

Cálculos numéricos

Asumiendo que el coeficiente de difusión del cilindro se debe estrictamente al berilio $D_1 = D_{Be} = 0.70$ cm y que el reflector es estrictamente agua: $D_2 = D_{H_2O} = 0.16$ cm y $L_2 = L_{H_2O} = 2.85$ cm, $z_0 = 1.4$ cm, $R' = 21.4$ cm.

$$\beta_1 = \frac{\pi}{H'} = \frac{\pi}{21.4}$$

Y se sustituye en la ecuación (18)

$$B_m^2 = \frac{0.16 \text{ cm}}{0.7 \text{ cm}} \left[\left(\frac{2.405}{21.4} \right)^2 - \frac{1}{(2.85 \text{ cm})^2} \right] - \left(\frac{2.405}{21.4} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{42.8 \text{ cm}} \right)^2 =$$
$$-0.02525 - 0.01263 + 5.3858 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2} = -0.032494 \text{ cm}^{-2}$$

¡El *buckling* material es negativo! Lo que teóricamente implica que las absorciones son mayores que las fisiones $\Sigma_a > \nu \Sigma_f$, por tanto, el sistema no puede ser crítico.

P 6. Problema sobre tamaño de un reactor usando Teoría de Fermi

Considere un reactor homogéneo en el cual el combustible es U^{235} y el moderador es agua ligera. Suponga que los neutrones de fisión son producidos con una energía promedio de 2 MeV.

- Calcular la edad de los neutrones a 0.5 eV.
- Calcular la relación de flujo epitérmico a flujo térmico en el núcleo del reactor.
- Calcular la relación entre el número de absorciones en resonancia o epitérmicas y el número de fisiones térmicas.
- El reactor es cilíndrico y su altura extrapolada es $H' = 3m$, calcular su radio crítico R' , tomando en cuenta el resultado de c); desprecie las fisiones epitérmicas.
- Si se añade un reflector de espesor infinito, calcular el nuevo radio crítico y el ahorro de U^{235} .

Nota: las constantes epitérmicas son: $D_R = 2.5 \text{ cm}$; $\xi = 0.87$; $\Sigma_s = 0.704 \text{ cm}^{-1}$ y la integral de resonancia del $I_r(U^{235}) = 200 \text{ b}$

Las constantes térmicas son: $D_{Th} = 0.2 \text{ cm}$, $L_{Th} = 1.5 \text{ cm}$, $\Sigma_a = 0.1 \text{ cm}^{-1}$, $\tau = 62 \text{ cm}^2$, $\sigma_f^{25} = 514 \text{ b}$, $\nu^{25} = 2.47$, $N^{25} = 0.94 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$, $L_{H_2O} = 2.88 \text{ cm}$, $D_{H_2O} = 0.2 \text{ cm}$

Solución:

- Calcular la edad de los neutrones a 0.5 eV.

Si se asume $\frac{D(u)}{\Sigma_s(u)\xi} = cte$

$$\tau = \frac{D}{\Sigma_s \xi} \int_0^u du = \frac{D}{\Sigma_s \xi} u$$

$$u = -\ln \frac{0.5}{2 \times 10^6} = 15.2$$

$$\tau = \frac{2.5 \text{ cm}}{(0.704 \text{ cm}^{-1})(0.87)} * 15.2 = 62.05 \text{ cm}^2$$

- $\frac{\phi_R}{\phi_{Th}} = ?$

De acuerdo con la ecuación (53)

$$\phi_R = \frac{S_0}{\Sigma_s \xi}$$

donde S_0 es la razón de reacciones de fisión, es decir, $RR_f = S_0 = \phi_{Th} \nu \Sigma_f$

Por tanto,

$$\frac{\phi_R}{\phi_{Th}} = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_s \xi} = 0.195$$

- La relación entre el número de absorciones en resonancia epitérmicas y el número de fisiones térmicas puede calcularse como

$$\frac{\phi_R I_r(U^{235})}{\phi_{Th} N^{25} \nu^{25}} = 0.076$$

- d) El radio crítico R' se puede calcular igualando el *buckling* material (ec. 70) con el *buckling* geométrico. Para un cilindro

$$B_g^2 = \left[\frac{2.405}{R'} \right]^2 + \left[\frac{\pi}{H'} \right]^2$$

Mientras que de acuerdo con la teoría de edad $B_m^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2 + \tau}$

Dado que se conoce H' , $R' = 47.5$ cm

$R = ?$

- e) Es necesario primero resolver las ecuaciones de difusión en ambos medios. Para el núcleo del reactor

$$\nabla^2 \phi_N(r, z) + B_m^2 \phi_N(r, z) = 0$$

Y para el reflector

$$\nabla^2 \phi_R(r) + \frac{1}{L_R^2} \phi(r) = 0$$

Dada la geometría esférica, las soluciones son

$$\phi_N(r, z) = C J_0(\beta r) \cos\left(\frac{\pi z}{H'}\right)$$

y

$$\phi_R(r, z) = C K_0(\gamma r) \cos\left(\frac{\pi z}{H'}\right)$$

Al ser

$$B^2 = \beta^2 - \left[\frac{\pi}{H'} \right]^2 \quad \text{y} \quad \gamma^2 = \frac{1}{L^2} + \left[\frac{\pi}{H'} \right]^2$$

Condiciones a la frontera i) $\phi_N(R, z) = \phi_R(R, z)$

ii) $J_N(R, z) = J_R(R, z)$

Siendo i) $J = -D \frac{\partial}{\partial r} \phi$; $\frac{\partial}{\partial r} J_0(\beta r) = J_1(\beta r)$; $\frac{\partial}{\partial r} K_0(\beta r) = K_1(\beta r)$ y $\frac{K_0(\beta r)}{K_1(\beta r)} \approx 1$

La solución del sistema de ecuaciones resulta

$$\frac{J_1(\beta R)}{J_0(\beta R)} = \frac{D_R \gamma}{D_N \beta} = 6.62$$

Finalmente, es necesario tener medios para evaluar las funciones de Bessel.

P 7. Relación de combustible y moderador necesaria para alcanzar la criticidad en un Reactor

Considere una mezcla homogénea (a) de agua y U^{235} y (b) de Berilio y U^{235} contenida en una esfera de 50 cm de radio. ¿Cuál es la relación de combustible a moderador necesaria para alcanzar la criticidad? y ¿cuál es la masa crítica correspondiente?

Repita el ejercicio 6.2 para una esfera de radio 25 cm.

Solución:

Para el cálculo de la relación de densidades nucleares se puede recurrir a la ecuación (8.21)

$$z = \frac{1 + L_M^2 B^2}{\eta e^{-B^2 \tau} - 1}$$

donde, $z = \frac{\Sigma_{aU}}{\Sigma_{aM}}$, y como se trata de una esfera, el *buckling* crítico está dado por la ecuación (4.40b).

7.1a) Para la mezcla agua y U^{235}

Datos de la mezcla:

$$L_{H_2O} = 2.88 \text{ cm}, \quad D_{H_2O} = 0.142 \text{ cm}, \quad \tau_{H_2O} = 33 \text{ cm}^2, \quad \sigma_{H_2O} = 0.66539 \text{ b}$$

$$R' = R + z_0 = R + 2D = 50.284 \text{ cm}$$

A partir de estos datos

$$B_g^2 = \left(\frac{\pi}{R'}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{50.284 \text{ cm}}\right)^2 = 3.90338 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2}$$

Luego,

$$z = \frac{1 + L_M^2 B^2}{\eta e^{-B^2 \tau} - 1} = \frac{1 + (2.88 \text{ cm})^2 (3.90338 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2})}{(2.07) e^{-(3.90338 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2})(33 \text{ cm}^2)} - 1} = \frac{1.032376}{0.819819} = 1.25927$$

$$\frac{N_{25}}{N_{H_2O}} = z \frac{\sigma_{H_2O}}{\sigma_{25}} = 1.25927 \frac{0.66539 \text{ b}}{681.4 \text{ b}} = 1.2296 \times 10^{-3}$$

$$\frac{N_{H_2O}}{N_{25}} = 813$$

La relación entre las masas de ambas componentes $\left[\frac{w_{H_2O}}{w_{25}}\right]$ se puede conocer a partir de la definición de densidad nuclear $N_{H_2O} = \frac{w_{H_2O} N_A}{A_{Be}}$ y $N_{25} = \frac{w_{25} N_A}{A_{25}}$. Ambas expresiones se dividen

$$\frac{N_{H_2O}}{N_{25}} = \frac{w_{H_2O}}{A_{H_2O}} \frac{A_{25}}{w_{25}}$$

de donde

$$\frac{w_{25}}{w_{H_2O}} = \frac{N_{25}}{N_{H_2O}} \frac{A_{25}}{A_{H_2O}} \quad (1)$$

Y se sustituye

$$\frac{w_{25}}{w_{H_2O}} = 1.2296 \times 10^{-3} \frac{235}{18} = 0.01605$$

El volumen de la esfera es

$$V_T = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (50 \text{ cm})^3 = 523\,598.77 \text{ cm}^3$$

Y como $V_T = V_{25} + V_{H_2O}$ o $V_{25} = V_t - V_{H_2O}$ o $V_{H_2O} = V_t - V_{25}$. Sustituyendo V_{25}

Las densidades de ambos componentes puros son $\rho_{H_2O} = 1 \text{ g/cm}^3$ y $\rho_{25} = 19 \text{ g/cm}^3$.

La definición de densidad es $\rho_{H_2O} = \frac{w_{H_2O}}{V_{Be}}$ y $\rho_{25} = \frac{w_{25}}{V_{25}}$

Ambas expresiones se dividen

$$\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{25}} = \frac{w_{H_2O}}{V_{H_2O}} \frac{V_{25}}{w_{25}} = \frac{w_{H_2O}}{w_{25}} \frac{V_{25}}{V_{H_2O}} \quad (2)$$

En la ecuación se sustituye V_{25}

$$\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{25}} = \frac{w_{H_2O}}{w_{25}} \left[\frac{V_T - V_{H_2O}}{V_{H_2O}} \right] = \frac{w_{H_2O}}{w_{25}} \left[\frac{V_T}{V_{H_2O}} - 1 \right] \quad (3)$$

Y después se sustituye V_{H_2O}

$$\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{25}} = \frac{w_{H_2O}}{w_{25}} \left[\frac{V_{25}}{V_t - V_{25}} \right] = \frac{w_{H_2O}}{w_{25}} \left[\frac{1}{\frac{V_T}{V_{25}} - 1} \right] \quad (4)$$

De la ecuación (3) se despeja V_{H_2O}

$$V_{H_2O} = \frac{V_T}{\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{25}} \frac{w_{25}}{w_{H_2O}} + 1} \quad (3')$$

Y se sustituye

$$V_{H_2O} = \frac{V_T}{\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{25}} \frac{w_{25}}{w_{H_2O}} + 1} = \frac{523\,598.77 \text{ cm}^3}{\left(\frac{1 \text{ g/cm}^3}{19 \text{ g/cm}^3} \right) (0.01605) + 1} = 523\,156.72 \text{ cm}^3$$

De la ecuación (4) se despeja V_{H_2O}

$$V_{25} = \frac{V_T}{\frac{\rho_{25}}{\rho_{H_2O}} \frac{w_{H_2O}}{w_{25}} + 1} \quad (4')$$

Y después se sustituye

$$V_{25} = \frac{523\,598.77 \text{ cm}^3}{\left(\frac{19 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \right) (0.01605) + 1} = 441.93 \text{ cm}^3 \quad (4)$$

Cálculo de las masas de agua y uranio

$$w_{H_2O} = \rho_{H_2O} V_{H_2O} = \left(1 \frac{g}{cm^3}\right) (523\,156.72\,cm^3) = 523\,156.72\,g \cong 523.157\,kg$$

$$w_{25} = \rho_{25} V_{25} = \left(19 \frac{g}{cm^3}\right) (441.93\,cm^3) = 8\,396\,g \cong 8.4\,kg$$

b) Para la mezcla berilio y U^{235}

Datos de la mezcla:

$$L_{Be} = 23.6\,cm, \quad D_{Be} = 0.7\,cm, \quad \tau_{Be} = 98\,cm^2, \quad \sigma_{Be} = 0.00827\,b, \quad \eta_{25} = 2.07, \\ \sigma_{25} = 681.4\,b$$

A partir de estos datos

$$R' = R + z_0 = R + 2D = 51.4\,cm$$

$$B_g^2 = \left(\frac{\pi}{R'}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{51.4\,cm}\right)^2 = 3.7357 \times 10^{-3} cm^{-2}$$

Luego,

$$z = \frac{1 + L_M^2 B^2}{\eta e^{-B^2 \tau} - 1} = \frac{1 + (23.6\,cm)^2 (3.736 \times 10^{-3} cm^{-2})}{(2.07) e^{-(3.7357 \times 10^{-3} cm^{-2})(98\,cm^2)} - 1} = \frac{3.080635}{0.43540} = 7.075$$

$$\frac{N_{25}}{N_{Be}} = z \frac{\sigma_{Be}}{\sigma_{25}} = 7.075 \frac{0.00827}{681.4\,b} = 8.587 \times 10^{-5}$$

$$\frac{N_{Be}}{N_{25}} = 11\,645$$

Se adapta la ecuación (3') para el berilio como moderador

$$V_{Be} = \frac{V_T}{\frac{\rho_{Be}}{\rho_{25}} \frac{w_{25}}{w_{Be}} + 1} \quad (3'')$$

Las densidades de ambos componentes puros son $\rho_{Be} = 1.85\,g/cm^3$ y $\rho_{25} = 19\,g/cm^3$. El volumen de la esfera de radio $R = 50\,cm$ se expresa

$$V_T = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (50\,cm)^3 = 523\,598.77\,cm^3$$

Y se sustituye

$$V_{Be} = \frac{V_T}{\frac{\rho_{Be}}{\rho_{25}} \frac{w_{25}}{w_{Be}} + 1} = \frac{523\,598.77\,cm^3}{\left(\frac{1.85\,g/cm^3}{19\,g/cm^3}\right) (2.242 \times 10^{-3}) + 1} = 523\,484.49\,cm^3 \quad (3')$$

De forma similar, se adapta la ecuación (4') utilizando el berilio como moderador

$$V_{25} = \frac{V_T}{\frac{\rho_{25}}{\rho_{Be}} \frac{w_{Be}}{w_{25}} + 1} \quad (4')$$

Y se sustituye

$$V_{25} = \frac{523\,598.77\text{ cm}^3}{\left(\frac{19\frac{g}{\text{cm}^3}}{1.85\frac{g}{\text{cm}^3}}\right)\left(\frac{1}{2.242 \times 10^{-3}}\right) + 1} = 114.27\text{ cm}^3 \quad (4)$$

Cálculo de la masa del berilio y del uranio

$$w_{Be} = \rho_{Be} V_{Be} = \left(1.85\frac{g}{\text{cm}^3}\right) (523\,484.49\text{ cm}^3) = 968\,446.31\text{ g} \cong 968.446\text{ kg}$$

$$w_{25} = \rho_{25} V_{25} = \left(19\frac{g}{\text{cm}^3}\right) (114.27\text{ cm}^3) = 2\,171.25\text{ g} \cong 2.17\text{ kg}$$

Discusión:

Para la mezcla $H_2O - U^{235}$, las relaciones entre las densidades nucleares de combustible y moderador es mayor

$$\frac{N_{25}}{N_{H_2O}} = 1.2296 \times 10^{-3} \text{ o } \frac{N_{H_2O}}{N_{25}} = 813$$

la masa crítica requerida es

$$w_{25}(H_2O - U^{235}) \cong 8.4\text{ kg}$$

A diferencia, para la mezcla $Be - U^{235}$, las relaciones entre las densidades nucleares de combustible y moderador son

$$\frac{N_{25}}{N_{Be}} = 8.587 \times 10^{-5} \text{ o } \frac{N_{Be}}{N_{25}} = 11\,645$$

y la masa crítica se alcanza con mucho menos uranio

$$w_{25}(Be - U^{235}) \cong 2.17\text{ kg}$$

¡Explique la razón!

a) Reactor esférico de radio $R = 25\text{ cm}$, compuesto por una mezcla de agua - U^{235}

$$R' = R + z_0 = R + 2D = 25.284\text{ cm}$$

$$B_g^2 = \left(\frac{\pi}{R'}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{25.284\text{ cm}}\right)^2 = 0.0154386\text{ cm}^{-2}$$

Luego,

$$z = \frac{1 + L_M^2 B^2}{\eta e^{-B^2 \tau} - 1} = \frac{1 + (2.88\text{ cm})^2 (0.0154386\text{ cm}^{-2})}{(2.07)e^{-(0.0154386\text{ cm}^{-2})(33\text{ cm}^2)} - 1} = \frac{1.12805}{0.2436797} = 4.629238$$

$$\frac{N_{25}}{N_{H_2O}} = z \frac{\sigma_{H_2O}}{\sigma_{25}} = 4.629238 \frac{0.66539\text{ b}}{681.4\text{ b}} = 4.52047 \times 10^{-3}$$

$$\frac{N_{H_2O}}{N_{25}} = 221$$

Se sustituye en la ecuación (1)

$$\frac{w_{25}}{w_{H_2O}} = \frac{N_{25}}{N_{H_2O}} \frac{A_{25}}{A_{H_2O}} = 4.52047 \times 10^{-3} \frac{235}{18} = 0.059017$$

El volumen de la esfera es

$$V_T = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (25 \text{ cm})^3 = 65\,449.84 \text{ cm}^3$$

Se utiliza la ecuación (3') y se sustituye

$$V_{H_2O} = \frac{V_T}{\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{25}} \frac{w_{25}}{w_{H_2O}} + 1} = \frac{65\,449.84 \text{ cm}^3}{\left(\frac{1 \text{ g/cm}^3}{19 \text{ g/cm}^3}\right)(0.059017) + 1} = 65\,247.17 \text{ cm}^3$$

De igual modo se utiliza la ecuación (4') y se sustituye

$$V_{25} = \frac{V_T}{\frac{\rho_{25}}{\rho_{H_2O}} \frac{w_{H_2O}}{w_{25}} + 1} = \frac{65\,449.84 \text{ cm}^3}{\left(\frac{19 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}\right)\left(\frac{1}{0.059017}\right) + 1} = 202.47 \text{ cm}^3 \quad (4)$$

Cálculo de las masas de agua y uranio

$$w_{H_2O} = \rho_{H_2O} V_{H_2O} = \left(1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) (65\,247.17 \text{ cm}^3) = 65\,247.17 \text{ g} \cong 65.247 \text{ kg}$$

$$w_{25} = \rho_{25} V_{25} = \left(19 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) (202.47 \text{ cm}^3) = 3\,846.93 \text{ g} \cong 3.847 \text{ kg}$$

b) Reactor esférico de radio $R = 25 \text{ cm}$, compuesto de una mezcla de berilio- U^{235}

$$R' = R + z_0 = R + 2D = 26.4 \text{ cm}$$

$$B_g^2 = \left(\frac{\pi}{R'}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{25.284 \text{ cm}}\right)^2 = 0.0141609 \text{ cm}^{-2}$$

Luego

$$z = \frac{1 + L_M^2 B^2}{\eta e^{-B^2 \tau} - 1} = \frac{1 + (2.88 \text{ cm})^2 (0.0141609 \text{ cm}^{-2})}{(2.07) e^{-(0.0141609 \text{ cm}^{-2})(98)} - 1} = -0.04832$$

¡Atención! ¡El denominador es negativo!

Esto se debe a que el *buckling* geométrico es mucho mayor que el valor límite, o a que el volumen de la esfera es mucho mayor que el volumen mínimo.

Como puede observarse en la tabla P 2.1, los reactores moderados con agua ordinaria son los que tienen el *buckling* límite más elevado. Para el caso del reactor esférico moderado con agua, de

radio 25 cm, el *buckling* geométrico ($0.0154386 \text{ cm}^{-2}$) es menor que el *buckling* límite (0.022047 cm^{-2}). Sin embargo, para el reactor moderado con berilio el *buckling* geométrico ($0.0141609 \text{ cm}^{-2}$) es mucho mayor que el *buckling* límite ($7.424 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2}$). Por ello no es útil, o no se puede utilizar la ecuación (8.21), que requiere que el denominador sea positivo.

P 8. Parámetros nucleares del reactor subcrítico nuclear Chicago 9000 de la UAEN-UAZ

El reactor está compuesto por un cilindro de acero inoxidable con un diámetro 100 cm y una altura 117 cm. Las dos rejillas en su interior con agujeros distribuidos en forma hexagonal están dispuestas para colocar 277 tubos de aluminio que contienen las barras de uranio natural. Las dimensiones de cada celda cilíndrica equivalente son el radio de las barras de uranio $R_U = 0.545 \text{ in} = 1.3848 \text{ cm}$, el radio de los tubos de aluminio $r_{tubo} = 0.625 \text{ in} = 1.5875 \text{ cm}$, y el radio de las celdas unitarias $R_{U+M} = 2.19 \text{ cm}$. Desde las barras exteriores y hasta las paredes del reactor hay una distancia mayor a 18 cm, que en condiciones de funcionamiento del reactor permiten asimilarlo como un reactor en un medio infinito.

Las principales características del manual son las siguientes:

1. Utiliza la *Teoría de un Reactor Crítico*, la cual es una conjugación de *Teoría de Difusión* con *Teoría de Frenado* (§ 6).
2. Utiliza las secciones transversales microscópicas térmicas y densidades nucleares de la tabla P 8.1.

Tabla P 8.1. <i>Datos nucleares del Manual del Ensamble Nuclear Chicago 9000</i>							
	σ_f (b)	σ_c (b)	σ_a (b)	σ_s (b)	ν	ρ_i	N
H_2O			0.66	110		1	3.35e22
U^{235}	569	105	674	10	2.46	18.7	3.39e20
U^{238}		2.75	2.75	8.3		18.7	4.71e22

Fuente: elaboración propia

3. Ignora el encamisado de aluminio.
4. Utiliza las densidades nucleares de los componentes de la celda heterogénea sin tomar en cuenta las dimensiones de las celdas.
5. Considera que el enriquecimiento del uranio natural era 0.715 % y no 0.7204 % reportado actualmente.
6. Haciendo uso de las constantes del manual, las secciones transversales macroscópicas se presentan en la tabla P 8.2.

Tabla P 8.2. Secciones transversales macroscópicas del reactor subcrítico Nuclear Chicago 9000											
	σ_f (b)	σ_c (b)	σ_a (b)	σ_s (b)	ν	N	$\nu\Sigma_f$	Σ_a	Σ_s	Σ_t	ρ_i
H_2O			0.66	110		3.35e 22		0.022 1	3.685	3.72	1
U^{235}	569	105	674	10	2.46	3.39e 20	0.192 891 ν	0.228 486	0.003 39	0.232	18.7
U^{238}		2.75	2.75	8.3	2.46	4.71e 22		0.129 525	0.390 93	0.521	18.7
Total							0.474 511	0.358 0	4.079 32	4.473	

Fuente: elaboración propia.

7. El cálculo de k_∞ lo hace de dos formas que veremos a continuación.

Cálculo de k_∞ mediante la fórmula de los 4 factores $k_\infty = \eta f p \epsilon$.

i) En el cálculo de la eficiencia del combustible, η , se ignoran las fisiones en el U^{238} . Esto es

$$\eta = \nu \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a^F} = \frac{2.46 * [3.39 \times 10^{20} * 569 \times 10^{-24}]}{[3.39 \times 10^{20} * 674 \times 10^{-24} + 4.71 \times 10^{22} * 2.75 \times 10^{-24}]} = \frac{0.474511}{0.3580} = 1.3254$$

El manual reporta un valor de 1.32.

ii) El cálculo del factor de utilización térmica f se hace recurriendo a la teoría para una celda unitaria cilíndrica, cuyo desarrollo se presenta § 9 [ec. (9.33)]

$$\frac{1}{f} = \frac{V_M \Sigma_{aM} \omega_U R_U}{V_U \Sigma_{aU}} \frac{I_0(\omega_U R_U)}{2 I_1(\omega_U R_U)} + \frac{\omega_M (R_{U+M}^2 - R_U^2)}{2 R_U} \left[\frac{I_0(\omega_M R_U) K_1(\omega_M R_{U+M}) + K_0(\omega_M R_U) I_1(\omega_M R_{U+M})}{I_1(\omega_M R_{U+M}) K_1(\omega_M R_M) - K_1(\omega_M R_{U+M}) I_1(\omega_M R_M)} \right]$$

Datos:

$R_U = 1.381$ cm es el radio del combustible

$R_{U+M} = 2.19$ cm es el radio de la celda unitaria equivalente

$V_M = 9.11$ cm² es el volumen del moderador por unidad de longitud de la celda

$V_U = 5.99$ cm² es el volumen del combustible por unidad de longitud de la celda

$\Sigma_{aM} = 0.0221$ cm⁻¹ es la sección macroscópica de absorción del moderador

$\Sigma_{aU} = 0.360$ cm⁻¹ es la sección macroscópica de absorción del combustible

$\Sigma_{TU} = \Sigma_{aU} + \Sigma_{sU} = 0.735$ cm⁻¹ es la sección total macroscópica del combustible

$\Sigma_{TU} = \Sigma_{aU} + \Sigma_{sU} = 0.735$ cm⁻¹ es la sección total macroscópica del combustible

$\Sigma_a = \Sigma_{aM} + \Sigma_{aU} = 0.0221 \text{ cm}^{-1} + 0.360 \text{ cm}^{-1} = 0.3580 \text{ cm}^{-1}$ es la sección macroscópica de absorción total

$\Sigma_s = \Sigma_{sM} + \Sigma_{sU} = 3.685 \text{ cm}^{-1} + 0.39432 \text{ cm}^{-1} = 0.4.07832 \text{ cm}^{-1}$ es la sección macroscópica de dispersión total

$\omega_M = \kappa_M = 0.347 \text{ cm}^{-1}$ es el inverso de la longitud de difusión del moderador

$\omega_U = \kappa_U = \frac{1}{L_U} = \sqrt{3\Sigma_{TU}\Sigma_{aU} \left\{1 - \frac{4\Sigma_{aU}}{5\Sigma_{TU}}\right\}} = \sqrt{3 * .753 * 0.360 \left\{1 - \frac{4*0.36}{5*0.753}\right\}} = 0.710 \text{ cm}^{-1}$ es el inverso de la longitud de difusión del combustible

$$\omega_U R_U = 0.98$$

$$\omega_M R_{U+M} = 0.76$$

$$\omega_M R_U = 0.479$$

I_0, I_1, K_0 y K_1 son las funciones de Bessel

Con esos datos

$$\frac{1}{f} = \frac{1.52 * 0.0221 * 0.98}{0.36} \frac{I_0(0.98)}{2 I_1(0.98)} + \frac{0.347(1.98)}{2 * 1.38} \left[\frac{I_0(0.479)K_1(0.76) - K_0(0.479)I_1(0.76)}{I_1(0.76)K_1(0.479) - K_1(0.76)I_1(0.479)} \right]$$

$$= 1.164$$

Con lo cual $f = 0.858$.

iii) Para el cálculo de la probabilidad de escape a la resonancia p se utilizó la expresión

$$p = \exp \left\{ - \frac{f_r}{1 - f_r} \right\} \quad (9.58)$$

El factor de utilización en resonancia f_r se calcula mediante la ecuación (9.52a).

$$\frac{1}{f_r} = 1 + \frac{V_M \Sigma_{arM} \kappa_{rU} R_U}{V_U \Sigma_{arU}} \frac{I_0(\kappa_{rU} R_U)}{2 I_1(\kappa_{rU} R_U)} + \frac{\kappa_{rM}(R_M^2 - R_U^2)}{2R_U} \left[\frac{I_0(\kappa_{rM} R_U)K_1(\kappa_{rM} R_M) - K_0(\kappa_{rM} R_U)I_1(\kappa_{rM} R_M)}{I_1(\kappa_{rM} R_U)K_1(\kappa_{rM} R_M) - K_1(\kappa_{rM} R_U)I_1(\kappa_{rM} R_M)} \right]$$

Las constantes nucleares en resonancia son las siguientes:

$$\omega_{rU} = \kappa_{rU} = 0.42 \text{ cm}^{-1}$$

$$\omega_{rM} = \kappa_{rM} = 0.583 \text{ cm}^{-1}$$

$$\Sigma_{arM} = 0.241 \text{ cm}^{-1}$$

$$\Sigma_{arU} = \frac{N_U}{5.6} \left[9.25 + 24.7 \frac{S}{M} \right] \times 10^{-24} = 0.0941 \text{ cm}^{-1}$$

donde S es la superficie y M es la masa de cada barra por unidad de longitud y

$$\frac{S}{M} = \frac{2\pi R_U H}{\pi R_U^2 H d} = \frac{2}{R_U d} = \frac{2}{1.38 \text{ cm} * 18.7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 0.0773$$

De acuerdo al manual, al sustituir

$$f_r = 0.204 \text{ y } p = \exp\left\{-\frac{f_r}{1-f_r}\right\} = \exp(-0.256) = 0.774$$

iv) El cálculo del factor de fisión rápida ϵ , en el manual dice haberlo tomado de la literatura como $\epsilon = 1.097$.

Con esos valores

$$k_{\infty} = \eta f p \epsilon = 1.32 * 0.858 * 0.774 * 1.097 = 0.960$$

v) Cálculo de la probabilidad de no escape térmico.

El manual no lo presenta, pero se puede calcular partiendo de la definición, ecuación (4.91). Para ello hay que utilizar el *buckling* geométrico, calcular la longitud de difusión y calcular previamente el coeficiente de difusión y las secciones macroscópicas. Esto es

$$P_{NTh} = \frac{\Sigma_a \int \phi(r) d^3r}{\int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \Sigma_a \int \phi(r) d^3r} = \frac{1}{1 + B_c^2 L^2}$$

$$B_c^2 = B_g^2 = \left(\frac{2.405}{R'}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2H'}\right)^2$$

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$$

$$D(\mathbf{r}) = \frac{1}{3\Sigma_{tr}(\mathbf{r})}$$

$$\Sigma_{tr}(\mathbf{r}) = (\Sigma_T(\mathbf{r}) - \bar{\mu}\Sigma_s(r))$$

De los datos del manual

$$\Sigma_{TU} = \Sigma_{aU} + \Sigma_{sU} = 4.473 \text{ cm}^{-1}$$

$$\Sigma_a = \Sigma_{aM} + \Sigma_{aU} = 0.0221 \text{ cm}^{-1} + 0.360 \text{ cm}^{-1} = 0.3580 \text{ cm}^{-1}$$

$$\Sigma_s = \Sigma_{sM} + \Sigma_{sU} = 3.685 \text{ cm}^{-1} + 0.39432 \text{ cm}^{-1} = 4.07932 \text{ cm}^{-1}$$

Luego,

$$B_c^2 = B_g^2 = \left(\frac{2.405}{R'}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2H'}\right)^2 = \left(\frac{2.405}{41.7 \text{ cm}}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{107 \text{ cm}}\right)^2 = 4.21 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2}$$

$$\Sigma_{tr}(\mathbf{r}) = (\Sigma_T(\mathbf{r}) - \bar{\mu}\Sigma_s(r)) = 4.473 \text{ cm}^{-1} - 4.07932 \text{ cm}^{-1} = 0.39368 \text{ cm}^{-1}$$

$$D(\mathbf{r}) = \frac{1}{3\Sigma_{tr}(\mathbf{r})} = \frac{1}{3 * 0.39368 \text{ cm}^{-1}} = 0.8467 \text{ cm}$$

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} = \frac{0.8467 \text{ cm}}{0.3580 \text{ cm}^{-1}} = 2.3651 \text{ cm}^2$$

$$P_{NTh} = \frac{1}{1 + B_c^2 L^2} = \frac{1}{1 + (4.21 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2})(2.3651 \text{ cm}^2)} = 0.99014$$

vi) Cálculo de la probabilidad de no escape rápido.

Para eso se recurre a la ecuación (6.88) y se utiliza el valor de la edad de Fermi, en el manual es $\tau = 30 \text{ cm}^2$

$$P_{NR} = \frac{1}{1 + B^2\tau} = \frac{1}{1 + (4.21 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2})(30 \text{ cm}^2)} = 0.8878$$

Con estos valores, el cálculo de la constante de multiplicación efectiva mediante la fórmula de los 6 factores es

$$k_{eff} = k_{\infty} P_{NTh} P_{NR} = 0.960 * 0.99014 * 0.8878 = 0.8439$$

Cálculo de k_{∞} utiliza la teoría de un reactor crítico (§ 8.1)

$$k_{\infty} = 1 + B_m^2 M^2 \quad (8.5)$$

Donde, $M^2 = L^2 + \tau$ es el área de migración, siendo L^2 el área de difusión y τ la edad de Fermi. El valor de M^2 se tomó de la literatura como $M^2 = 30 \text{ cm}^2$. Para el método de cálculo utilizado, en lugar del área de migración M^2 el manual consideró solo la edad de Fermi τ . La única explicación que encontramos fue que, como el moderador es agua, la probabilidad de escape térmico es prácticamente del orden de 1.

Para calcular el *buckling* material se utilizó la ecuación (8.18) cuya deducción se presenta en § 8.2

$$B_m^2 = \left(\frac{2.405}{R'} \right)^2 - \frac{1}{l^2}$$

El manual indica que valor de $\frac{1}{l^2}$, se tomó de la literatura $\left[\frac{1}{l^2} = 4.9 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2} \right]$, de donde $l^2 = 204.8 \text{ cm}^2$. Sin embargo, no pudimos corroborar el dato.

Así,

$$B_m^2 = \left(\frac{2.405}{R'} \right)^2 - \frac{1}{l^2} = \left(\frac{2.405}{41.7 \text{ cm}} \right)^2 - 4.9 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2} = -1.56 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2}$$

Y se sustituye en la ecuación (8.11)

$$k_{\infty} = 1 + B_m^2 \tau = 1 - 1.56 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2} * 30 \text{ cm}^2 = 0.953$$

que es prácticamente la misma que la obtenida con la fórmula de los 4 factores.

Para el cálculo de la constante de multiplicación efectiva, en el manual se utilizó la ecuación (8.9) [§ 8.1]

$$k_{eff} = k_{\infty} P_N = k_{\infty} e^{-B^2 M^2} \quad (8.9)$$

Observación: en la ecuación (8.9) el manual utiliza el *buckling* geométrico. Este es un apunte importante en el caso de los reactores subcríticos.

$$k_{eff} = k_{\infty} e^{-B_g^2 M^2}$$

Se utilizan las dimensiones del reactor

$$B_g^2 = \left(\frac{2.405}{R'}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2H'}\right)^2 = \left(\frac{2.405}{41.7 \text{ cm}}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{107 \text{ cm}}\right)^2 = 4.21 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2}$$

Por tanto,

$$k_{eff} = k_{\infty} e^{-B_g^2 M^2} = 0.953 * e^{(-4.21 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2} * 30 \text{ cm}^2)} = 0.839927$$

Este es tan solo 0.473 % inferior al obtenido con la fórmula de los 6 factores.

Observación: esta es una forma en la cual no se necesita calcular las probabilidades de escape rápido y térmico.

Para el cálculo de la multiplicación de neutrones se utilizó la ecuación (8.33)

$$M = \frac{k_{eff} S + k_{eff}^2 S + k_{eff}^3 S + \dots}{S} = \frac{1}{1 - k_{eff}}$$

Dado que en el caso del reactor nuclear Chicago 9000 $k_{eff} = 0.8461$, se expresa

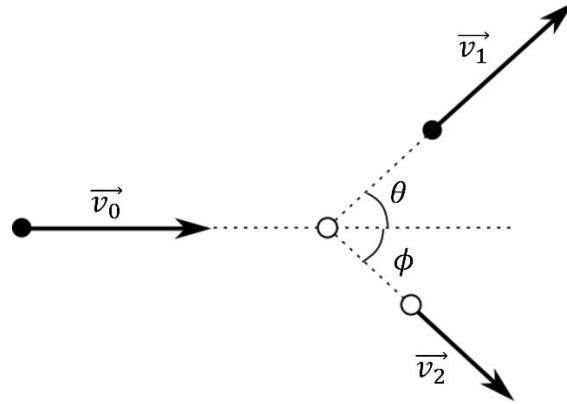
$$M = \frac{1}{1 - 0.839927} = 6.247$$

Anexos

A1. Energía de un neutrón después de un choque con un núcleo

Un sistema de coordenadas de laboratorio (CL) es la forma más simple de representar la interacción de dos partículas, básicamente es una representación donde se observa la interacción desde lejos. En la figura 16 se representa la dispersión bien conocida de un neutrón con un núcleo de masa A.

Figura 16. *Interacción de un neutrón con un núcleo en coordenadas de laboratorio*



Fuente: elaboración propia.

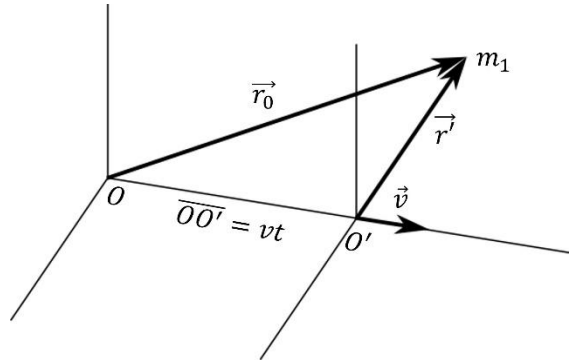
En física nuclear basta con un sistema CL para establecer las leyes de conservación de la energía y el *momentum* en una reacción nuclear, y para deducir el valor Q de una reacción nuclear – la energía que es liberada en una reacción nuclear en caso de una reacción exoenergética ($Q > 0$), o la energía necesaria para inducir la reacción nuclear, en caso de una reacción endoenergética ($Q < 0$)–. Pero un sistema CL tiene sus limitantes, no se puede calcular la energía umbral –o energía mínima– para inducir una reacción energética; para ello se necesita un sistema de coordenadas de centro de masa (CCM).

La gran ventaja de un sistema de CCM es que el movimiento de un sistema de varias partículas se puede representar como un sistema de una sola partícula que se ubica en el centro de masa.

Centro de masa

En la figura 17 se presentan los vectores de posición $\vec{r}_0$ y $\vec{r}'$ de un objeto de masa m_1 respecto a dos sistemas de coordenadas, de los cuales el primero O está fijo, y el segundo O' se mueve con velocidad constante v en la dirección del eje X, en el instante t se encuentra a una distancia $\overline{OO'} = vt$ del primero.

Figura 17. Vectores posición $\vec{r}_0$ y $\vec{r}'$ de una partícula de masa m_1 respecto a dos sistemas de coordenadas, O fijo y O' se mueve con velocidad constante v



Fuente: elaboración propia.

Se designa por $\vec{r}_0$ el vector posición de la partícula m_1 respecto al sistema de coordenadas fijo O y $\vec{r}'$ al vector posición de la partícula respecto al sistema de coordenadas O' . La relación entre ambos vectores posición es

$$\vec{r}_0 = vt + \vec{r}' \quad (A\ 1)$$

De donde al derivar respecto al tiempo se pueden obtener las relaciones de las velocidades observadas por ambos observadores. Esto es

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt} = v + \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad (A\ 2)$$

o bien,

$$\vec{v}_0 = v + \vec{v}' \quad (A\ 2')$$

Donde $\vec{v}_0$ es la velocidad de la partícula para el observador fijo O , mientras que para el observador O' la velocidad de la partícula es

$$\vec{v}' = \vec{v}_0 - v \quad (A\ 2'')$$

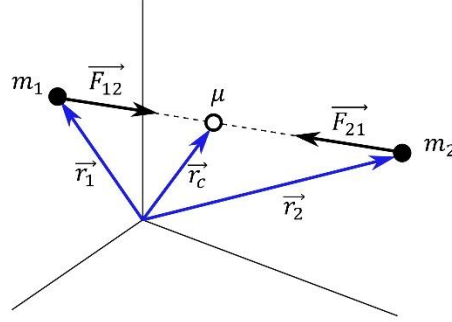
En un sistema de dos partículas se puede definir el centro de masa como el punto cuyo vector posición promedia el producto de las distancias por las masas

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2}{m_1 + m_2} \quad (A\ 3)$$

Masa reducida y 2ª ley de Newton para un sistema de dos partículas

En la figura 18 se presentan dos partículas de masa m_1 y m_2 sujetas a una interacción mutua.

Figura 18. Interacción de dos partículas de masa m_1 y m_2 sujetas a una interacción mutua



Fuente: elaboración propia.

La fuerza de atracción de la partícula 1 sobre la partícula 2 será

$$\vec{F}_{12} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \quad (A\ 4)$$

o bien,

$$\frac{\vec{F}_{12}}{m_1} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} \quad (A\ 4')$$

Y la fuerza de atracción de la partícula 2 sobre la partícula 1 será

$$\vec{F}_{21} = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \quad (A\ 5)$$

o bien,

$$\frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \frac{d\vec{v}_2}{dt} \quad (A\ 5')$$

Se restan las ecuaciones (A 4') y (A 5')

$$\frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} - \frac{d\vec{v}_2}{dt} \quad (A\ 6)$$

Como ambas fuerzas son iguales, pero opuestas

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (A\ 7)$$

Se sustituye la ecuación (A 7) en la (A 6)

$$\vec{F}_{12} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{d\vec{v}_1}{dt} - \frac{d\vec{v}_2}{dt} \quad (A\ 8)$$

o bien,

$$\vec{F}_{12} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) = \frac{d\vec{v}_1}{dt} - \frac{d\vec{v}_2}{dt} \quad (A\ 8')$$

o bien,

$$\vec{F}_{12} \left(\frac{1}{\mu} \right) = \frac{d(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{dt} \quad (A 9)$$

Donde,

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{1}{\mu} \quad (A 10)$$

y

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (A 10')$$

siendo μ la *masa reducida* del sistema de partículas, y

$$\frac{d(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{dt} = \frac{d\vec{v}_{12}}{dt} = a_{12} \quad (A 11)$$

donde $\vec{v}_{12}$ es la velocidad de aproximación entre ambas partículas y la derivada, a_{12} , es la aceleración del sistema de partículas.

Luego, se sustituye la ecuación (A 11) en la (A 9)

$$\vec{F}_{12} = \mu \vec{a}_{12} \quad (A 12)$$

lo que implica que se cumple la 2ª ley de Newton.

Energía cinética de un sistema de dos partículas

Una prueba más de la consistencia de la masa reducida se deriva del calcular la energía cinética.

La definición de trabajo y su equivalencia con la energía cinética se expresa

$$E_c = W = \int \vec{F}_{12} d\vec{r}_{12} \quad (A 13)$$

Se sustituye la ecuación (A 12) en (A 13)

$$E_c = \int \mu \frac{d\vec{v}_{12}}{dt} d\vec{r}_{12} = \mu \int d\vec{v}_{12} \frac{d\vec{r}_{12}}{dt} = \mu \int \vec{v}_{12} d\vec{v}_{12} = \mu \frac{1}{2} \vec{v}_{12}^2 = \frac{1}{2} \mu \vec{v}_{12}^2 \quad (A 14)$$

Lo que demuestra que la energía cinética de un sistema de dos partículas equivale a la energía cinética de una partícula con masa igual a la masa reducida.

Al derivar la ecuación (A3) la velocidad del centro de masa será

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\frac{d\vec{r}_1}{dt} m_1 + \frac{d\vec{r}_2}{dt} m_2}{m_1 + m_2} \quad (A 14)$$

o bien,

$$\vec{v}_c = \frac{\vec{v}_1 m_1 + \vec{v}_2 m_2}{m_1 + m_2} \quad (A 14')$$

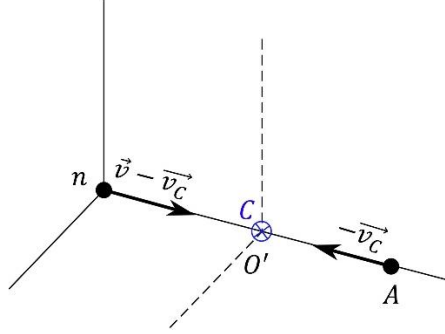
que es la *velocidad del centro de masa*.

Interacción de un neutrón con un núcleo en CCM

Antes del choque

Si el observador móvil O' se sitúa en el centro de masa C (figura 19) y al sistema de dos partículas se considera un sistema de una sola partícula con masa igual a la masa reducida, de manera automática hay continuidad antes y después de una interacción.

Figura 19. Velocidades de aproximación en una interacción neutrón-núcleo en CCM



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la ecuación (A 2''), O' en el centro de masa C verá a la partícula 1 con la velocidad:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_0 - \vec{v}_c \quad (A 15)$$

y al núcleo con la velocidad:

$$\vec{v}'_2 = 0 - \vec{v}_c = -\vec{v}_c \quad (A 16)$$

Luego, el balance del *momentum* será

$$m_1(\vec{v}_0 - \vec{v}_c) + m_2(-\vec{v}_c) = 0 \quad (A 17)$$

Si la partícula 1 es un neutrón de masa $m_1 = 1$ uma, cuya velocidad es $\vec{v}_0$ y la partícula 2 es un núcleo de masa $m_2 = A$ umas, cuya velocidad es $\vec{v}_2 = 0$. E. Como $m_1 = 1$ y $m_2 = A$ se sustituyen en la ecuación (A17)

$$\vec{v}_0 - \vec{v}_c + A(-\vec{v}_c) = 0 \quad (A 18)$$

de donde,

$$\vec{v}_c = \frac{\vec{v}_0}{1 + A} \quad (A 18')$$

Se sustituye $\vec{v}_c$ en la ecuación (A 15)

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_0 - \frac{\vec{v}_0}{1 + A} = \vec{v}_0 \left(\frac{A}{1 + A} \right) \quad (A 19)$$

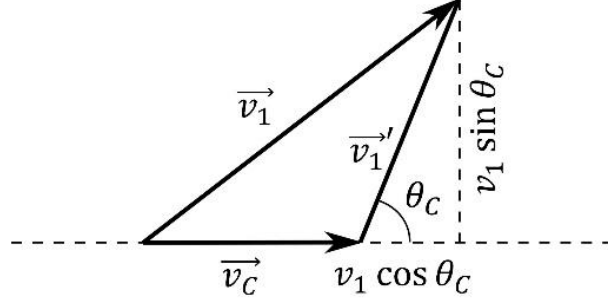
y también se sustituye $\vec{v}_c$ en la ecuación (A 16)

$$\vec{v}'_2 = 0 - \frac{\vec{v}_0}{1 + A} = -\frac{\vec{v}_0}{1 + A} \quad (A 20)$$

Después del choque

Después del choque el neutrón es dispersado con una velocidad $\vec{v}_1$ en CL mientras que en CCM tienen una velocidad $\vec{v}_1'$. En la figura 20 se observan la relación entre velocidades.

Figura 20. Relación entre velocidades en CL y CCM de una partícula dispersada



Fuente: elaboración propia.

Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo mayor

$$\begin{aligned}\vec{v}_1^2 &= (\vec{v}_c + \vec{v}_1' \cos \theta_c)^2 + (\vec{v}_1' \sin \theta_c)^2 = \\ &= \vec{v}_c^2 + 2\vec{v}_c \vec{v}_1' \cos \theta_c + \vec{v}_1'^2 \cos^2 \theta_c + \vec{v}_1'^2 \sin^2 \theta_c = \\ &= \vec{v}_c^2 + 2\vec{v}_c \vec{v}_1' \cos \theta_c + \vec{v}_1'^2\end{aligned}\quad (A 21)$$

Y se sustituyen las ecuaciones (A 18') y (A 19) en la (A 21)

$$\begin{aligned}\vec{v}_1^2 &= \left(\frac{\vec{v}_0}{1+A}\right)^2 + 2\left(\frac{\vec{v}_0}{1+A}\right)\left(\frac{\vec{v}_0 A}{1+A}\right) \cos \theta_c + \left[\vec{v}_0 \left(\frac{A}{1+A}\right)\right]^2 = \\ &= \left(\frac{\vec{v}_0}{1+A}\right)^2 (1 + 2A \cos \theta_c + A^2)\end{aligned}\quad (A 22)$$

Que puede ser reescrita como

$$\frac{\vec{v}_1^2}{\vec{v}_0^2} = \frac{1 + 2A \cos \theta_c + A^2}{(1+A)^2}\quad (A 23)$$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\frac{1}{2}m_1$

$$\frac{\frac{1}{2}m_1 \vec{v}_1^2}{\frac{1}{2}m_1 \vec{v}_0^2} = \frac{1 + 2A \cos \theta_c + A^2}{(1+A)^2}\quad (A 24)$$

Al identificar las energías cinéticas antes y después del choque, se concluye que

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1 + 2A \cos \theta_c + A^2}{(1+A)^2}\quad (A 25)$$

o bien,

$$E_1 = E_0 \left[\frac{1 + 2A \cos \theta_c + A^2}{(1 + A)^2} \right] \quad (A \ 26)$$

A2. Ecuaciones de Bessel

La ecuación general de Bessel ordinaria tiene la forma

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) + (1 - n^2) R(\rho) = 0 \quad (4.52)$$

Donde n es el orden de la ecuación. La solución general es la combinación lineal de las dos funciones de Bessel $J_n(\rho)$ y $Y_n(\rho)$. Esto es

$$R(\rho) = A J_n(\rho) + B Y_n(\rho) \quad (4.53)$$

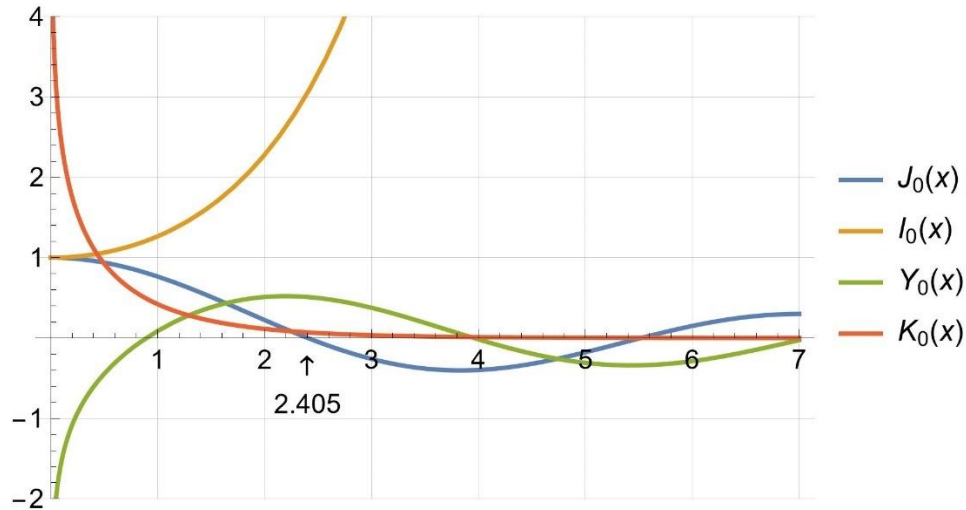
donde

$$J_n(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (n+m)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m} \quad (4.54)$$

y

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} Y_n(\rho) = \frac{2}{\pi} J_0(\rho) \log \frac{\rho}{2}; \quad n = 0 \quad (4.55)$$

Figura 21. Funciones de Bessel de orden cero



Fuente: elaboración propia.

$$\frac{\partial J_n(\rho)}{\partial \rho} = -J_1(\rho); \quad n = 0$$

En el caso de la función de Bessel modificada

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) - (1 - n^2) R(\rho) = 0 \quad (4.52)$$

La solución general es la combinación lineal de las dos funciones de Bessel $J_n(\rho)$ y $Y_n(\rho)$.
Esto es

$$R(\rho) = A I_n(\rho) + B K_n(\rho)$$

donde

$$I_n(\rho) = i^{-n} J_n(i\rho)$$

$$K_n(\rho) = \lim_{v \rightarrow n} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-v}(\rho) - I_v(\rho)}{\operatorname{sen} v\pi}$$

Y

$$\frac{\partial K_0(\rho)}{\partial \rho} = -K_1(\rho)$$

$$\int_0^R I_0(\kappa \rho) \rho \, d\rho = \frac{R}{\kappa} I_1(\kappa R)$$

Sobre los autores

Pinedo Vega, José Luis

Coordinador y primer autor de esta edición, es Doctor egresado de la Université Joseph Fourier Grenoble I (Francia) con especialidad en geofísica, geoquímica y geomecánica (1997). Obtuvo un Diplôme d'Etudes Approfondies en Energétique Physique en el Institut National Polytechnique de Grenoble (Francia, 1994). Obtuvo el grado de Maestría en Ciencias Nucleares, en la Facultad de Química de la Universidad Nacional Autónoma de México (1984). Es Ingeniero Químico egresado de la Facultad de Ciencias Químicas de la Universidad Autónoma de Zacatecas (1973-1978). Ha sido profesor e investigador de la Universidad Autónoma de Zacatecas, donde desarrolló las líneas de investigación: tendencias globales del ozono estratosférico, espectroradiometría de la radiación ultravioleta, análisis y monitoreo mundial de la energía, y revisiones en física nuclear y teoría electromagnética. Es coordinador y primer autor de los libros: *Fundamentos de física de la atmósfera* (2ª edición), 2019, ISBN 978-607-7678-81-6, *Estrategia estatal de cambio climático de Zacatecas* (primera fase), 2013, ISBN 978-607-7678-81-6; y *El petróleo en oro y negro*, 2005, ISBN 1-59754-085-4.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7884-3321>

Researcher ID Thomson: K-8102-2017

ID Scopus: [6506658954](https://orcid.org/0000-0001-7884-3321)

Research Gate: <https://www.researchgate.net/profile/Jose-Luis-Pinedo-Vega/>

Cisneros Garza, Irma Yolanda

Maestra en Ciencias Nucleares con opción terminal en Ingeniería Nuclear por la Universidad Autónoma de Zacatecas (México). Realizó una estancia en el Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares para llevar a cabo el taller teórico-práctico de operación del reactor TRIGA Mark III. Ha sido miembro de la Red Mexicana de Educación, Capacitación e Investigación Nuclear (REMECIN) y de la Sociedad Nuclear Mexicana (SNM). En la actualidad es estudiante del Doctorado en Ciencias Básicas con orientación en Ciencias Nucleares en la Universidad Autónoma de Zacatecas, en donde centra su investigación en el estudio de materiales para la fusión nuclear mediante simulaciones. Ha realizado estancias en el Laboratorio Nacional de Fusión del Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas (España); elaborando cálculos con códigos de transporte neutrónicos para la futura instalación IFMIF-DONES y DEMO.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-8607-8868>

Research Gate: <https://www.researchgate.net/profile/Irma-Cisneros-Garza>

Academia: Unidad Académica de Estudios Nucleares.

Dávila Rangel, J. Ignacio

Doctor en Ciencias con opción en Ciencias Nucleares por la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de México. Obtuvo la Maestría en Ciencias con Especialidad en Metrología de la Radiación por la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Es Licenciado en Ingeniería Química por la Facultad de Ciencias Químicas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Se desempeñó como investigador en la Gerencia de Química, Gerencia de Materiales Nucleares y Gerencia de Sistemas Nucleares en el Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares (ININ-México). En la actualidad es profesor-investigador en la Unidad Académica de Estudios Nucleares, de la Universidad Autónoma de Zacatecas, donde imparte diversas asignaturas en los programas académicos de Maestría en Ciencias Nucleares y Doctorado en Ciencias Básicas con orientación en Ciencias Nucleares, ambos pertenecientes al padrón del Sistema Nacional de Posgrados (CONAHCYT). Tiene reconocimiento como profesor Perfil Deseable (PROMEP) y miembro del Sistema Nacional de Investigadores nivel I (2007-2019). Su interés en la investigación en el área de las Ciencias Nucleares se enfoca en materiales y la influencia de sus propiedades en la incorporación e inmovilización de elementos radioactivos y no radioactivos. También desarrolla investigación orientada al estudio de la presencia e interacción de elementos radioactivos de origen natural y antropogénico en matrices ambientales y sus posibles riesgos a los ecosistemas y la salud humana.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9720-7176>

Researcher ID Thomson: G-5821-2018

De la Torre Aguilar, Fernando

Doctor en Ingeniería Nuclear con énfasis en Reactores de Potencia graduado del Nuclear Science & Engineering Institute de la Universidad de Missouri-Columbia en los Estados Unidos de América. Tiene una Maestría en Ciencias Nucleares con orientación a Técnicas Analíticas Nucleares por parte de la Unidad Académica de Estudios Nucleares (UAEN) de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ), y su licenciatura es en Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica, también en la UAZ. Se ha desempeñado como profesor-investigador en la UAEN desde el 2019 en los programas de Maestría en Ciencias Nucleares y el Doctorado en Ciencias Básicas, impartiendo asignaturas como: Introducción a la Ingeniería Nuclear, Laboratorio de Mediciones Nucleares, Física de Reactores Nucleares, Métodos Matemáticos y Numéricos, y Baterías Nucleares. Sus líneas de investigación principales son baterías nucleares (sistemas de potencia de radioisótopos), Simulación Directa Monte Carlo (DSMC, por sus siglas en inglés) y física de reactores nucleares. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores desde el 2021, con reconocimiento como Investigador Nacional nivel I y tiene reconocimiento como profesor de tiempo completo con Perfil Deseable desde el 2022. Es coautor del libro *Nuclear batteries and radioisotopes* de la Editorial Springer International y de diversas publicaciones en el área de las Ciencias Nucleares. Es miembro activo de la Sociedad Nuclear Mexicana desde el 2022 y de la American Nuclear Society desde el 2021.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0167-3616>

ID Scopus: [57190577510](https://orcid.org/0000-0002-0167-3616)

Research Gate: <https://www.researchgate.net/profile/Fernando-De-La-Torre-Aguilar>

Mireles García, Fernando

Doctor en Ciencias en Ingeniería Nuclear con especialidad en Seguridad y Protección Radiológica, y en Matemáticas por Nuclear Science & Engineering Institute de la Universidad de Missouri-Columbia (USA, 1997). Obtuvo grado de Maestría en Ciencias con Especialidad en Ingeniería Nuclear por la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León, (México, 1984). Es Ingeniero Eléctrico egresado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Zacatecas (México, 1981). Es profesor-investigador de la Unidad Académica de Estudios Nucleares de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México. Sus líneas de investigación de interés son energía y sistemas de energía, seguridad y protección radiológica, blindaje y dosimetría de la radiación, materiales radiactivos naturales, simulación del transporte de la radiación por el método de Monte Carlo con el código de transporte MCNP. Es miembro de la Sociedad Nuclear Mexicana, Sociedad Mexicana de Seguridad Radiológica, Health Physics Society y American Nuclear Society. Es coautor de los siguientes libros: *El petróleo en oro y negro*; *Radium presence on spring water from San Diego de Alcala, Chihuahua, México*; *Environmental hydraulics, theoretical, experimental and computational solutions*; *Fundamentos de física de la atmósfera, atmósfera y Energía*; *Estrategia estatal de cambio climático de Zacatecas* (primera fase); Capítulo 2. Zeolitas naturales y su importancia en un ambiente radiactivo; Chapter 3. The quarks: invention and discovery, en el libro *Understanding quarks*.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2633-6173>

Research Gate: <https://www.researchgate.net/profile/Fernando-Garcia-47>

Ríos Martínez, Carlos

Doctor en Ingeniería Nuclear por la Universidad de Texas en Austin (USA). Obtuvo la maestría en Ciencias Nucleares en la Universidad Nacional Autónoma de México y la licenciatura de Ingeniero Químico en la Universidad Autónoma de Zacatecas. Es profesor-investigador de la Universidad Autónoma de Zacatecas desde hace 47 años y ha impartido diversas asignaturas a nivel licenciatura y posgrado en las unidades académicas de Estudios Nucleares y de Ciencias Químicas. Actualmente cultiva las líneas de investigación: física de radiaciones, radioactividad ambiental, protección radiológica; aplicaciones analíticas de haces radioactivos y espectrometría de la radiación. Tiene varias publicaciones (25+) en revistas como: *Radiation Measurements*, *Applied Radiation and Isotopes*, *Health Physics*, *Atmósfera*, *Asian Journal of Physical Sciences*, *Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry*, así como en las Memorias de Congresos de la American Nuclear Society, Sociedad Nuclear Mexicana, y AMIDIQ.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0532-615X>

ID Scopus: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6505854825>

Research Gate: [researchgate.net/profile/Carlos-Rios-Martinez-3](https://www.researchgate.net/profile/Carlos-Rios-Martinez-3)

Google Scholar: <https://scholar.google.com.mx/citations?user=JBEKD7IAAAAJ&hl=es>

Física de reactores nucleares. Fundamentos teóricos y problemas,
José Luis Pinedo Vega (coordinador), publicado por
Ediciones Comunicación Científica, S. A. de C. V.,
se terminó de imprimir en diciembre de 2025, Litográfica
Ingramex, S. A. de C. V., Centeno 162-1, Granjas Esmeralda,
09810, Ciudad de México. El tiraje fue de 50 ejemplares impresos
y en versión digital para acceso abierto en los formatos PDF,
Epub y HTML.

Física de reactores nucleares: fundamentos teóricos y problemas es un texto formal en el que se presentan, en una primera parte, las formulaciones y desarrollos matemáticos de la Ecuación de Transporte de Neutrones, la Teoría de Difusión de Neutrones, la Teoría Cinética de los Reactores Nucleares, la Teoría de Frenado, la Teoría de Moderación o Teoría de Fermi, los Fundamentos de la Teoría de Multigrupos y la Teoría de un Reactor Crítico. Después, en una segunda parte se presentan ejercicios didácticos y problemas resueltos, que permiten dar significado físico a la teoría y complementan aspectos deductivos formales. Esta obra es una edición propia para un curso formal de física de reactores nucleares, por lo que se dirige a estudiantes de Maestría en Ingeniería Nuclear. Sin embargo, también es recomendable para quienes, teniendo estudios en física de reactores, necesiten revisar algunos desarrollos teóricos o conceptuales y ejemplos.



José Luis Pinedo Vega es profesor e investigador de la UAEN de la Universidad Autónoma de Zacatecas y doctor por la Universidad Joseph Fourier Grenoble I, Francia, con Especialidad en Geofísica, Geoquímica y Geomecánica. Obtuvo un Diplôme d'Etudes Approfondies en Energétique Physique en el Institut National Polytechnique de Grenoble, Francia, y la Maestría en Ciencias Nucleares en la UNAM.



ISBN 978-607-555-292-7



**EDICIONES
COMUNICACIÓN
CIENTÍFICA** PUBLICACIONES
ARBITRADAS

comunicacion-cientifica.com

ISBN 978-968-9738-45-9



Dimensions

RENIECYT
Registro Nacional de Investigaciones y
Empresas Científicas y Tecnológicas
2000922



[DOI.ORG/10.52501/CC.301](https://doi.org/10.52501/CC.301)